سلسلۂ مطبوعات جامعہ عثمانیہ

نشان (۳۶۲)

حرکیات

DYNAMICS

برائے بی - اے

مصنفہٗ
هوریس لیمب
ایس سی - ڈی، ال ال - ڈی، ایف - آر - ایس
رکن اعزازی ٹرینٹی کالج کیمبرج، پروفیسر ریاضی مینچسٹر

پانچواں ایڈیشن سنہ ۱۹۲۹ع

مترجمہٗ
محمد نذیر الدین صاحب ایم - اے
سابق رکن دار الترجمہ جامعۂ عثمانیہ سرکار عالی

سنہ ۱۳۶۶ھ م سنہ ۱۳۵۶ف م سنہ ۱۹۴۷ء
مطبوعہٗ
دار الطبع جامعۂ عثمانیہ سرکار عالی حیدرآباد دکن

یہ کتاب یونیورسٹی پریس کیمبرج کی اجازت سے
اُردو میں ترجمہ کرکے طبع و شایع
کی گئی ہے۔

بار اوّل سنہ ۱۳۵۶ف تعداد طبع (۵۰۰)

دیباچہ

یہ کتاب، سکونیات کے رسالہ کے سلسلہ کے طور پر لکھی گئی ہے جسے شایع ہو کر تقریباً ایک سال ہو چکا ہے اور اس کے معیار کی وسعت بھی تقریباً اتنی ہی ہے۔ اعادہ سے بچنے کے لیے سابقہ کتاب کے متعدد حوالہ جات درج کیے گئے ہیں۔

جب کوئی مصنّف علم حرکت کے مبادیات کی تشریح کرنے کا کام شروع کرتا ہے تو اس کے زیر انتخاب دو طریقوں میں سے ایک طریقہ ہوتا ہے: اولاً یہ کہ وہ مروجہ طریقوں میں سے کوئی طریقہ اختیار کرے، یہ طریقہ عملی نقطۂ نظر سے کتنا ہی مفید کیوں نہ ہو لیکن استدلال کی صحت کی بنا پر اس پر اعتراض کی گنجایش ہے۔ ثانیاً یہ کہ وہ (مصنّف) بحث کا ایسا منطقی طریقہ اختیار کرے جو ایک طالب علم کو جو اس عالم وجود کے حقیقی اور مرئی اجسام کے طرز عمل کے متعلق معلومات حاصل کرنے کا متمنّی اور متلاشی ہے مدد دینے کی بجائے اسے اور زیادہ پریشان کر دے۔ زیر تحریر کتاب کی صورت میں کونسا طریقہ اختیار کرنا زیادہ مناسب ہوگا اس کے تصفیہ میں کسی تذبذب کی ضرورت نہیں۔ میں نے بلا تامل وہی طریقہ اختیار کیا ہے جو میکسول نے اپنی کتاب "مادّہ اور حرکت" میں اختیار کیا ہے اور میرے خیال میں علم حرکت کے مطلق نظام کی مبادیات کی تشریح کے لیے یہی طریقہ بہترین ہے۔ علم حرکت کے مسائل پر بحث کرنے کے زیادہ مدلل

اور منطقی طریقہ کی تشریح بھی اس کے مناسب موقع پر کی جائیگی یعنی کتاب کے آخر میں نہ کہ کتاب کے شروع میں۔

اس مضمون کے مختلف حصوں کی ترتیب وہی کے متعلق بھی فیصلہ کرنے کے لیے بہت زیادہ گنجایش ہے۔ بہت سے طالب علموں کے لیے یہ زیادہ اہم ہے کہ وہ جتنی جلدی ہو سکے استوار اجسام کے علم حرکت کے معمولی مسائل پر بحث کرنے کی قوت حاصل کر لیں بہ نسبت اس کے کہ وہ مرکزی قوتوں یا مزاحمت کے مختلف قوانین کے صحت حرکت کے متعلق زیادہ پیچیدہ مسائل پر عبور حاصل کریں۔ جو ترتیب یہاں اختیار کی گئی ہے وہ اسی تصور کے تابع ہے لیکن چونکہ بعد کے ابواب ایک دوسرے پر زیادہ دارومدار نہیں رکھتے اس لیے اُن کی خواندگی میں اپنی سہولت کے لحاظ سے اس ترتیب کو بدلا جا سکتا ہے۔

مشق کے لیے مثالوں کے انتخاب میں قدرے محنت سے کام لیا گیا ہے۔ سالہا سال کی پرانی درسی کتابوں اور مستند ذخائر سے بادی النظر میں استفادہ کے لیے کافی مواد ملتا ہے لیکن ان کے اندر ایسے سوالات کی تلاش بے سود ثابت ہوتی ہے جو واقعتہً علم حرکت کے نظریات کی مثالیں ہوں اور در اصل جبری اور مثلثی مسائل علم حرکت کے بھیس میں نہ ہوں۔ اس رسالہ میں ایسی مثالوں کو ترجیح دی گئی ہے جو سادہ ہوں اور تحلیلی نقطۂ نظر سے شاندار نہ ہوں۔ اکثر مثالیں جو کسی حد تک مصنف کی مجوزہ ہیں اسی نصب العین کے تحت بنائی گئی ہیں۔

میں پروفیسر ایف ایس کیری اور پروفیسر جے ایچ سی سرلے کا بہت ممنون ہوں کہ انھوں نے ازراہ مہربانی پروفوں کی قرأت فرمائی اور متعدد مفید مشورے دیے۔ ثانی الذکر نے تو بہت سی مثالوں کی بھی توثیق کی۔ مس میری ٹیلر نے بھی طباعت کے آخری منازل میں میری بہت مدد کی۔

جامعۂ مانچسٹر ۱۹۱۴ء

ہوریس لیمب

اس اشاعت میں بعض صفحے از سرِ نو لکھے گئے ہیں اور متعدد

غلطیوں کی تصحیح بھی کی گئی ہے بالخصوص مثالوں ہیں۔ کتاب کے آخر میں متفرق مثالوں کے ایک مجموعہ کا اضافہ کیا گیا ہے۔ واضح رہے کہ ضمیمہ جس کے اندر کوئی تبدیلی نہیں کی گئی ہے وہ صرف نیوٹن کے نقطۂ نظر کے خلاصہ کے طور پر ہے اور ایک ابتدائی درسی کتاب صرف اسی نظریہ کے مطابق لکھی جا سکتی ہے۔

کیمبرج فروری ۱۹۲۳ء

ہوریس لیمب

فہرستِ مضامین

حرکیات

پہلا باب

خطی حرکت کی حرکیاتِ محض

دوسرا باب

خطی حرکت کی حرکیات

تیسرا باب

دو ابعادی حرکیاتِ محض

چوتھا باب

دو ابعاد میں ایک ذرّہ کی حرکت۔ کارٹیزی محدد

پانچواں باب

مماسی اور عمادی اسراع۔ مقید حرکت

چھٹا باب

ذروں کے ایک زوج کی حرکت

ساتواں باب

ذروں کے نظام کا علم حرکت

آٹھواں باب

استوار جسموں کا علم حرکت

ایک ثابت محور کے گرد گردش

دفعہ	مضمون	صفحات

نواں باب

استوار جسموں کا علم حرکت۔ دو بُعدوں میں حرکت

دسواں باب

قانون تجاذب

گیارھواں باب

مرکزی قوتیں

بارھواں باب

انتشاری قوتیں

تیرھواں باب

آزادی کے دو درجوں کے نظام

ضمیمہ

بسم اللہ الرحمٰن الرحیم

حرکیات

پہلا باب

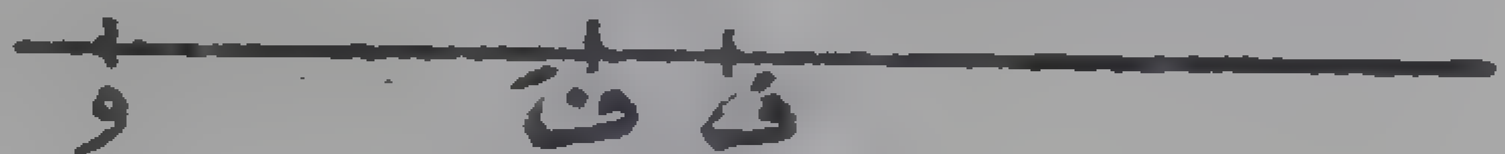
خطی حرکت کی حرکیاتِ محض

۱۔ رفتار

ہم حرکت کے اُس ابتدائی تصور سے شروع کرتے ہیں جس کا تعلق ایک خطِ مستقیم میں حرکت سے ہے۔

فرض کرو کہ ایک نقطہ ف ایک خطِ مستقیم میں متحرک ہے۔ فرض کرو کہ ایک خاص آن سے جس کو ہم وقت شماری کا صفر کہینگے وقت کی پیمائش عمل میں آتی ہے۔ کسی دیے ہوئے لمحہ ت پر یعنے اُس لمحہ پر جب کہ وقت کی ت اکائیاں وقت شماری کے صفر سے گذر چکی ہوں متحرک نقطہ کا محل فی خط پر کے کسی ثابت نقطہ و سے اِس کے فاصلہ لا سے مشخص ہوتا ہے اور اِس فاصلہ کو مثبت یا منفی شمار کیا جاتا ہے بموجب اِس کے کہ ف، و کی ایک جانب یا دوسری جانب واقع ہو تب حرکت کی کسی دی ہوئی صورت میں لا ایک معیّن اور مسلسل تفاعل ہوتا ہے ت کا۔ اگر اِس تفاعل کی شکل

معلوم ہو تو اُس کو ایک امدادی نقشہ میں ترسیمی طور پر ایک منحنی سے تعبیر کرنا اکثر موجب سہولت ہوتا ہے، اس منحنی کی ترسیم میں بالعموم ت کو فصلہ اور لا کو مُعیّن قرار دیا جاتا ہے اس منحنی کو انگریزی میں Space-timecurve کہتے ہیں اور ہم اس کو مکان زمانی منحنی کہیں گے[1]



شکل ۱ـ۱

اگر متحرک نقطہ ایک ہی جہت میں وقت کے کسی دو مساوی وقفوں
میں مساوی فاصلے طے کرے تو ہم یہ کہتے ہیں کہ متحرک نقطہ ایک مستقل رفتار[2]
رکھتا ہے۔ اِس رفتار کی مقدار وہ فاصلہ ہے جو اکائی وقت میں طے ہوتا (۲)
ہے۔ بلاشبہ اس فاصلہ سے قبل مناسب علامت رکھنی چاہیے۔ پس اگر
وقت ت میں متحرک نقطہ کا محل لا سے لا' تک بدلے تو رفتار (لا' − لا)/ت ہے۔ اس کو

[1] مختلف قدیم تجربے، خصوصاً صوتیات میں، ایسے ہیں کہ ان میں مکان زمانی منحنی حیلی یا مناظری ترکیبوں سے خود مرتسم ہو جاتے ہیں، مثلاً سُر کے دو شاخہ یا پیانو کے تار کے کسی نقطہ کے ارتعاش کی نوعیت کا مطالعہ کرنے میں۔ بار پیما وغیرہ کے اہتزازوں کے ترسیمی نقشے ایک مختلف پیمانہ پر حاصل ہوتے ہیں۔

[2] جملہ "یکساں رفتار" اکثر استعمال کیا جاتا ہے لیکن لفظ "مستقل" قابل ترجیح ہے جبکہ وقت کے لحاظ سے غیر تغیر پذیری مراد ہو اور لفظ "یکساں" کو فاصلہ یا مکان کے لحاظ سے غیر تغیر پذیری ظاہر کرنے کے لیے وقف کرنا چاہیے، چنانچہ قوت کا مستقل میدان وہ ہوگا جو وقت کے ساتھ نہیں بدلتا اور قوت کا یکساں میدان وہ ہوگا جو ہر نقطہ پر وہی خواص رکھے۔ دیکھو میکسول کی کتاب "مادہ اور حرکت"

Cf. Maxwell, *Matter and Motion*, London, 1876, pp. 24-25

ع سے تعبیر کیا جائے تو

لا = لاٖ + ع ت .... (ا)

اس لیے اس صورت میں مکان زمانی منحنی ایک خطِ مستقیم ہے۔

... اگر رفتار مستقل نہیں ہے تو وقت کے کسی وقفہ میں جو فاصلہ طے ہوتا ہے اس کو اس وقفہ سے تقسیم کیا جائے تو وہ نتیجہ حاصل ہوگا جس کو ہم اس وقفہ میں "اوسط رفتار" کہہ سکتے ہیں۔ اس کا یہ مطلب ہے کہ ایک نقطہ جس کی مستقل رفتار یہ اوسط رفتار ہو اسی وقفہ میں ایک مساوی فاصلہ طے کریگا۔ مثلاً شکل ۱ میں اگر نقطوں ف، فَ سے علی الترتیب لمحول ت، تَ پر کے محل تعبیر ہوں تو وقفہ تَ ۔ ت میں اوسط رفتار

$$\frac{\text{ف فَ}}{\text{تَ - ت}} \quad \text{یا} \quad \frac{\text{لاَ - لا}}{\text{تَ - ت}}$$

ہے جہاں ف، فَ کے فصلے علی الترتیب لا، لاَ ہیں۔ اگر ہم لاَ = لا + مف لا، تَ = ت + مف ت کہیں یعنے اگر لا اور ت کے متناظر اضافے مف لا، مف ت ہوں تو اوسط رفتار

$$\frac{\text{مف لا}}{\text{مف ت}}$$

سے تعبیر ہوگی۔

اُن تمام صورتوں میں جن پر غور کرنے کی ضرورت پڑتی ہے[1] اِس کسر کی ایک معین انتہائی قیمت ہوتی ہے جبکہ وقفہ مف ت کو لا انتہا گھٹا دیا جاتا ہے۔ اس انتہائی قیمت کو "لمحہ ت پر کی رفتار" کی تعریف کے طور پر اختیار کیا جاتا ہے۔ فرض کرو کہ ہم اس کو ع سے تعبیر کرتے

[1] سوائے اُن صورتوں کے جن میں دھکے کے مسئلوں کو رسمی طریقوں سے حل کیا جاتا ہے، جن میں مختلف انتہائیں حاصل ہو سکتی ہیں بموجب اس کے کہ مف ت مثبت لیے یا منفی دیکھو حصہ باب

ہیں تو تفرقی احصاء کی ترقیم میں رشتۂ ذیل حاصل ہوتا ہے :۔

$$ع = \frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (۲)$$

مکان زمانی منحنی میں جس کا ذکر اوپر آچکا ہے کسی لمحہ پر کی رفتار منحنی کے اُس "ڈھال" سے تعبیر ہوتی ہے جو متناظر نقطہ پر ہے یعنے اُس زاویہ کے مثلثی مماس سے جو منحنی کا مماس (ت کی بڑھتی ہوئی سمت میں کھینچا ہوا) ت کے محور کی مثبت سمت کے ساتھ بناتا ہے، تفرقی سر $\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}}$ ٹھیک $\frac{\text{فرلا}}{\text{فرلا}}$ کے متناظر ہے جو بالعموم علم الاحصاء میں مستعمل ہے۔ (۳)

رفتار ع عام طور پر ت کا ایک مُعین اور مسلسل تفاعل ہوتی ہے اور اُس کو ترسیمی طور پر ایک منحنی سے تعبیر کیا جاسکتا ہے، اس منحنی کو ہم **"رفتار زمانی"** منحنی کہینگے، یہ منحنی بالعموم ت کو فصلہ اور ع کو مُعین قرار دے کر مرتسم کیا جاتا ہے۔ اب چونکہ (۲) کے تکمل سے

$$لا = \int ع\, \text{فرت} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (۳)$$

حاصل ہوتا ہے اس لیے یہ معلوم ہوتا ہے کہ وقت کے کسی وقفہ میں اس منحنی کا مُعین جو رقبہ عبور کرتا ہے اُس سے وہ فاصلہ حاصل ہوتا ہے جو متحرک نقطہ اِس وقفہ میں طے کرتا ہے۔ (۳) کا تکملہ دراصل $\int$ م فرلا کے متناظر ہے جو بالعموم علم الاحصاء میں مستعمل ہے۔

اگر $ف_۱$، $ف_۲$ دو متحرک نقطے ہوں اور ان کے محدد $لا_۱$، $لا_۲$ ہوں تو

$$ضا = ف_۱ ف_۲ = لا_۲ - لا_۱ \quad \ldots\ldots\ldots (۴)$$

رکھنے سے ہمیں

$$\frac{\text{فرضا}}{\text{فرت}} = \frac{\text{فرلا}_۲}{\text{فرت}} - \frac{\text{فرلا}_۱}{\text{فرت}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۵)$$

حاصل ہوتا ہے یعنے $ف_1$ کے لحاظ سے $ف_2$ کی رفتار، $ف_1$ اور $ف_2$ کی رفتاروں کا فرق ہوتی ہے۔

۲۔ اسراع

جب وقت کے کسی دو مساوی وقفوں میں رفتاریں مساوی مقدار کے ہم علامت اضافے ہوتے ہیں تو ہم کہتے ہیں کہ حرکت "یکساں اسراع یافتہ" ہے یا (ترجیحاً) متحرک نقطہ ایک "مستقل اسراع" رکھتا ہے۔ اِس اسراع کی مقدار، فی اکائی وقت اضافہ شدہ رفتار سے مشخص ہوتی ہے[1]۔ پس اگر وقت ت میں رفتار $\underset{\cdot}{ع}$ سے ع میں تبدیل ہو تو اسراع $\frac{ع - \underset{\cdot}{ع}}{ت}$ ہے۔

اس کو عہ سے تعبیر کرو تو

$$ع = \underset{\cdot}{ع} + عہ\,ت \qquad \text{.........} \qquad (1)$$

اِس صورت میں رفتار زمانی منحنی ایک خطِ مستقیم ہے۔

عام صورت میں فرض کرو کہ وقت کے کسی وقفہ میں رفتار میں جو (۴)
اضافہ ہوتا ہے اُس کو اِس وقفہ سے تقسیم کیا گیا ہے۔ اس طرح جو نتیجہ حاصل ہوگا اُس کو ہم اِس وقفہ میں "اسراع کی اوسط شرح" یا صرف "اوسط اسراع" کہہ سکتے ہیں۔ اس کا یہ مطلب ہے کہ ایک نقطہ جس کا مستقل اسراع اس اوسط اسراع کے مساوی ہو اپنی رفتار اُسی وقفہ میں بقدر اُسی مقدار کے تبدیل کریگا۔ پس اگر لمحوں ت، تَ پر رفتاریں علی الترتیب ع، عَ ہوں تو وقفہ تَ ـ ت میں اوسط اسراع $\frac{عَ - ع}{تَ - ت}$ ہے یا

$$\frac{مف\,ع}{مف\,ت}$$

---

[1] منفی اسراع کو بعض اوقات "ابطا" سے موسوم کیا جاتا ہے۔

اگر ہم ع‌َ = ع + معت ع اور تَ = ت + معت ت لکھیں۔

وھکہ کے سوا باقی تمام اہم صورتوں میں اس کسر کی ایک معیّن انتہائی قیمت ہوتی ہے جبکہ معت ت کو لا انتہا گھٹا دیا جاتا ہے، اس انتہا کو "لمحہ ت پر کا اسراع" کی تعریف کے طور پر اختیار کیا جا سکتا ہے۔ فرض کرو کہ اس کو عہ سے تعبیر کیا گیا ہے تو

$$عہ = \frac{فرع}{فرت} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۲)$$

یہ ظاہر ہے کہ اسراع، رفتارِ زمانی منحنی میں منحنی کے ڈھال سے تعبیر ہوتا ہے۔

$$چونکہ\ ع = \frac{فرلا}{فرت}$$

$$اس\ لیے \quad عہ = \frac{فر^۲ لا}{فرت^۲} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۳)$$

اکثر انعطافی ترقیم استعمال کرنے میں سہولت ہوتی ہے، جس میں وقت کے لحاظ سے تفرقوں کو متبوع متغیر کے حرف پر نقطے رکھ کر ظاہر کیا جاتا ہے، مثلاً رفتار کو لاؔ سے اور اسراع کو عؔ یا لاؔ سے تعبیر کیا جا سکتا ہے۔

اسراع کے لیے دوسرا بہت اہم جملہ حاصل ہوتا ہے اگر ہم رفتار (ع) کو نقطہ کے محل (لا) کا تفاعل سمجھیں۔ یہ امر قابل توجہ ہے کہ چونکہ متحرک نقطہ ایک دیے ہوئے محل میں سے ایک سے زائد مرتبہ گذر سکتا ہے اور اس لیے لا کی کسی دی ہوئی قیمت کے متناظر ع کی ایک سے زیادہ قیمتیں حاصل ہو سکتی ہیں۔ لیکن اگر ہم ان میں سے صرف ایک قیمت پر ہی اپنی توجہ مرکوز رکھیں تو ہمیں حاصل ہوگا۔

$$عہ = \frac{فرع}{فرت} = \frac{فرع}{فرلا}\,\frac{فرلا}{فرت} = ع\,\frac{فرع}{فرلا} \quad \ldots\ldots\ldots (۴)$$

(۵) اگر دو متحرک نقاط ف، ف۲ کے محدد لا، لا۲ ہوں اور اگر

$$\text{ضا} = \text{ف}_1\text{ف}_2 = \text{لا}_2 - \text{لا}_1 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (5)$$

تو ہمیں حاصل ہوگا

$$\frac{\text{فر}^2\,\text{ضا}}{\text{فرت}^2} = \frac{\text{فر}^2\,\text{لا}_2}{\text{فرت}^2} - \frac{\text{فر}^2\,\text{لا}_1}{\text{فرت}^2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (6)$$

یعنے ف_1 کے لحاظ سے ف_2 کا اسراع اِن نقطوں کے اسراعوں کا فرق ہے۔

خاص صورت میں اگر ف_1 کی رفتار مستقل ہو یعنے اگر $\frac{\text{فر}^2\,\text{لا}_1}{\text{فرت}^2} = 0$ تو

$$\frac{\text{فر}^2\,\text{ضا}}{\text{فرت}^2} = \frac{\text{فر}^2\,\text{لا}_2}{\text{فرت}^2}$$

یعنے کسی متحرک نقطہ کا اسراع وہی رہتا ہے خواہ اس کا حوالہ ایک ثابت مبداء سے دیا جائے یا ایک ایسے مبداء سے جو ایک مستقل رفتار سے حرکت کر رہا ہو۔

مثال ۱ ۔ اگر لا ، ت کا ایک دودرجی تفاعل ہو مثلاً

$$\text{لا} = \tfrac{1}{2}\left(\text{ھ}\,\text{ت}^2 + 2\,\text{ب}\,\text{ت} + \text{ج}\right) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (7)$$

تو
$$\dot{\text{لا}} = \text{ھ}\,\text{ت} + \text{ب}،\quad \ddot{\text{لا}} = \text{ھ} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (8)$$

اس لیے اسراع مستقل ہوتا ہے

مثال ۲ ۔ اگر $\text{لا} = \text{ا}\,\text{جم}\,(\text{ن}\,\text{ت} + \text{ھ}) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (9)$

تو
$$\dot{\text{لا}} = -\,\text{ن}\,\text{ا}\,\text{جب}\,(\text{ن}\,\text{ت} + \text{ھ}) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (10)$$

$$\ddot{\text{لا}} = -\,\text{ن}^2\,\text{ا}\,\text{جم}\,(\text{ن}\,\text{ت} + \text{ھ}) = -\,\text{ن}^2\,\text{لا} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (11)$$

مکان زمانی منحنی جیوب کا ایک منحنی ہے اور رفتار زمانی منحنی بھی ایک مشابہ منحنی ہے جس کے صفری نقطے، اول الذکر کے اعظم اور اقل نقطوں کے ہم وقت ہیں۔ دیکھو شکل ۱۲ صفحہ ۳۹

مثال ۳ - اگر لا = ا و^ن ت + ب و^-ن ت .... (۱۲)

تو　لا = ن ا و^ن ت - ن ب و^-ن ت　(۱۳)

لا = ن² ا و^ن ت + ن² ب و^-ن ت = ن² لا .... (۱۴)

مثال ۴ - اگر ع²، لا کا ایک دو درجی تفاعل ہو، مثلاً

ع² = ا لا² + ۲ ب لا + ج .... (۱۵)

تو　ع فرع/فرلا = ا لا + ب .... (۱۶)

اس لیے اسراع ایسے بدلتا ہے جیسے نقطہ لا = - ب/ا سے فاصلہ - اگر ا = ۰ تو اسراع مستقل ہوگا -

۴ - اکائیاں اور ابعاد (۶)

طول کی اکائی کی تعریف بالعموم کسی مادّی معیار کے ذریعہ یا اس کے کسی سہولت بخش ضِعف یا تحت ضِعف کے ذریعہ کی جاتی ہے -

چنانچہ میتری نظام میں میتر ہے جس کی تحت ضعفی اکائیاں ڈیسی میتر، سینتی میتر وغیرہ ہیں اور ضعفی اکائی کیلو میتر ہے - میتر کے معیار کو ابتداءً اس خیال سے اختیار کیا گیا تھا کہ اِس سے زمین کے نصف النہار کے ایک ربع کا کروڑ واں حصہ قریب قریب تعبیر ہوتا ہے - یہ مطابقت بالکل ٹھیک[۱] تو نہیں ہے لیکن بہت قریب ہے - میتر کی علمی اور قانونی تعریف بلاشبہ مادّی معیار کے حوالہ سے کی گئی ہے نہ کہ زمین کے ابعاد کے حوالے سے -

---

[۱] زمین کے متذکرۂ ربع کے طول کے لیے سب سے زیادہ مستند قیمت ۱۰۰۰۱۸۶۹ میتر ہے (کلارک، جیوڈیسی مطبوعہ لندن ۱۸۸۰ء) - (Clarke, Geodesy, London, 1880

معیار کے اس مخصوص انتخاب کی وجہ یہ تھی کہ ربع کی ایسی اعشاری تقسیم سے زمین کی سطح پر عرض بلد کا ایک منٹ ایک کیلو میٹر کے متناظر ہو جاتا ہے۔

پیمائش کے برطانوی نظام میں معیار گز ہے جس کے تحت ضعف فٹ اور انچ ہیں اور ضعف میل ہے۔ یہاں زمین کے ابعاد کے ساتھ کوئی سادہ رشتہ نہیں ہے اور بحری میل جو عرض بلد کے ایک (ستینی) منٹ کے متناظر ہے ۲۰۲۶ گز کے قانونی میل سے قابل لحاظ طور پر مختلف ہے۔

طول کی پیمائش کے ان دو نظاموں کے درمیان جو رشتے ہیں ان کو جدول[۱] ذیل میں بیان کیا گیا ہے، جس میں مختلف برطانوی اکائیوں کو سینٹی میٹروں میں تحویل کرنے کے لیے درکار اجزائے ضربی اور ان کے متکافی چار اہم ہندسوں تک دیے گئے ہیں:

	سینٹی میٹر	متکافی
انچ	۲٫۵۴۰	٫۳۹۳۷
فٹ	۳۰٫۴۸	٫۰۳۲۸۱
گز	۹۱٫۴۴	٫۰۱۰۹۴
میل	۱٫۶۰۹ × $۱۰^{۵}$	۶٫۲۱۴ × $۱۰^{-۶}$
بحری میل	۱٫۸۵۲ × $۱۰^{۵}$	۵٫۳۹۸ × $۱۰^{-۶}$

میتری نظام کی بنیاد چونکہ اعشاری تقسیم پر ہے اس لیے دوسری اکائیوں کے درمیان رشتے فوراً معلوم کیے جا سکتے ہیں۔ مثلاً ایک میل ۱۶۰۹ میٹر کے مساوی ہے، اور ایک کیلومیٹر (= $۱۰^{۵}$ سمر) ۱۰۹۴ گز ہے۔

اس کتاب میں ہم فٹ یا سینٹی میٹر کو خاص کر استعمال کریں گے، (۷)
سینٹی میٹر کو اس وجہ سے کہ یہ اکائی بالعموم سائنسی پیمائشوں میں استعمال کی جاتی ہے۔

---

[۱] یہ جدول ایوریٹ (Everett) کی کتاب (Units and Physical Constants.) سے لی گئی ہے۔

وقت کی پیمائش کے لیے کوئی ایسا نظام ہمہ گیر طور پر اختیار کیا جاتا ہے جو زمین کی گردش پر مبنی ہوتا ہے، تمام گھڑیاں اور گھنٹے بالآخر اسی کے حوالہ سے ترتیب دیے جاتے ہیں۔ خالص علمی نکتہ نگاہ سے سادہ ترین معیار کوکبی یوم ہوگا یعنے وہ وقفہ جو ثابت ستاروں کے لحاظ سے زمین کی ایک مکمل گردش میں صرف ہوتا ہے، لیکن اِس معیار میں بڑی زحمت یہ ہوگی کہ معمولی گھڑیاں علمی مقاصد کے لیے کار آمد نہ ہوسکینگی۔ اکائیاں جو عام طور پر مستعمل ہیں ''اوسط شمسی یوم'' پر منحصر ہوتی ہیں یعنے اُس اوسط وقفہ پر جو سورج کے (کسی دیے ہوئے نصف النہار پر) دو متواتر مُروروں کے درمیان ہوتا ہے۔ اس میں اور کوکبی یوم میں نسبت ۱۰۰۲۷۴۱:۱ ہے۔ سائنسی پیمائشوں میں اکائی بالعموم اوسط شمسی ثانیہ ہوتی ہے یعنے اوسط شمسی یوم کا $\frac{۱}{۸۶۴۰۰}$ حصہ۔ کاروباری اغراض کے لیے گھنٹہ، یا دن، یا سال کو اکثر استعمال کیا جاتا ہے۔

وقت اور طول کی اکائیاں اختیاری اور غیر تابع ہیں۔ اِن پر رفتار اور اسراع کی اکائیاں منحصر ہوتی ہیں اور اس لیے اِن کو ''مشتق'' اکائیاں کہہ سکتے ہیں۔ اکائی رفتار یعنے وہ رفتار جو حسبِ تعریف دفعہ ا عدد ا سے تعبیر ہوتی ہے ایسی ہے کہ طول کی ایک اکائی وقت کی ایک اکائی میں طے ہوتی ہے۔ اس لیے اس کی مقدار بالراست ایسے بدلتی ہے جیسے اکائی طول کی مقدار اور بالعکس ایسے بدلتی ہے جیسے اکائی وقت کی مقدار۔ اس لیے ہم کہتے ہیں کہ وہ طول میں مثبت ایک ''بُعد'' رکھتی ہے اور وقت میں منفی ایک بُعد رکھتی ہے۔ اگر ہم طول اور وقت کی اکائیوں کی مقداروں کو بالترتیب ط اور ق سے تعبیر کریں تو اِس کو اختصاراً اس طرح بیان کیا جاسکتا ہے کہ اکائی رفتار $\frac{ط}{ق}$ یا ط $ق^{-۱}$ ہے۔ وہ عدد جس سے حقیقی رفتار ظاہر ہوتی ہے بلاشبہ اِس اکائی کے بالعکس بدلیگا۔ جب یہ ظاہر کرنا مقصود ہوتا ہے کہ کونسی خاص اکائی اختیار کی گئی ہے تو ''فٹ فی ثانیہ'' یا ''میل فی گھنٹہ'' جیسے الفاظ کے اضافہ سے ایسا

کیا جاسکتا ہے یا اختصاراً "فٹ \ ثانیہ" یا "میل \ گھنٹہ"

اکائی اسراع وہ ہے کہ رفتار کی ایک اکائی، وقت کی ایک اکائی میں حاصل ہو۔ اس لیے اس کے بُعد $\frac{\text{ط ق}^{-1}}{\text{ق}}$ ، یا $\frac{\text{ط}}{\text{ق}^{2}}$ ، یا ط ق$^{-2}$ سے تعبیر ہوتے ہیں۔ کسی حقیقی اسراع کا تشخص ایک عدد سے ہو سکتا ہے جس کے بعد الفاظ "فٹ فی ثانیہ فی ثانیہ" یا "میل فی گھنٹہ فی گھنٹہ" وغیرہ جیسی بھی صورت (۸)
ہو، ہونے چاہییں۔ یہ اختصاراً "فٹ \ ثانیہ^{2}" یا "میل \ گھنٹہ^{2}" بھی لکھے جاسکتے ہیں۔ اسراع کے تشخص میں وقت کے ایسے دوہرے حوالہ پر علم الحیل* کی ابتدائی کتابوں میں کافی زور دیا جاتا ہے لیکن طالبِ علم وقت کے اِس دوہرے حوالہ کو تفرقی سر $\frac{\text{فر}^{2}\text{لا}}{\text{فرت}^{2}}$ کی شکل میں پھر مشاہدہ کرسکتا ہے۔

مثال۔ میل اور گھنٹہ سے فٹ اور ثانیہ میں (ان کو بنیادی اکائیاں سمجھ کر) منتقل کرنے کے لیے ہم

$$\text{ط}' = ۵۲۸۰\ \text{ط}،\ \text{ق}' = ۳۶۰۰\ \text{ق}$$

لکھ سکتے ہیں۔

اس لیے
$$\frac{\text{ط}'}{\text{ق}'} = \frac{۲۲}{۱۵}\,\frac{\text{ط}}{\text{ق}}$$

پس اِن دو نظاموں میں رفتار کی اکائیوں میں نسبت ۲۲ : ۱۵ ہے اور کسی دی ہوئی رفتار کی عددی قیمتوں میں نسبت ۱۵ : ۲۲ ہے چنانچہ ۶۰ میل فی گھنٹہ کی رفتار، ۸۸ فٹ فی ثانیہ کے معادل ہے۔

نیز
$$\frac{\text{ط}'}{\text{ق}'^{2}} = \frac{۱۱}{۲۷۰۰۰}\,\frac{\text{ط}}{\text{ق}^{2}}$$

* Mechanics

اس لیے اسراع کی اکائیوں میں نسبت ۱: ۲۷۰۰۰ ہے۔

۴ - جاذبۂ ارض کا اسراع

اِس امر کو تجربہ کے نتیجہ کے طور پر قبول کیا جا سکتا ہے (اگرچہ بہترین تجربی ثبوت بھی بالواسطہ ہی ہے، دیکھو دفعہ ۱۱) کہ ایک ذرّہ جو سطح زمین سے قریب کسی دیے ہوئے مقام سے آزادانہ گر رہا ہو ایک مُعین اسراع ج رکھتا ہے جو تمام جسموں کے لیے وہی ہوتا ہے۔

لیکن ج کی ٹھیک قیمت مقام کے ساتھ بدلتی ہے چنانچہ خط استواء سے قطبین کی جانب ذرا بڑھتی ہے، اور سطح سمندر کے اُوپر ارتفاع کے ساتھ قدرے گھٹتی ہے۔ مقامی بے قاعدگیاں بھی ہوتی ہیں لیکن اِن کی مقدار مقابلۃً خفیف ہوتی ہے۔ حالیہ تحقیقاتوں[1] کے بموجب سمندر کے لیول پر ج کی قیمت حسبِ ذیل ضابطہ سے بڑی حد تک صحت کے ساتھ تعبیر کی جا سکتی ہے:

ج = ۹۷۸٫۰۳ (۱ + ٫۰۰۵۳ جب² فہ) .... (۱)

جہاں فہ عرض بلد ہے اور اکائیاں میتر اور ثانیہ ہیں۔ فٹ اور ثانیہ کی رقوم میں یہ ضابطہ

ج = ۳۲٫۰۸۸ (۱ + ٫۰۰۵۳ جب² فہ) .... (۲)

میں تحویل ہوتا ہے۔ اس لیے استواء سے قطب تک کُل تغیر نصف فی صد سے قدرے زیادہ ہے۔ عرض بلد °۴۵ میں ج = ۹۸۰٫۶۲ یا ۳۲٫۱۷۳ بموجب منتخبہ اکائیوں کے۔

ارتفاع کے لحاظ سے ج میں جو تغیر ہوتا ہے وہ حسبِ ذیل ضابطہ سے (۹)
حاصل ہوگا:

[1] F. R. Helmert, *Encycl. d. Math. Wiss.*; Bd. VI. a1.

جَ = ج (۱ - ۰٫۰......۳ ف) .... (۳)

جہاں سمندر کے لیول پر قیمت ج اور اِس لیول کے اُوپر ارتفاع ف (میتروں میں) پر قیمت جَ ہے - یہ تغیر اکثر و بیشتر مقاصد کے لیے غیراہم ہے -

تشریحی مقاصد میں ج کی قیمت کو ۹۸۰ سمر ثانیہ² یا ۳۲ فٹ ثانیہ² مان لینا بالعموم کافی طور پر صحیح خیال کیا جاسکتا ہے - ثانی الذکر عدد اپنی تقسیم پذیری کی وجہ سے ذہنی حسابی عمل میں خاص طور پر سہولت بخش ہے -

۵ - تفرقی مساواتیں

دفعہ ۲ کے ضابطوں (۳) اور (۴) سے اسراع معلوم ہوسکتا ہے جبکہ محل (لا) وقت کے ایک تفاعل کے طور پر دیا گیا ہو یا رفتار محل کے ایک تفاعل کے طور پر دی گئی ہو - لیکن حرکیاتی سوالوں میں عام طور پر اس کے عکس مسئلہ سے تعلق رہتا ہے اور اسراع کو وقت کے، یا محل کے، یا دونوں کے تفاعل کے طور پر دیا جاتا ہے یا اُس کو رفتار کے تفاعل کے طور پر بھی دیا جاتا ہے اور یہ معلوم کرنا ہوتا ہے کہ کسی مقررہ لمحہ پر رفتار اور محل کیا ہیں - ہم یہاں تفرقی مساواتوں کے ایک یا دو ایسے نمونوں پر غور کرینگے جو اِن سوالوں کے حل کرنے میں پیش آتے ہیں اور ان کو حل کرنے کے طریقے بھی بیان کرینگے -

ا - اسراع کو وقت کے تفاعل کے طور پر دیا جاسکتا ہے - اس طرح

فر²لا / فرت² = ف (ت) .... (۱)

اِس کو ت کے لحاظ سے فوراً تکمل کیا جاسکتا ہے - ہمیں حاصل ہوگا

فرلا / فرت = ∫ف (ت) فرت + ا = ف₁(ت) + ا ..... (۲)

جہاں ف۱ (ت) ، ف (ت) کے کسی غیر معین تکملہ کا قائم مقام ہے اور جہاں مستقل ا اختیاری ہے۔ پھر تکمل کرنے پر ہمیں حاصل ہوگا

$$\text{لا} = \int \text{ف}_1(\text{ت})\, \text{فرت} + \text{ا ت} + \text{ب} \quad \ldots\ldots\ldots (۳)$$

جہاں ب ایک دوسرا اختیاری مستقل ہے۔

اس حل میں دو اختیاری مستقلوں کے واقع ہونے کی وجہ یہ ہے کہ
ایک نقطہ کے متعلق یہ فرض کیا جاسکتا ہے کہ وہ ایک دیے ہوئے لمحہ پر کسی
اختیاری محل سے اور کسی اختیاری رفتار سے حرکت کی ابتدا کرتا ہے اور (۱۰)
اس کے بعد کی حرکت میں اس قانون کی پابندی کرتا ہے جس کو (۱) میں بیان
کیا گیا ہے۔ اس لیے حل کے عام ہونے کے لیے یہ لازم ہے کہ وہ ان ابتدائی اختیاری
شرطوں کو پورا کرے۔ دیکھو ذیل میں مثال ۱۔ حل میں اختیاری عنصر کو اس
مخصوص شکل ا ت + ب میں واقع ہونے کی وجہ یہ ہے کہ کسی مستقل رفتار کے
اضافہ سے اسراع پر کوئی اثر نہیں پڑتا۔

۲۔ اسراع کو محل کے ایک تفاعل کے طور پر دیا جاسکتا ہے، اس طرح

$$\frac{\text{فر}^2\text{لا}}{\text{فرت}^2} = \text{ف(لا)} \quad \ldots\ldots\ldots (۴)$$

اگر اس مساوات کی طرفین کو $\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}}$ سے ضرب دیا جائے تو وہ ت کے لحاظ سے تکمل پذیر ہو جاتی ہے۔ اس طرح

$$\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}} \cdot \frac{\text{فر}^2\text{لا}}{\text{فرت}^2} = \text{ف(لا)} \frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}} ،$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}}\right)^2 = \int \text{ف(لا)} \frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}}\, \text{فرت} + \text{ا}$$

$$= \int \text{ف(لا)}\, \text{فرلا} + \text{ا} \quad \ldots\ldots\ldots (۵)$$

اُس معمولی ضابطہ کی رُو سے جو ایک غیر معین تکملہ میں متغیر کی تبدیلی سے متعلق ہے۔ یہ عمل بار بار ہمارے مضمون میں وقوع پذیر ہوگا اور نتیجہ (۵) کی عموماً ایک اہم تعبیر یہ ہے کہ وہ "توانائی کی مساوات" ہے۔ اس کو ذرا مختلف طریقہ پر حسبِ ذیل طریقہ سے معلوم کیا جاسکتا ہے۔ لا کو متبوع متغیر فرض کرو تو (۴) کی بجائے ہمیں

$$\text{ع}\,\frac{\text{فرع}}{\text{فرلا}} = \text{ف}(\text{لا}) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (۶)$$

حاصل ہوگا جو لا کے لحاظ سے تکمل پذیر ہے۔ اس لیے

$$\frac{1}{2}\,\text{ع}^2 = \int \text{ف}(\text{لا})\,\text{فرلا} + \text{ا} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (۷)$$

ہر طریقہ میں ع² یا لاٛ² ، لا کے ایک تفاعل کے طور پر حاصل ہوتا ہے، فرض کرو

$$\left(\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}}\right)^2 = \text{فا}(\text{لا}) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (۸)$$

جس سے

$$\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}} = \pm \sqrt{\{\text{فا}(\text{لا})\}} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (۹)$$

دو علامتیں اُن دو سمتوں سے متعلق ہیں جن میں متحرک نقطہ محل لا میں سے (۱۱)
گذر سکتا ہے۔ خاص خاص مسئلوں میں دونوں صورتوں پر غور کرنے کی ضرورت ہوگی۔

مزید تکمل کے لیے ہم (۹) کو شکل

$$\frac{\text{فرت}}{\text{فرلا}} = \pm \frac{1}{\sqrt{\{\text{فا}(\text{لا})\}}} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (۱۰)$$

میں لکھ سکتے ہیں۔ پس لا کے لحاظ سے تکمل کرنے پر

$$\text{تا} = \pm \int \frac{\text{فرلا}}{\sqrt{\{\text{فا}(\text{لا})\}}} + \text{ب} \qquad (۱۱)$$

اس حل میں درحقیقت دو اختیاری مستقل شریک ہیں کیونکہ ایک تو فا(لا) کی قیمت میں پہلے سے ہی شریک ہے۔ تفرقی مساوات (۴) کی شکل سے یہ واضح ہوسکتا ہے کہ دوسرا اختیاری مستقل ت کے ساتھ آیگا کیونکہ یہ مساوات شکل میں نہیں بدلتی اگر ت کے مبداء کو منتقل کیا جائے۔

تفرقی مساواتوں کے ایسے مزید نمونوں پر جو حرکیاتی سوالوں میں پیش ہونگے سہولت کے ساتھ اپنی اپنی جگہ پر حل کیے جائینگے۔

مثال ۱ - ایک ایسے ذرہ کی صورت میں جو جاذبہ کے تحت انتصاباً حرکت کررہا ہوتو ہمیں

$$\frac{\text{فر}^2\text{لا}}{\text{فرت}^2} = -\text{ج} \qquad \text{(۱۲)}$$

حاصل ہوگا اگر لا کی مثبت سمت اوپر وار ہے۔ پس

$$\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}} = -\text{ج ت} + \text{ا}\ ،\ \text{لا} = -\tfrac{1}{2}\text{ج ت}^2 + \text{ا ت} + \text{ب} \qquad \text{(۱۳)}$$

اگر ابتدائی شرطیں یہ ہوں کہ ت = ۰ کے لیے لا = لا۰، لاْ = ع۰ تو ع۰ = ا،
لا۰ = ب جس سے

$$\dot{\text{لا}} = \text{ع}_0 - \text{ج ت}\ ،\ \text{لا} = \text{لا}_0 + \text{ع}_0\text{ت} - \tfrac{1}{2}\text{ج ت}^2 \qquad \text{(۱۴)}$$

لہٰذا مکان زمانی منحنی ایک مکافی ہے اور رفتار زمانی منحنی ایک خطِ مستقیم ہے (دیکھو شکل ۲ صفحہ ۱۷)۔ یہ شکل صورت لا۰ = ۱۲، ع۰ = ۴۸ (فٹ ثانیہ اکائیوں میں) سے متعلق ہے۔

دوسرے طریقہ سے اس سوال پر غور کیا جائے تو ہمیں حاصل ہوگا

$$\text{ع}\frac{\text{فرع}}{\text{فرلا}} = -\text{ج} \qquad \text{(۱۵)}$$

$$\tfrac{1}{2}\text{ع}^2 = -\text{ج لا} + \text{ج} \qquad \text{(۱۶)}$$

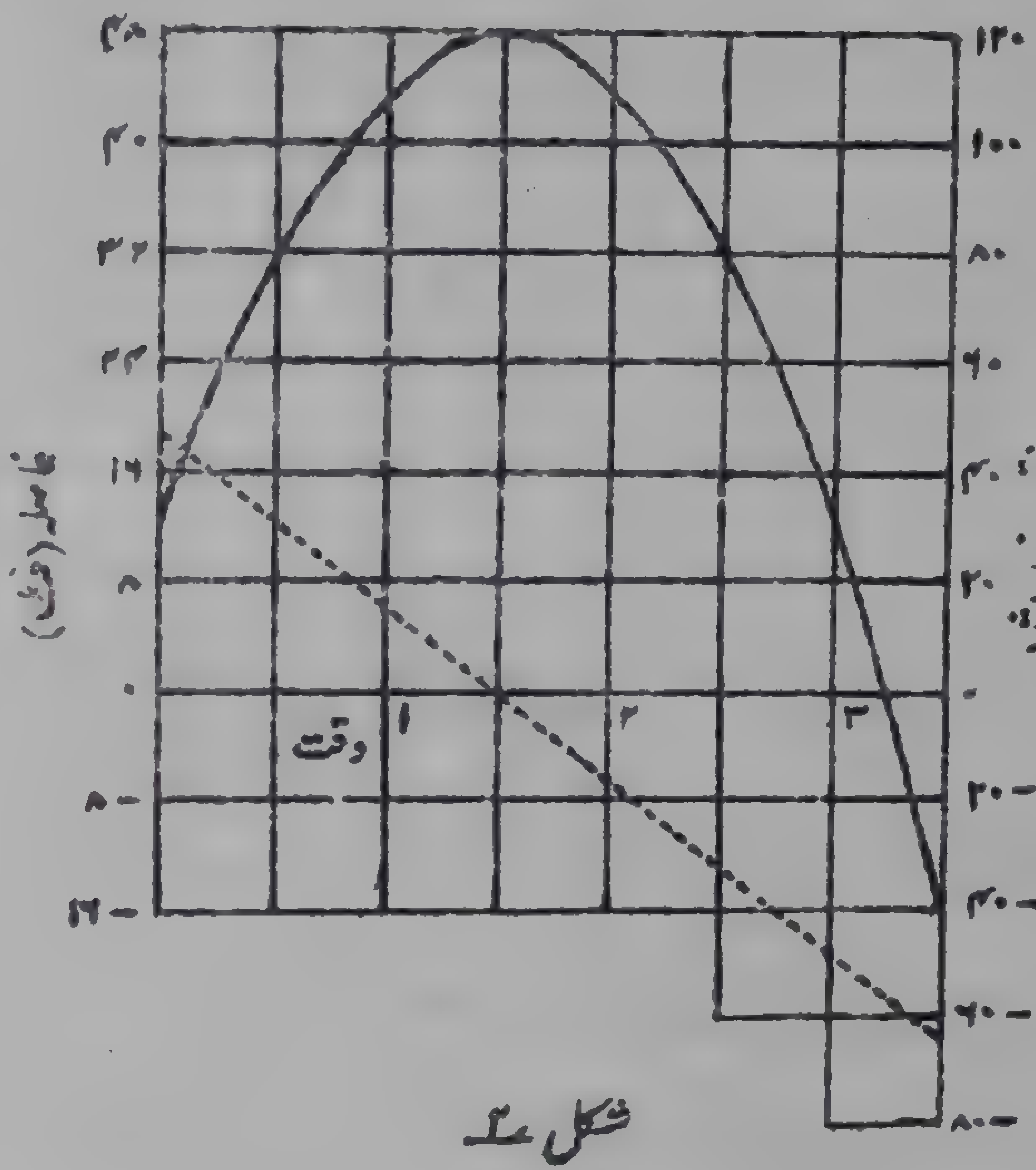
جس سے $\qquad \frac{1}{2}\,\text{ع}^2 + \text{ج لا} = \frac{1}{2}\,\text{ع}_0^2 + \text{ج لا}_0 \qquad$ .... (١٧)

یہ نتیجہ (١٤) سے بھی اخذ کیا جا سکتا ہے۔

اگر لمحوں ت_1، ت_2 پر محل اور رفتاریں علی الترتیب لا_1، لا_2 اور ع_1، ع_2 ہوں تو (١٢)
(١٤) سے ہمیں حاصل ہوگا۔

$$\frac{\text{لا}_2 - \text{لا}_1}{\text{ت}_2 - \text{ت}_1} = \text{ع}_0 - \frac{1}{2}\,\text{ج}\,(\text{ت}_1 + \text{ت}_2) = \frac{1}{2}\,(\text{ع}_1 + \text{ع}_2) \qquad \text{.....} \; (١٨)$$

اس سے ظاہر ہے کہ وقت کے کسی وقفہ میں اوسط رفتار اُس رفتار کے مساوی ہے جو وقفہ کے وسطی لمحہ پر ہے اور نیز وہ ابتدائی اور آخری رفتاروں کے حسابی اوسط کے مساوی بھی ہے۔ یہ اُمور اس واقعہ کے نتائج صریح ہیں کہ رفتار کا منحنی مستقیم ہے۔



شکل ۱۲

مثال ۲ ۔ اگر اسراع وقت کا ایک دائری تفاعل ہو جیسے

$$\frac{\text{فر}^{2}\text{لا}}{\text{فرت}^{2}} = \text{ف جم ن ت} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (19)$$

تو

$$\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}} = \frac{\text{ف}}{\text{ن}}\,\text{جب ن ت} + \text{ا} \text{، } \text{لا} = -\frac{\text{ف}}{\text{ن}^{2}}\,\text{جم ن ت} + \text{ا ت} + \text{ب} \qquad \ldots\ldots (20)$$

اگر ت = ۰ کے لیے لا = لا٠، لاَ = ع٠ تو ع٠ = ا ، $\text{لا}_{0} = -\frac{\text{ف}}{\text{ن}^{2}} + \text{ب}$

جس سے

$$\dot{\text{لا}} = \text{ع}_{0} + \frac{\text{ف}}{\text{ن}}\,\text{جب ن ت} \text{، } \text{لا} = \text{لا}_{0} + \text{ع}_{0}\text{ت} + \frac{\text{ف}}{\text{ن}^{2}}(\text{۱} - \text{جم ن ت}) \qquad \ldots (21)$$

(۱۲) **مثال ۳** ۔ اگر اسراع ہمیشہ حرکت کے خط میں ایک ثابت نقطہ (مبدا) کی جانب ہو اور ایسے بدلے جیسے اس نقطہ سے فاصلہ تو

$$\frac{\text{فر}^{2}\text{لا}}{\text{فرت}^{2}} = -\,\text{ن}^{2}\,\text{لا} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (22)$$

جہاں ن² ایک معلومہ مثبت مستقل ہے۔ منفی علامت اس لیے ضروری ہے کہ لاَ منفی ہے جب کہ لا مثبت ہو، اور اس کے بالعکس۔ ایک معادل شکل

$$\text{ع}\,\frac{\text{فرع}}{\text{فرلا}} = -\,\text{ن}^{2}\,\text{لا} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (23)$$

ہے۔ اس سے یا (۲۲) سے اُوپر کے طریقوں کی بموجب ہمیں حاصل ہوگا

$$\text{ع}^{2} = \text{ج} - \text{ن}^{2}\,\text{لا}^{2} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (24)$$

چونکہ ع² لازماً مثبت ہے اس لیے اختیاری مستقل ج مثبت ہونا چاہیے، چنانچہ ہم لکھ سکتے ہیں ج = ن² و² جہاں و اختیاری ہے۔ اس لیے

$$\left(\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}}\right)^{2} = \text{ن}^{2}(\text{و}^{2} - \text{لا}^{2}) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (25)$$

اس سے یہ واضح ہے کہ خواہ ابتدائی شرطیں کچھ ہی ہوں لا کی قیمت بعض خاص حدود ± و کے درمیان ہونی چاہیے۔ اس لیے ہم آزادی کے ساتھ

لا = و جم طہ .... (۲۶)

لکھ سکتے ہیں جہاں طہ ایک نیا متغیر ہے۔ (۲۵) میں درج کرنے پر ہمیں حاصل ہوگا

$$\left(\frac{\text{فرطہ}}{\text{فرت}}\right)^{2} = \text{ن}^{2} \text{ ، } \frac{\text{فرطہ}}{\text{فرت}} = \pm \text{ن} \qquad \ldots\ldots (۲۷)$$

اس لیے طہ = ± (ن ت + صہ) .... (۲۸)

جہاں صہ ایک دوسرا اختیاری مستقل ہے۔ اس لیے (۲۲) کا عام حل ہے

لا = و جم (ن ت + صہ) .... (۲۹)

جس میں دو اختیاری مستقل و اور صہ ہیں۔

اگر ہم

و جم صہ = ا ، و جب صہ = -ب .... (۳۰)

رکھیں تو متبادل شکل

لا = ا جم ن ت + ب جب ن ت .... (۳۱)

حاصل ہوتی ہے۔ اس کے برعکس ہم شکل (۳۱) سے جس میں ا اور ب اختیاری مستقل ہیں شکل (۲۹) پر پہنچ سکتے ہیں اور و اور صہ کی قیمتوں کو (۳۰) سے اخذ کرسکتے ہیں۔

تفرقی مساوات (۲۲) حرکیاتی سوالوں میں اس قدر کثرت سے وقوع پذیر ہوتی ہے کہ ہمیشہ کے لیے یہ یاد کرلینا بہتر ہوگا کہ اس کا عام حل (۲۹) یا (۳۱) ہے۔ بلاشبہ یہ واضح ہے (دفعہ ۲ مثال ۲) کہ ضابطہ (۲۹) یا (۳۱) فی الواقع (۲۲) کو پورا کرتے ہیں اور چونکہ دو اختیاری مستقل شریک ہیں اس لیے اس سے

کوئی ابتدائی مقررہ شرطیں پوری کرائی جا سکتی ہیں۔ مثلاً اگر ت = ۰ کے لیے لا = لا٫، لاَ = ع تو (۳۱) میں ہمیں حاصل ہوگا لا٫ = ا ، ع = ن ب، جس سے

لا = لا٫ جم ن ت + $\frac{\text{ع}}{\text{ن}}$ جیب ن ت .... (۳۲)

مثال ۴۔ اگر اسراع ہمیشہ مبداء سے پرے اور فاصلہ سے متناسب ہو تو تفرقی مساوات کی شکل (۱۴)

$\frac{\text{فر}^{۲}\text{لا}}{\text{فرت}^{۲}}$ = ن۲ لا .... (۳۳)

ہوگی۔ ہم دیکھ چکے ہیں (دفعہ ۲ مثال ۳) کہ یہ تفرقی مساوات

لا = ا و^ن ت + ب و^-ن ت .... (۳۴)

سے پوری ہوتی ہے اور چونکہ اس میں دو اختیاری مستقل ہیں اس لیے حل مکمل ہے۔ پس اگر ت = ۰ کے لیے لا = لا٫، لاَ = ع تو لا٫ = ا + ب، ع = ن(ا-ب)، جس سے زائدی تفاعلوں کی ترقیم میں۔

لا = لا٫ جزن ت + $\frac{\text{ع}}{\text{ن}}$ جبزن ت .... (۳۵)

اس نتیجہ کا مقابلہ (۳۲) سے کیا جا سکتا ہے۔

مثالیں (۱)

۱۔ ایک دخانی جہاز ایک دریا میں بہاؤ کے خلاف فاصلہ ل طے کرنے میں وقت ت۱ لیتا ہے اور واپس ہونے میں وقت ت۲۔ ثابت کرو کہ پانی کے لحاظ سے جہاز کی رفتار

$$\frac{\text{ل}(\text{ت}_۱+\text{ت}_۲)}{۲\,\text{ت}_۱\,\text{ت}_۲}$$

ہے۔

ثابت کرو کہ یہ رفتار اُس رفتار سے بڑی ہے جو اوقات کے حسابی اوسط سے محسوب کرنے پر حاصل ہوتی ہے۔

۲۔ یہ فرض کرتے ہوئے کہ جاذبہ کا اسراع چاند کے فاصلہ پر اُس اسراع کا $\frac{1}{3600}$ ہے جو زمین کی سطح پر ہے اس اسراع کو کیلو میتر اور گھنٹہ کی اکائیوں کی رقوم میں بیان کرو۔ [۳۵٫۳]

۳۔ اگر ایک ٹرین کا بڑے سے بڑا قابل قبول اسراع یا ابطاء ۳ فٹ فی ثانیہ فی ثانیہ ہو تو ایک اسٹیشن سے دُوسرے اسٹیشن تک جن کے درمیان فاصلہ ۱۰ میل ہے کم سے کم وقت معلوم کرو، جبکہ اعظم رفتار ۶۰ میل فی گھنٹہ ہے۔ [۱۰ منٹ ۲۹ ثانیہ]

۴۔ ایک ذرّہ کو انتصاباً اُوپر وار پھینکا گیا ہے اور وہ ت_1 ثانیوں کے بعد ارتفاع ف پر پہنچتا ہے اور پھر اسی ارتفاع پر ت_2 ثانیوں کے بعد واپس ہوتا ہے۔ ثابت کرو کہ

$$\text{ف} = \frac{1}{2}\,\text{ج}\,\text{ت}_1\,\text{ت}_2$$

اور یہ کہ ابتدائی رفتار

$$\frac{1}{2}\,\text{ج}\,(\text{ت}_1 + \text{ت}_2)$$

تھی

۵۔ ایک ٹرین کی رفتار مستقل شرح ع کے ساتھ صفر سے و تک بڑھتی ہے اور پھر کچھ وقفہ تک مستقل رہتی ہے اور بالآخر مستقل شرح ب کے ساتھ صفر تک گھٹ جاتی ہے۔ اگر کُل طے شدہ فاصلہ ل ہو تو ثابت کرو کہ کُل وقت جو صرف ہوا

$$\frac{\text{ل}}{\text{و}} + \frac{1}{2}\,\text{و}\left(\frac{1}{\text{ع}} + \frac{1}{\text{ب}}\right)$$

ہے۔

و کی کس قیمت کے لیے ت کم سے کم ہوگا؟

۶۔ ایک گولی ۱۵۰ فٹ کے دو متواتر فاصلے علی الترتیب ۰٫۷۵ ثانیہ اور ۰٫۷۶ ثانیہ میں طے کرتی ہے۔ اس کا ابطاء اور وہ رفتار معلوم کرو جو وسط مسافت میں ہے۔ [۳٫۴۴ فٹ\ثانیہ²، ۱۹۸ فٹ\ثانیہ]

۷۔ ایک گولی افقاً سفر کرتے ہوئے علی التواتر تین پتلے پردوں میں سے گذر جاتی ہے، جو مساوی فاصلوں و پر رکھے ہوئے ہیں۔ اگر ایک پردے سے دوسرے تک وقت $ت_۱$ اور دوسرے سے تیسرے تک وقت $ت_۲$ لگے تو ثابت کرو کہ ابطاء (مستقل فرض کر لیجیے) (۱۵)

$$\frac{۲و(ت_۲ - ت_۱)}{ت_۱ ت_۲ (ت_۱ + ت_۲)}$$

ہے اور وسطی پردے پر رفتار

$$\frac{و(ت_۱^۲ + ت_۲^۲)}{ت_۱ ت_۲ (ت_۱ + ت_۲)}$$

ہے۔

۸۔ اگر مستقل اسراع کے ساتھ حرکت کرنے والے ایک نقطہ کے محدد لمحوں $ت_۱$، $ت_۲$، $ت_۳$ پر علی الترتیب $لا_۱$، $لا_۲$، $لا_۳$ ہوں تو ثابت کرو کہ اس کا اسراع

$$\frac{۲\{(لا_۲ - لا_۳)ت_۱ + (لا_۳ - لا_۱)ت_۲ + (لا_۱ - لا_۲)ت_۳\}}{(ت_۲ - ت_۳)(ت_۳ - ت_۱)(ت_۱ - ت_۲)}$$

ہے۔

۹۔ اگر ایک نقطہ مستقل اسراع کے ساتھ حرکت کرے تو ثابت کرو کہ کسی فاصلہ کے اوپر رفتار کا فاصلائی اوسط

$$\frac{۲}{۳}\;\frac{ع_۱^۲ + ع_۱ ع_۲ + ع_۲^۲}{ع_۱ + ع_۲}$$

ہے جہاں $ع_۱$ اور $ع_۲$ ابتدائی اور آخری رفتاریں ہیں۔
یہ زمانی اوسط سے بڑا ہے یا چھوٹا؟

۱۰۔ ترسیماً یا کسی اور طرح ثابت کرو کہ حسب ذیل تین مقداریں
(۱) وقت کے ایک دیے ہوئے وقفہ میں اوسط رفتار،

Space لہ	Time تہ

(۲) ابتدائی اور آخری رفتاروں کا اوسط حسابی'

(۳) دقیقہ کے وسطی لمحہ پر رفتار

بالعموم الگ الگ ہوتی ہیں۔

ثابت کرو کہ ان میں سے کوئی دو مقداریں ہمیشہ مساوی نہیں ہو سکتیں اِلّا آنکہ اسراع مستقل ہو۔

۱۱۔ اگر ایک متحرک نقطہ کے طے شدہ فاصلہ کو فصلہ اور رفتار کو مُعیّن مان کر ایک منحنی مرتسم کیا جائے تو ثابت کرو کہ اسراع زیر عماد سے تعبیر ہوگا۔

مستقل اسراع کی صورت لے کر اس کی توضیح کرو۔

۱۲۔ اگر وقت (ت) کو محل (لا) کا ایک تفاعل سمجھا جائے تو ثابت کرو کہ ابطاء

$$\frac{\text{۳}_6\text{ فرات}}{\text{فر لا}^2}$$

ہے جہاں ع رفتار ہے۔

۱۳۔ اگر ت، لا کا ایک دو درجی تفاعل ہو تو ثابت کرو کہ اسراع، ایک ثابت نقطہ سے فاصلہ کے مکعب کے بالعکس بدلتا ہے۔

۱۴۔ اگر لا^۲، ایک دو درجی تفاعل، ہو ت کا، تو ثابت کرو کہ اسراع، $\frac{1}{\text{لا}^3}$ کے متناسب ہے، اِلّا ایک خاص صورت کے۔

(۱۶) ۱۵۔ اگر ایک نقطہ مستقل رفتار سے ایک مکافی مرتسم کرے تو ثابت کرو کہ مُعیّن کے پائین کا اسراع، مرتب سے فاصلہ کے مربع کے بالعکس بدلتا ہے۔

۱۶۔ ایک نقطہ ف مستقل رفتار کے ساتھ ایک خطِ مستقیم مرتسم کرتا ہے اور ایک ثابت مرکز و سے کھنچے ہوئے ایک ثابت خطِ مستقیم پر ف کا ظل ق ہے۔ ثابت کرو کہ ق اپنا خطِ مستقیم ایک ایسے اسراع سے مرتسم کرتا ہے جو اس پر کے ایک ثابت نقطہ سے فاصلہ کے مکعب کے متناسب ہے، اِلّا ایک خاص صورت کے۔

زیر بحث ثابت نقطہ کو ہندسی طور پر کس طرح معلوم کیا جاسکتا ہے؟

۱۷۔ ثابت کرو کہ ایک نقطہ اس طرح حرکت نہیں کرسکتا کہ اُس کی رفتار

اُس فاصلہ کے متناسب ہو جو اُس نے سکون سے طے کیا ہے۔

کیا وہ اس طرح حرکت کر سکتا ہے کہ اس کی رفتار فاصلہ کے جذر المربع کے متناسب ہو؟

۱۸۔ اگر ایک نقطہ اس طرح حرکت کرے کہ اُس کی رفتار ایک ثابت نقطہ سے جس کے وہ قریب آ رہا ہے فاصلہ کے متناسب ہے تو ثابت کرو کہ وہ کسی محدود وقت میں ٹھیک ثابت نقطہ پر نہیں پہنچ سکتا۔

۱۹۔ ایک ہوائی جہاز جس کے انجنوں کو بند کر دیا گیا ہے اُفقاً حرکت کر رہا ہے، اس کی رفتار کا وقت کے متواتر لمحوں پر مشاہدہ کیا گیا۔ رفتار کے متکافی کو وقت کے مقابلہ میں مرتسم کیا گیا تو معلوم ہوا کہ ترسیم ایک خطِ مستقیم ہے۔ ثابت کرو کہ ابطاء رفتار کے مربع کے متناسب تھا۔

رفتار اور طے شدہ فاصلہ کے درمیان جو رشتہ ہے اس کی متناظر ترسیم کیا ہو گی؟

۲۰۔ ایک کرینک (Crank) و ق، و کے گرد مستقل زاوئی رفتار سہ سے گردش کرتا ہے اور ایک واصل ڈنڈے ق ف کو اس کے ساتھ ق پر قبضہ کے ذریعہ جوڑا گیا ہے اور ف ایک خطِ مستقیم میں جو و میں سے گزرتا ہے حرکت کرنے پر مجبور ہے۔ اگر و ق = ا، ق ف = ل، زاویہ ق و ف = ط تو ثابت کرو کہ ف کا اسراع تقریباً

$$\text{سہ}^2\,\text{ا}\ \text{جم}\ \text{ط} + \frac{\text{سہ}^2\,\text{ا}^2}{\text{ل}}\ \text{جم}\ ۲\,\text{ط}$$

ہے اگر $\frac{\text{ا}}{\text{ل}}$ چھوٹا ہو۔

دوسرا باب

خطی حرکت کی حرکیات

(۱۷)

۶- حرکیاتی اصول- تجاذبی اکائیاں

علم حرکت کا مقصد جسموں کی اس حرکت کی تحقیق کرنا ہے جو اُن پر عمل کرنے والی قوتوں کی وجہ سے پیدا ہوں- اس لیے طبعی مفروضوں کا کوئی نظام جن کا تجربہ کے ساتھ مقابلہ سے بالآخر جایز ہونا ثابت ہوسکے اساس کے طور پر ضروری ہے- فی الحال ہم خاص کر اُن صورتوں پر غور کرینگے جن میں حرکت اور قوتیں ایک ہی خطِ مستقیم میں ہوتی ہیں-

اِس موضوع پر مختلف نقاط نگاہ سے بحث کی جاسکتی ہے اور اس لیے اساسی مفروضوں کو مختلف طریقوں پر قایم کیا جاسکتا ہے لیکن یہ فرق حقیقت میں صرف ظاہری ہونے چاہییں اور جب اُن کا کسی حقیقی حرکیاتی مسئلہ پر اطلاق کیا جائے تو اُن سے وہی نتیجے حاصل ہونے چاہییں- دفعہ ہذا اور دفعہ آئندہ میں دو جُداگانہ نظاموں کی صراحت کی گئی ہے- دونوں نظاموں کی ابتدا اِس طرح ہوئی ہے کہ "قوت" کا تصوّر ابتدائی تخیل ہے لیکن اِن میں اُن اصولوں کا اختلاف ہے جن کے لحاظ سے مختلف قوتوں کا مقابلہ کیا گیا ہے-

ہر صورت میں پہلا مفروضہ جو ہم اختیار کرینگے وہی ہے جو نیوٹن کے پہلے کلیہ[2] میں شامل ہے اور وہ یہ ہے کہ کوئی مادی ذرہ[1] اپنی سکون کی حالت میں یا ایک خطِ مستقیم میں مستقل رفتار سے حرکت کرنے کی حالت میں قائم رہتا ہے تاوقتیکہ وہ اپنی اس حالت کو قوت کے عمل سے بدلنے پر مجبور نہ ہوجائے۔ بالفاظ دیگر اسراع نتیجہ ہے قوت کا اور قوت کے ساتھ ختم ہوتا ہے۔ اس کو بعض اوقات "جمود کا کلیہ" کہتے ہیں۔

(۱۸) ان میں سے پہلا نظام جس کی صراحت اب کی جائیگی خالص ارضی اور مقامی نقطۂ خیال سے شروع ہوتا ہے اور اس میں جاذب کی رقوم میں قوت کی پیمائش کا وہ نظام اختیار کیا جاتا ہے جس سے ہم سکونیات میں واقف ہوچکے ہیں۔ وہ طبیعی مفروضہ جو ہم اب اختیار کرینگے یہ ہے کہ اسراع جو کسی دیے ہوئے جسم میں کسی قوت کے عمل سے پیدا ہوتا ہے اس قوت کی مقدار کے متناسب ہوتا ہے۔ اس لیے اُس کو معلومہ اسراع (ج) کے ساتھ مقابلہ کرکے معلوم کیا جاسکتا ہے جو اُسی جسم میں پیدا ہوتا ہے جبکہ وہ خود اپنے جاذبہ کے تحت آزادانہ گر رہا ہو۔ یہ واضح ہے کہ جمود کے کلیہ کی مطابقت میں جو مفروضات قایم کیے جاسکتے ہیں ان میں مفروضۂ بالا سادہ ترین ہے اگرچہ اس کا جایز ہونا اس کی سادگی پر نہیں بلکہ تجربہ کے ساتھ اس کی موافقت پر مبنی ہے۔

کسی جسم کے "وزن" اور اس کے "جاذبہ" کے درمیان جو فرق ہے اس کو یہاں سمجھا دینا موجب سہولت ہوگا۔ جب ہم یہ کہتے ہیں کہ

---

[1] لفظ "ذرہ" کو جس مفہوم میں استعمال کیا گیا ہے اس کے لیے دیکھو مصنف کی کتاب سکونیات دفعہ ۹

[2] 'Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus illud a viribus impressis cogitur statum suum mutare.'

(*Philosophiae naturalis principia mathematica,* London, 1687.

The law of inertia dates from Galileo(1638).

ایک جسم کا ترازو سے معلوم کردہ وزن ، و ہے تو اس کا یہ مطلب ہے کہ وہ نیچے وار دباؤ جو جسم اپنے سہاروں پر سکون کی حالت میں ڈالتا ہے اُس دباؤ کے ساتھ نسبت و رکھتا ہے جو اُنھی حالات کے تحت اور اس لیے اُسی نواح میں معیاری پونڈ یا کیلوگرام یا جو کوئی اکائی اختیار کی گئی ہو اپنے سہاروں پر ڈالتی ہے[1] پس اس تعریف کے بموجب کسی جسم کا "وزن" ایک عددی مستقل ہے جو اس کے ساتھ وابستہ رہتا ہے، وہ تمام مقاموں پر ایک ہی رہتا ہے کیونکہ اگر جاذبہ کی حدت میں کوئی تغیر ہو تو اس کا اثر جسم اور معیارہ دونوں پر یکساں ہوگا۔

کسی جسم کے "جاذبہ" سے زمین کی وہ نیچے وار کھنچاؤ مُراد ہوتی ہے جو زمین اس پر عائد کرتی ہے۔ یہ جاذبہ سکونیاتی اصولوں کی رو سے اُس دباؤ کے مساوی ہوتا ہے جو جسم سکون کی حالت میں اپنے سہاروں پر ڈالتا ہے لیکن بلاشبہ دونوں میں امتیاز قائم کرنا چاہیے۔ یہ معلوم ہوا ہے کہ جاذبہ سطح سمندر کے اُوپر ارتفاع کے ساتھ اور نیز عرض بلد کے ساتھ قدرے متغیر ہوتا ہے۔

اُوپر کے قایم شدہ اصول سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ اگر ع وہ اسراع ہو جو وزن و کے ایک جسم میں ایک قوت ق سے پیدا ہوتا ہے (یعنے ایسی قوت سے جو وزن ق کے جاذبہ کے مساوی ہے) تو ہمیں حاصل ہوگا

$$\frac{ع}{ج} = \frac{ق}{و} \qquad \text{..............} (1)$$

یہ مساوات ہمارے موجودہ نقطۂ نظر کی رو سے **حرکیات** کی اساسی مساوات ہے۔

اس طرح وہ قوت جو وزن و کے ایک جسم میں اسراع ع پیدا کرنے (۱۹)

---

[1] لفظ "وزن" کو جس مفہوم میں یہاں عارضی طور پر استعمال کیا گیا ہے حقیقت میں اس کے اُن متعدد معنوں میں سے صرف ایک ہے جو معمولی بول چال میں لیے جاتے ہیں۔ دیکھو دفعہ ۸۔

کے لیے مطلوب ہوتی ہے

$$ق = \frac{و}{ج} \times ع \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (۲)$$

ہے۔ چنانچہ جزو ضربی $\frac{و}{ج}$ سے جسم کے "جمود" کی پیمایش ہوتی ہے یعنے سستی کے اُس درجہ کی جس کے ساتھ جسم قوت کے عمل سے مغلوب ہوتا ہے۔ اب یہ ایک عام روایت ہے کہ جمود کو جب قابل پیمایش تصور کیا جاتا ہے تو اصطلاح "کمیت" سے موسوم کیا جاسکتا ہے۔ اس لیے موجودہ حساب سے جسم کی کمیّت $\frac{و}{ج}$ ہے۔

اُوپر کا طریق کار سیدھا سادہ اور صاف ہے اور کامل طور پر صحیح ہے اگر علامتوں کے مفہوموں کا احتیاط کے ساتھ لحاظ رکھا جائے، لیکن اس پر یہ اعتراض وارد ہوتا ہے کہ قوت کی اکائی جو اس میں مضمر ہے یعنے معیاری جسم (پونڈ، کیلو میٹر، گرام، وغیرہ) پر زمین کی کشش، مقام بہ مقام قدرے متغیر ہوتی ہے۔ پس اگر مختلف مقاموں پر کی ہوئی پیمایشوں کا صحت کے ساتھ مقابلہ کرنا ہو تو اس تغیر کی وجہ سے تصحیح کرنی پڑیگی۔ اس نظام میں کسی جسم کی "کمیّت" کی عددی قیمت بھی ج کے تغیر کی وجہ سے متغیر ہوتی ہے۔

سطح زمین پر جاذبہ کی حدّت میں کُل تغیر صرف $\frac{۱}{۲}$ فی صد ہے اور اس قدر خفیف تغیر بیشتر عملی مقاصد میں بالکل غیر اہم ہے۔ مثلاً ایک انجنیر کو مادی اشیاء کی طاقت، رگڑ کی قدر، وغیرہ جیسے جن عددی معطیات پر بھروسہ کرنا پڑتا ہے وہ بالعموم ایسے ہوتے ہیں کہ اُن میں اس سے بہت زیادہ تغیر یا ابہام پایا جاتا ہے۔ یہی سبب ہے کہ انجنیر قوت کی پیمایش کے تجاذبی نظام کو بلا تکلف اختیار کرتے ہیں حتیٰ کہ اُن حرکیاتی سوالوں میں بھی جن میں جاذبہ سے راست تعلق نہیں ہوتا۔

لیکن جیسا کہ بہت سی سائنسی پیمائشوں میں ہوتا ہے جب زیادہ صحت مطلوب اور ممکن ہو تو یہ ضروری ہو جاتا ہے کہ زمین کی سطح پر کے کسی خاص مقام کو معیار قرار دے کر وہاں کے جاذبہ کی رقوم میں نتیجوں کو بیان کیا جائے یا یہ کہ کسی ایسے کم اختیاری حرکیاتی نظام سے استعانت کی جائے جو ارضی یا دوسرے جاذبہ پر منحصر نہ ہو۔ ثانی الذکر طریقہ صریحاً قابل ترجیح ہے اور علم ہیئت کے سوالوں پر اِس کے اطلاق میں تو تقریباً لازمی ہے۔ چنانچہ ہم اگلے دفعہ میں اساسی حرکیاتی اصولوں کا ایک دوسرا بیان دینگے اور اس سے قوت کی پیمائش کا جو "مطلق" نظام اخذ ہوتا ہے اُس کی تشریح کرینگے۔

(۲۰) ## ۷۔ حرکیات کا مطلق نظام

اِس نظام کی تشریح و تفہیم کے لیے کامل تجربوں[ے] کے ایک سلسلہ سے استفادہ کرنے میں سہولت ہوگی۔ فرض کرو کہ ہمارے پاس جاذبہ کے غیر تابع، بعض ایسے ذریعے، موجود ہیں جن سے ہم ایک مستقل قوت لگا سکتے ہیں اور اس کے مستقل ہونے کی تصدیق کر سکتے ہیں مثلاً ایک کمانی دار قوت پیما[ے] جس کی کمانی ایک مستقل حد تک بڑھتی یا سکڑتی ہے، لیکن ہم کسی ایسے درجہ دار پیمانہ کو پہلے سے ہی فرض نہیں کر لیتے جس سے مختلف قوتوں کا عددی طور پر مقابلہ ہو سکے[له]

پہلا تجرباتی نتیجہ جس کا اِس طریقے سے قائم ہونا فرض کیا جا سکتا ہے یہ ہے کہ ایک جسم پر عمل کرنے والی ایک مستقل قوت ایک مستقل اسراع پیدا کرتی ہے یعنے رفتار میں مساوی وقتوں میں مساوی مقداروں سے تبدیلی ہوتی ہے۔

ے Ideal experiments   ے Spring-dynamometer

له طریقہ تشریح جو یہاں اختیار کیا گیا ہے اصل میں وہی ہے جس کو میکسویل نے اپنی کتاب "Matter and Motion" میں دیا ہے۔ خیالات کا تسلسل نیوٹن کے تسلسل سے قدرے مختلف ہے لیکن اس سے آخری نتیجوں پر کوئی اثر نہیں پڑتا۔

یہاں پھر یہ کہنا ضروری ہے کہ اگر ایک ہی قوت کو علی التواتر مختلف جسموں پر عاید کیا جائے تو بالعموم مختلف درجوں کے اسراع پیدا ہونگے۔ اِس اختلاف کا سبب وہ فرق ہیں جو مختلف جسموں کے "جمود" یا "کمیّت" میں ہوتے ہیں۔ دو جسموں کو حرکیاتی طور پر معادل اور ان کی کمیتوں کو "مساوی" اُس وقت کہا جاتا ہے جبکہ ان پر ایک ہی قوت لگانے سے ان میں مساوی وقتوں میں مساوی رفتاریں پیدا ہوں۔ اس لیے کمیّت کا معیار یا اکائی، مادی شئے کے کسی مخصوص ٹکڑے کی کمیّت ہونی چاہیے جس کو اولاً اختیاری طور پر منتخب کیا گیا ہو مثلاً معیاری پونڈ یا کیلوگرام۔ پس ایک جسم کی کمیّت م (م ایک صحیح عدد) اُس وقت کہی جائیگی جبکہ وہ م حصوں میں تقسیم ہو سکے جن میں سے ہر ایک حرکیاتی طور پر اکائی کے معادل ہو۔ اسی طرح اگر اکائی کمیّت کو حرکیاتی طور پر معادل ن ٹکڑوں میں تقسیم کیا جائے تو ان میں سے ہر ٹکڑے کی کمیّت کو $\frac{1}{ن}$ کہا جائیگا۔ یہ واضح ہے کہ اس عمل سے کمیّت کا ایک مکمل پیمانہ بنایا جا سکتا ہے اور کسی جسم کی کمیّت کو ایک عددی مقدار سے بیان کیا جا سکتا ہے۔

دُوسرا بیان یہ ہے کہ وہ اسراع جو ایک ہی قوت سے مختلف جسموں میں پیدا ہوتے ہیں متعلقہ کمیتوں (حسب تعریف بالا) کے بالعکس متناسب ہوتے ہیں۔ اگر کسی جسم کی کمیّت کو اس کی رفتار سے ضرب دے کر حاصل ضرب کو اصطلاح "معیار حرکت" سے موسوم کیا جائے تو ہم یہ کہہ سکتے ہیں کہ ایک دی ہوئی قوت ایک ہی وقت میں ہمیشہ ایک ہی معیار حرکت پیدا کریگی خواہ یہ قوت کسی جسم پر عمل کرے۔

(۲۱) پس معیار حرکت جو اکائی وقت میں پیدا ہوتا ہے کسی قوت کی ایک ناقابلِ تغیر خصوصیت ہے اور اس سے وہ تمام اُمور بیان ہو جاتے ہیں جن کا معلوم ہونا حرکیاتی نقطۂ نظر سے ضروری ہے۔ اس لیے اُسی کو قوت کے ناپ کے طور پر اختیار کیا جاتا ہے۔ اس لحاظ سے اکائی قوت وہ ہے جو اکائی وقت میں اکائی معیار حرکت پیدا کرے یا اکائی کمیّت میں

اکائی اسراع پیدا کرے۔ اس کو "مطلق" اکائی کہتے ہیں کیونکہ وہ تمام مقامات اور تمام اوقات پر وہی ہوتی ہے۔

پس اگر ایک قوت کا مطلق ناپ ف ہو تو اسراع عہ جو وہ کمیت م میں پیدا کرتی ہے مساوات

م عہ = ف .... (۱)

سے معلوم ہوگا۔

یہاں یہ امر مشاہدہ طلب ہے کہ اس تشریح میں جاذبہ کا کہیں ذکر نہیں ہے۔ اُوپر کے تصوری تجربوں کے متعلق یہ فرض کیا جا سکتا ہے کہ وہ فضاء کے کسی بعید علاقہ میں جہاں جاذبہ ناقابلِ قدر ہے عمل میں لائے گئے ہیں، یا لارڈ کیلون٭ کی اختیار کردہ تمثیل کے بموجب ہم یہ خیال کر سکتے ہیں کہ یہ تجربے زمین کے اندر ایک مرکزی کروی خول میں کیے گئے ہیں۔ ایسے کسی مرکزی مقام پر تحقیق کرنے میں دیگر زحمتیں خواہ کچھ ہی ہوں کشش ثقل کے نظریہ سے یہ یقین پیدا ہوتا ہے کہ تجاذب تجربوں کی سادگی کو ضرر پہنچانے کے لیے دخل انداز نہیں ہوگا۔

یہ کہنا کچھ زیادہ ضروری نہیں ہے کہ وہ حقیقی شہادت جس سے ہمارے اساسی اصولوں کی صحت کا یقین ہوتا ہے بالواسطہ ہے۔ اُن مختلف بیانوں کا جو اُوپر دیے گئے ہیں الگ الگ امتحان نہیں کیا جا سکتا بلکہ صرف بحیثیت مجموعی۔ سب سے زیادہ اہم اور نمایاں تصدیق مشاہدہ کے ساتھ طبیعی علم ہیئت کی پیشین گوئیوں کی مطابقت سے بہم پہنچتی ہے جن کا انحصار محض قوانینِ حرکت اور نیوٹن کے کلیہ تجاذب پر ہوتا ہے۔

۸۔ جاذبہ پر اطلاق۔

اگر ہم پچھلے اصولوں کو معمولی ارضی جاذبہ کی صورت پر استعمال کریں تو

٭ Lord Kelvin.

یہ معلوم ہوگا کہ کمیّت م پر زمین کی کشش مطلق ناپ میں م ج ہے اور یہ م ج وہ معیار حرکت ہے جو جسم میں فی ثانیہ پیدا ہوتا ہے جبکہ وہ آزادانہ گر رہا ہو۔ چونکہ ایک دیے ہوئے مقام پر ج کی قیمت تمام جسموں کے لیے وہی ہوتی ہے اس لیے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ مختلف جسموں پر زمین کی کششیں متعلقہ کمیّتوں کے متناسب ہوتی ہیں۔ پس اُن جسموں کے متعلق جن کے ترازو سے حاصل شدہ وزن مساوی ہوں یہ کہا جا سکتا ہے کہ اُن کی کمیّتیں حرکیاتی مفہوم میں مساوی ہیں۔ اس سے کمیّتوں کا مقابلہ کرنے کے لیے عملاً سب سے زیادہ سہولت بخش طریقہ حاصل ہوتا ہے۔ (۲۲)

نیز یہ نتیجہ بھی برآمد ہوتا ہے کہ قوت کی پیمایش کے یہ دو نظام یعنی مُطلق اور تجاذبی اس لحاظ سے مطابق ہیں کہ کسی دو دی ہوئی قوتوں کی نسبت دونوں نظاموں میں عدداً وہی ہوتی ہے۔ بلا شبہ ہم یہ کہہ سکتے ہیں کہ اِن دو نظاموں کی اساسی مساواتیں یعنی

م ع = ف .... (۱)

اور

و ع = ق ج .... (۲)

فی الحقیقت معادل ہیں اگرچہ کہ مستعملہ اکائیاں مختلف ہیں۔ کیونکہ اگر اِن کو ایک ہی مسئلہ پر استعمال کیا جائے تو م عدداً و کے مساوی ہے اور ف ایک ایسے جسم کے جاذبہ کا مطلق ناپ ہے جس کی کمیّت عدداً ق کے مساوی ہے اور اس لیے وہ ق ج کے مساوی ہے۔

اس کتاب کے بقیہ حصّہ میں مطلق نظام استعمال ہوگا کیونکہ وہ عام اطلاق کے لیے سب سے زیادہ سہولت بخش ہے اور اس لیے حرکت کی مساواتیں جن کو ہم استعمال کرینگے نمونہ (۱) کی ہونگی۔ اگر فٹ، پونڈ اور ثانیہ کو علی الترتیب طول، کمیّت اور وقت کی اکائیوں کے طور پر اختیار کیا جائے تو قوت کی مطلق اکائی ایسی ہوگی کہ اگر وہ ایک پونڈ کی کمیّت پر ایک ثانیہ تک عمل کرے تو اُس میں ایک فٹ فی ثانیہ کی رفتار پیدا کر دے۔ اِس اکائی کو بعض اوقات

"پونڈل"، کہتے ہیں لیکن اِس نام کا استعمال کم ہوتا جا رہا ہے۔ یہ ۱۸۰۵ء سنتی میٹر، گرام، اور ثانیہ کو اساسی اکائیوں کے طور پر علماء طبیعیات نے اختیار کیا ہے۔ اِس نظام[1] میں قوت کی مطلق اکائی "ڈائین" کہلاتی ہے۔

معمولی جاذبہ ارض کی رقوم میں پونڈل ایک پونڈ کے تقریباً $\frac{1}{32.20}$ کے جاذبہ کے مساوی ہے یا تقریباً نصف اونس کے جاذبہ کے اور ڈائین ایک گرام کے تقریباً $\frac{1}{981}$ کے جاذبہ کے یا تقریباً ایک ملی گرام کے جاذبہ کے مساوی ہے۔

حرکیات کی کسی کتاب میں لفظی سوالات سے بچنا تقریباً محال ہے۔ اس لیے **علم الحیل** میں لفظ "قوت" نے جو خاص مفہوم اختیار کیا ہے اُس کو اچھی طرح ذہن نشین کرنا ازبس ضروری ہے۔ یہ شاید بدقسمتی ہے کہ کوئی زیادہ فنی اصطلاح جاری نہیں ہوسکی اور ایک ایسا لفظ اختیار کرنا پڑا جس کے عام زبان میں مختلف معنے[2] لیے جاتے ہیں۔ لیکن اس کا استعمال ایک طویل (۲۳)
عرصہ سے جاری ہے اور اس لیے اس کو قبول کرنے کے سوا چارہ نہیں۔

لفظ "وزن" کے استعمال پر ایسا اتفاق رائے موجود نہیں ہے اگرچہ اس پر بہت کچھ بحث مباحثہ ہو چکا ہے۔ عام اور معمولی بول چال میں یہ لفظ مختلف مفہوموں میں استعمال ہوتا ہے۔ مثلاً اِس کے معنے اُس حقیقی سکونیاتی **دباؤ** کے ہوسکتے ہیں جو ایک جسم اپنے سہاروں پر ڈالتا ہے جیساکہ ہم ایک بوجھ کا "وزن" کہتے ہیں۔ اس سے وہ **نسبت** بھی

---

[1] اس کو اختصاراً س۔گ۔ث نظام کہا جائیگا، انگریزی میں C.G.S. System. کہتے ہیں۔

[2] اس کے لیے لاطینی لفظ (Vis) ہے۔ اس لفظ کو نیوٹن نے بالکل عام معنوں میں استعمال کیا ہے اور اس کے خاص مفہوموں کو اس کے ساتھ مطلوبہ صفتیں لگاکر واضح کیا ہے۔ چنانچہ ہمیں Vis motrix, Vis acceleratrix, Vis inertiae, جیسے مرکب الفاظ ملتے ہیں جن میں سے صرف پہلے جز کے وہ خاص معنے ہیں جو اب لفظ "قوت" سے مراد لیے جاتے ہیں۔

(دفعہ ۶ کی طرح) مراد ہو سکتی ہے جو اس دباؤ اور ایک پونڈ یا ایک ٹن کے دباؤ میں ہے۔ اس کو اکثر "کمیت" کے مفہوم میں استعمال کیا جاتا ہے مثلاً جب ہم مرچی کا وزن کہتے ہیں۔ نیز جب ہم ایک ضرب کا "وزن" کہتے ہیں تو اس سے مراد (مبہم طور پر) معیار حرکت ہوتا ہے۔ صرف ایک مفہوم جس میں یہ لفظ عام بول چال میں ہرگز استعمال نہیں کیا جاتا وہ جسم پر تجاذبی کشش کا ہے۔ یہ فی الواقع اس سکونیاتی دباؤ کے مساوی ہے جس کا ذکر اوپر آچکا ہے لیکن اس کے مماثل نہیں ہے، وہ ایک ایسی قوت ہے جو ایک جسم پر لگائی جاتی ہے نہ کہ وہ جو جسم سے لگائی جاتی ہے۔ بدقسمتی سے اس کا یہ نیا اور عجیب مفہوم ٹھیک وہی ہے جو بعض مشہور مصنف علم الحیل میں لفظ "وزن" سے مخصوص کرنا چاہتے ہیں۔ اس کتاب کے مصنف کی رائے میں اس قدر عام لفظ کو کوئی خاص معنے دینے کی کوشش نہ کرنا ہی بہتر ہوگا، بلکہ اس کو آزادانہ کسی مفہوم میں جو سہولت بخش سمجھا جائے استعمال کیا جا سکتا ہے بشرطیکہ غلط فہمی کا اندیشہ نہ ہو۔ لیکن جب ایسا اندیشہ ہو تو کوئی دوسری اصطلاح مثلاً "کمیت" یا "جاذبہ" اس مفہوم کو ٹھیک طور پر ظاہر کرنے کے لیے استعمال کی جا سکتی ہے جو ہم اس سے لینا چاہتے ہیں۔

۹۔ حرکت کی عام مساوات۔ دھکّا

اب فرض کرو کہ کمیت م کا ایک ذرہ جو ایک خطِ مستقیم میں حرکت کر رہا ہے ایک قوت ل کے تحت ہے جو اسی خطِ مستقیم میں ہے اور مستقل یا متغیر ہو سکتی ہے۔ چونکہ ل سے وہ معیارِ حرکت تعبیر ہوتا ہے جو اکائی وقت میں پیدا ہوتا اگر قوت اپنی اصلی قیمت پر مستقل رہتی اس لیے صغیر وقت مف ت میں پیدا شدہ معیارِ حرکت ل مف ت ہے۔ اس لیے اگر لمحہ ت پر رفتار ع ہے تو

$$\text{مف (م ع) = ل مف ت}$$

یا

$$\text{م}\ \frac{\text{فرع}}{\text{فرت}} = \text{ق} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

اگر ذرّہ کا فصلہ لا ہو جس کو خط کے کسی ثابت نقطہ سے پیمایش کیا گیا ہو تو $\text{ع} = \frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}}$ اور اس لیے

$$\text{م}\ \frac{\text{فر}^{2}\text{لا}}{\text{فرت}^{2}} = \text{ق} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

حاصل ضرب ق مف ت کو وقت مف ت میں قوت کا ”دھکّا“ کہتے ہیں۔ وقفہ ت٠ تا ت١ میں ”کُل“ دھکّے کی تعریف تکملہ

$$\int_{\text{ت}_0}^{\text{ت}_1} \text{ق فرت} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

سے کی جاتی ہے۔ اس کو ترسیماً ایک منحنی سے تعبیر کیا جا سکتا ہے جو ت کو فصلہ اور ق کو معیّن مان کر کھینچا گیا ہو۔ تب دھکّا اُس رقبہ سے تعبیر ہوگا جس پر سے معیّن گذرتا ہے۔

اگر ہم مساوات (۱) کو ت کے لحاظ سے حدود ت٠ اور ت١ کے درمیان تکمل کریں تو ہمیں حاصل ہوگا

$$\text{م ع}_1 - \text{م ع}_0 = \int_{\text{ت}_0}^{\text{ت}_1} \text{ق فرت} \quad \ldots\ldots\ldots (4)$$

اس لیے وقت کے کسی وقفہ میں معیارِ حرکت کا اضافہ دھکّے کے مساوی ہوتا ہے۔

ایک مستقل قوت کے تحت خطی حرکت کا نظریہ علم حرکت کی ابتدائی کتابوں میں کافی طور پر واضح کیا جاتا ہے۔ اس لیے ہم چند ایسی اہم صورتوں پر غور کرینگے جن میں قوت ق متغیر ہوتی ہے۔

۱۰۔ سادہ موسیقی حرکت۔

ایک ذرہ ایک ثابت نقطہ و کی جانب جو خط حرکت میں ہے ایک ایسی قوت سے کھینچا جا رہا ہے جو اس نقطہ سے فاصلہ کے متناسب ہے۔ یہ صورت اہم ہے کیونکہ وہ یک درجۂ آزادی والے ایک حرکیاتی نظام کی اس عام ترین صورت کو تعبیر کرتی ہے جو ایک قایم توازن کے محل کے گرد اہتزاز کرتا ہے۔

اگر اکائی فاصلہ پر کی قوت ک سے تعبیر ہو تو فاصلہ لا پر قوت ۔ک لا ہوگی، علامت ہمیشہ لا کی علامت کے خلاف ہوگی۔ چنانچہ تفرقی مساوات

$$\text{م}\,\frac{\text{فر}^{2}\text{لا}}{\text{فرت}^{2}} = -\text{ک لا} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

ہے۔ اگر ۲۵

$$\text{ن}^{2} = \frac{\text{ک}}{\text{م}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

رکھا جائے تو حل، دفعہ ۵ مثال ۳ کے مطابق

$$\text{لا} = \text{ا جم ن ت} + \text{ب جب ن ت} \quad \cdots\cdots (3)$$

یا

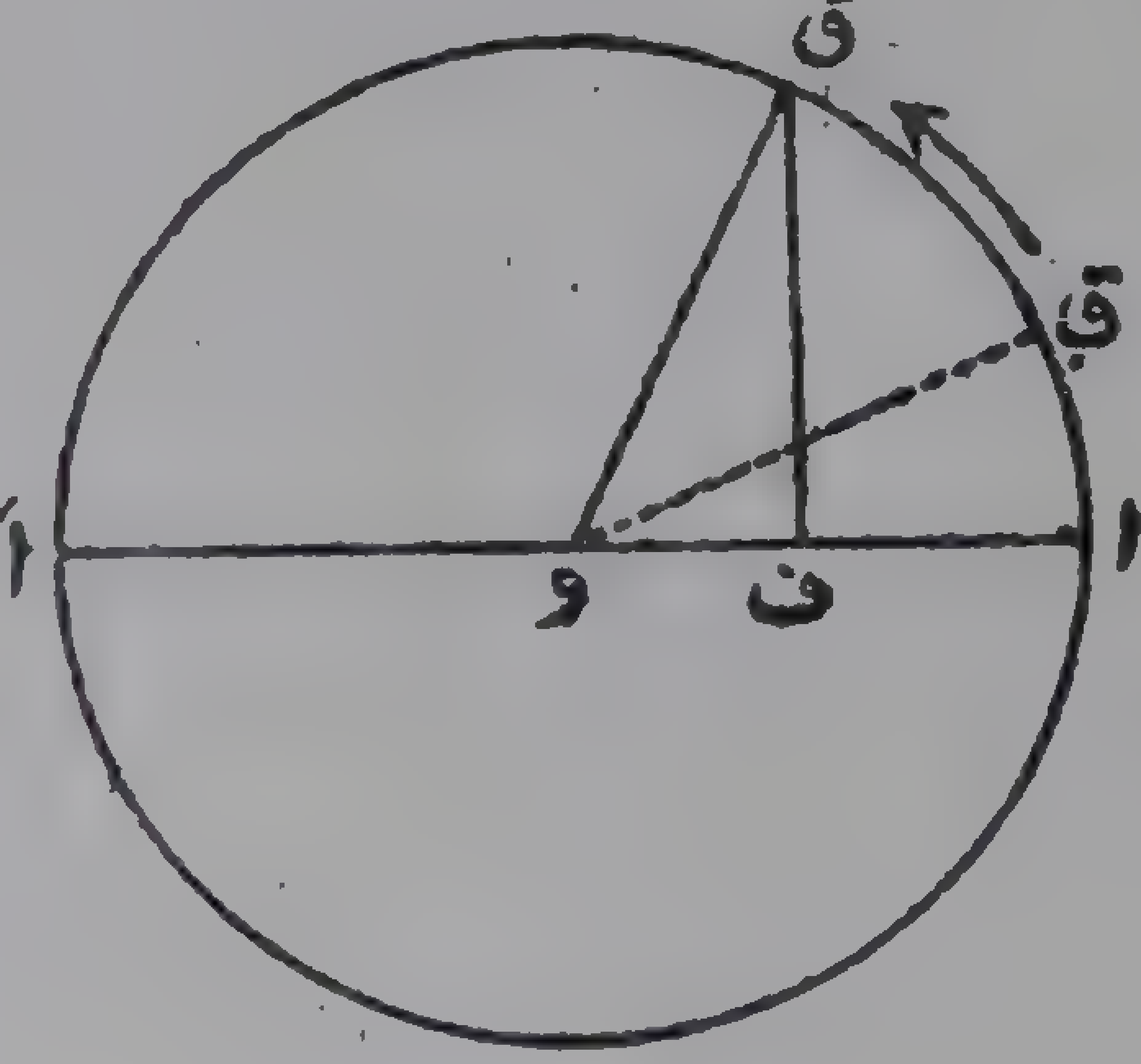
$$\text{لا} = \text{ا جم}\,(\text{ن ت} + \text{صہ}) \quad \cdots\cdots\cdots (4)$$

ہے جہاں مستقل ا اور ب یا ا اور صہ اختیاری ہیں۔ اس لیے حرکت دَوری ہے کیونکہ لا اور $\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}}$ کی قیمتیں تکرار پاتی ہیں جبکہ ن ت میں 2π کا اضافہ ہوتا ہے۔ اس لیے وقفہ

$$\text{ت} = \frac{2\pi}{\text{ن}} = 2\pi\sqrt{\frac{\text{م}}{\text{ک}}} \quad \cdots\cdots\cdots (5)$$

کو "دَور"[1] کہتے ہیں۔ یہ دَور وہی رہتا ہے خواہ ابتدائی شرطیں کچھ ہی ہوں اس لیے اہتزازوں کو "مساوی الوقت" کہا جاتا ہے۔

حرکت کا وہ نمونہ جو ضابطہ (۴) سے تعبیر ہوتا ہے علم الحیل میں اور طبیعیات کی متعدد شاخوں میں بہت اہم ہے۔ اُس کو "سادہ موسیقی" یا بعض اوقات "سادہ" ارتعاش کہتے ہیں۔ اس کی نوعیت کو مختلف طریقوں پر ظاہر کیا جاسکتا ہے۔ مثلاً اگر و کو مرکز مان کر نصف قطر ر کا ایک دائرہ کھینچا جائے اور یہ خیال کیا جائے کہ نقطہ ق اس دائرہ کو مثبت سمت میں مستقل زاوئی رفتار ن سے مسلسل مرتسم کرتا ہے تو ایک ثابت قطر ا و اَ پر ق کے قایم ظل (ف) کی (۲۶)



شکل ۳

حرکت اُس نوعیت کے ارتعاش کی ہوگی جس کا ذکر اُوپر کیا گیا ہے۔ حرکت کو مساوات (۴) کے مطابق بنانے کے لیے ہمیں یہ کرنا چاہیے کہ

---

[1] دَور کے متنافی $\left(\frac{ن}{۲\pi}\right)$ سے مکمل ارتعاشوں کی تعداد فی اکائی وقت حاصل ہوتی ہے۔ اس کو "صوتیات" میں "تعدد" کہتے ہیں۔

نقطہ ق کے حرکت کو لمحہ ت = ۰ پر ایسے محل ق. سے آغاز کرائیں کہ زاویہ ا و ق. = صہ۔ تب وقت ت پر ف کا فصلہ

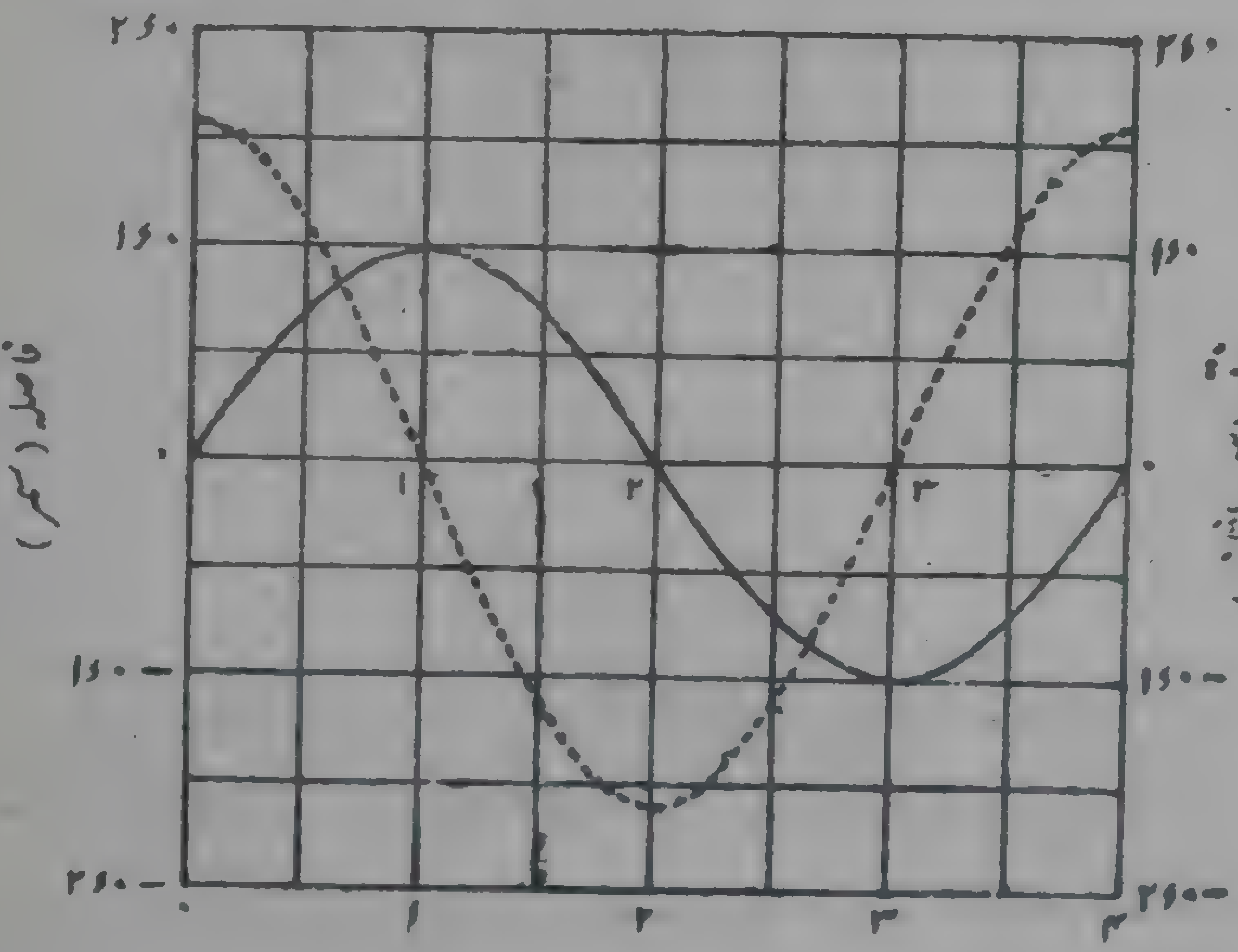
لا = ا جم ا و ق = ا جم (ق. و ق + ا و ق.) = ا جم (ن ت + صہ) ...(۶)

شکل سے رفتار کی ایک سادہ تعبیر بھی حاصل ہوتی ہے، چنانچہ

لا = -ن ا جیب (ن ت + صہ) = - ن × ف ق ......(۷)

بشرطیکہ ف ق کو مثبت یا منفی شمار کیا جائے بموجب اس کے کہ وہ خط ا اَ کے اوپر یا نیچے واقع ہو۔ یہ دوسری طرح ق کی رفتار (ن ا) کو و ا کے متوازی تحلیل کرنے سے بھی ظاہر ہے۔

و سے انتہائی محلوں ا، اَ کے فاصلہ ا کو ارتعاش کا "حیطہ" کہتے ہیں اور امدادی دائرہ پر ا سے قائد نقطہ ق کے زاوئی فاصلہ



شکل ۲

ا و ق کو "ہئیت" کہتے ہیں۔ اس لیے زاویہ ا و ق. یا صہ کو

اُبتدائی ہیئیت[۱] کہا جا سکتا ہے۔

یہ دیکھنا بھی ضروری ہے کہ دفعہ ا کے مکان زمانی منحنی اور رفتار زمانی منحنی اس صورت میں کیا شکلیں اختیار کرتے ہیں۔ (۴) اور (۷) سے یہ معلوم ہوتا (۲۸)
ہے کہ یہ دونوں جیوب کے منحنی ہیں اور ایک کے صفر نقطے دوسرے کے اعظم اور اقل نقطوں کے متناظر ہیں۔ اُوپر کی شکل میں حیطہ اسمر اور دَور چار ثانیہ ہے۔ فاصلہ کا پیمانہ (دیکھو مسلسل منحنی) بائیں جانب اور رفتار کا پیمانہ (دیکھو نقطہ دار منحنی) دائیں جانب دکھلایا گیا ہے۔

مثال ۱۔ ایک وزن ایک ثابت نقطہ سے ایک مرغولی کمانی کے

ذریعہ لٹک رہا ہے۔ اس کے انتصابی اہتزاز اُوپر کی صورت کے تحت آئینگے اگر ہم یہ مان لیں کہ کمانی لچک کے کلیہ ہُک کی پابندی کرتی ہے اور خود کمانی کا جمود لٹکے ہوئے جسم کے جمود کے مقابلہ میں قابل نظر انداز ہے۔

جب جسم کو توازن کے محل سے انتصاباً فاصلہ لا میں ہٹایا جاتا ہے تو استردادی قوت۔ ک لا پیدا ہوتی ہے جہاں ک ایک مستقل ہے جس سے اِس مخصوص کمانی کی "سختی" کی پیمایش ہوتی ہے۔



شکل ۵

پس حرکت کی مساوات، (۱) کے مماثل ہے اور اس لیے دَور

$$ت = ۲\pi \sqrt{\frac{م}{ک}} \quad .... (۸)$$

ہے۔ یہ کمیت م کے ساتھ بڑھتا ہے لیکن سختی ک کے اضافہ سے گھٹتا ہے۔ یہ مشاہدہ طلب ہے کہ دَور جاذبہ کی شدت پر منحصر نہیں ہے، جاذبہ صرف توازن کے محل پر اثر انداز ہوتا ہے۔

---

[۱] اس کو بعض اوقات "زماں" بھی کہتے ہیں۔ یہ اصطلاح علم ہیئیت سے لی گئی ہے

نتیجہ کو آسانی کے ساتھ طول کے اُس سکونیاتی اضافہ کی رقوم میں بیان کیا جاسکتا ہے جو وزن سے پیدا ہوتا ہے جبکہ وہ توازن میں لٹک رہا ہو۔ اِس اضافہ کو ط سے تعبیر کرو تو

$$\text{ک}\ \text{ط} = \text{م}\ \text{ج} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (۹)$$

اس لیے دَور

$$\text{ت} = ۲\pi \sqrt{\left(\frac{\text{ط}}{\text{ج}}\right)} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (۱۰)$$

ہے۔ یہ ابھی معلوم ہوگا (دفعہ ۱۱) کہ یہ دَور وہی ہے جو طول ط کے ایک رقاص کا ہوتا ہے۔ بہت سی مشابہ صورتوں پر یہ بیان صادق آتا ہے۔

اس کے بالعکس اگر ت اور سکونیاتی تطویل ط کا مشاہدہ کیا جائے تو ہم ج کی قیمت ضابطہ

$$\text{ج} = \frac{۴\pi^۲\ \text{ط}}{\text{ت}^۲} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (۱۱)$$

کے استعمال سے ماخوذ کرسکتے ہیں لیکن یہ طریقہ کچھ ٹھیک نہیں ہے کیونکہ اس میں کمانی کے جمود کو نظر انداز کرنا پڑتا ہے۔ لیکن اگر ہم یہ مان لیں کہ یہ جمود لٹکی ہوئی کمیت میں مَ کے اضافہ کے مماثل ہے تو (۸) سے

$$\text{ک}\ \text{ت}_۱^۲ = ۴\pi^۲(\text{م}_۱ + \text{مَ})\text{، ک}\ \text{ت}_۲^۲ = ۴\pi^۲(\text{م}_۲ + \text{مَ}) \quad \cdots\cdots (۱۲)$$

اور (۹) سے (۴۸)

$$\text{ک}\ \text{ط}_۱ = \text{م}_۱\ \text{ج}\text{، ک}\ \text{ط}_۲ = \text{م}_۲\ \text{ج} \quad \cdots\cdots\cdots (۱۳)$$

حاصل ہوتے ہیں جہاں لاحقے (۱، ۲) اُن تجربوں کے حوالے سے ہیں جو لٹکتی ہوئی کمیت کی دو مختلف قیمتوں کے ساتھ کیے گئے ہوں۔ اِن مساواتوں سے ج کی قیمت

$$\text{ج} = \frac{۴\pi^۲(\text{ط}_۱ - \text{ط}_۲)}{\text{ت}_۱^۲ - \text{ت}_۲^۲} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (۱۴)$$

حاصل ہوتی ہے۔

مثال ۲ - ایک جہاز کے انتصابی اہتزاز بھی اِسی نظریہ کے تحت آتے ہیں اگر ہم پانی کے جمود کو نظرانداز کر دیں۔

اگر پانی کی کثافت کو ثہ سے اور جہاز سے ہٹے ہوئے پانی کے حجم کو ح سے تعبیر کیا جائے تو جہاز کی کمیت ثہ ح ہوگی۔ اگر جہاز چھوٹے فاصلہ لا میں نیچے دبے تو تیراؤ میں اضافہ ج ثہ ا لا (حرکیاتی ناپ میں) ہوگا جہاں ا سے آب خط تراشش [دیکھو مصنف کی کتاب "سکونیات" دفعہ ۱۰۱] کا رقبہ تعبیر ہوتا ہے۔ پس

$$\text{ثہ ح}\,\frac{\text{فر}^{2}\text{لا}}{\text{فرت}^{2}} = -\,\text{ج ثہ ا لا} \qquad (15)$$

یا اگر ھ $= \frac{\text{ح}}{\text{ا}}$ یعنی اگر ھ غرقابی کی اوسط گہرائی کو تعبیر کرے تو

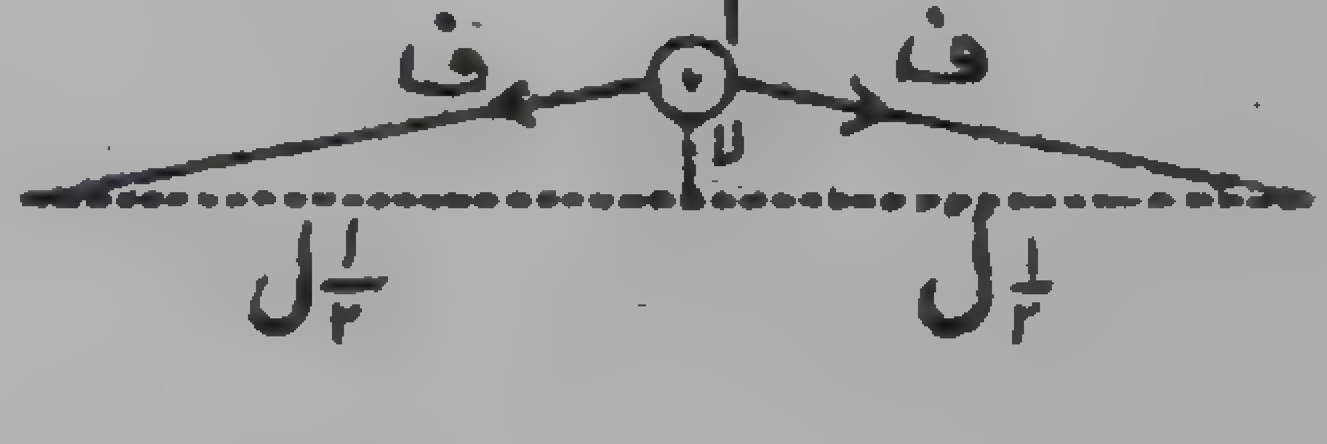
$$\frac{\text{فر}^{2}\text{لا}}{\text{فرت}^{2}} + \frac{\text{ج}}{\text{ھ}}\,\text{لا} = 0 \qquad (16)$$

اس لیے دَور

$$\text{ت} = 2\pi\sqrt{\frac{\text{ھ}}{\text{ج}}} \qquad (17)$$

جو وہی ہے جو طول ھ کے رقاص کا ہوتا ہے۔

مثال ۳ - ایک ذرہ م کو ایک تار کے وسطی نقطہ پر ثبت کیا گیا ہے اور تار دو ثابت نقطوں کے درمیان تناؤ ف کے ساتھ خوب تنا ہوا ہے۔ یہ ذرہ چھوٹے جانبی اہتزاز کرتا ہے۔



شکل ۷

اگر ہم تار کے جمود کو نظرانداز کر دیں اور جانبی ہٹاؤ لا کو طول ل کے مقابلہ میں اس قدر چھوٹا مان لیں کہ تناؤ کی تبدیلی، ف کی ایک ناقابلِ قدر کسر ہو تو

استردادی قوت $\frac{۲\,ف\,لا}{\frac{1}{2}\,ل}$ ہوگی، اس لیے

$$م\,\frac{د^2 لا}{دت^2} = -۴\,ف\,\frac{لا}{ل}\text{، تقریباً} \quad ....(۱۸)$$

اس کا حل (۳) کے مطابق ہے بشرطیکہ

$$ن^2 = \frac{۴\,ف}{م\,ل} \quad ....(۱۹)$$

اس لیے دَور

$$ت = \frac{۲\pi}{ن} = \pi\sqrt{\frac{م\,ل}{ف}} \quad ....(۲۰)$$

ہے۔

مثلاً اگر

ل = ۱۰۰ سمر، م = ۵ گرام، ف = ۹۸۱ × ۱۰۰۰ گرام سمر فی ثانیہ فی ثانیہ

تو دَور ۰۷۱ء۰ ثانیہ اور اس لیے تعدد ۱ء۱۴ ہے۔

۱۱ - رقاص (۲۹)

کسی رقاص کے لنگر کے چھوٹے اہتزاز بالکل خطی نہیں ہوتے لیکن اُن اصولوں کی ذرا پیش بینی سے جو آئندہ بیان کیے جائینگے اِن کو موجودہ نظریہ کے تحت لایا جا سکتا ہے۔

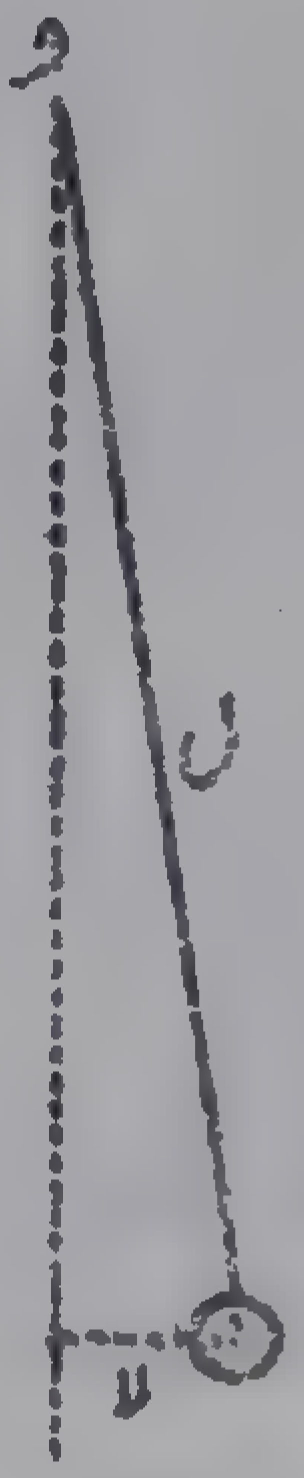
کمیّت م کا ایک ذرہ ایک ثابت نقطہ و سے ایک ہلکی ڈوری یا ڈنڈے کے ذریعہ جس کا طول ل ہے لٹکایا گیا ہے۔ فرض کرو کہ یہ ذرہ ایک انتصابی مستوی میں اپنے توازن کے محل کے گرد چھوٹے اہتزاز کرتا ہے۔ ہم یہ مان لیتے ہیں کہ انتصابی کے ساتھ ڈوری کا میلان θ ہے

ایسا ہے کہ وہ کبھی بھی چند درجوں سے آگے بڑھنے نہیں پاتا۔ اس لیے ذرّہ کا انتصابی ہٹاؤ یعنے

$$\text{ل}\,(\text{۱} - \text{جم}\,\text{ط}) \quad \text{یا} \quad \text{۲}\,\text{ل}\,\text{جب}^{\text{۲}}\,\tfrac{\text{۱}}{\text{۲}}\,\text{ط}$$

دوسرے رتبہ کی چھوٹی مقدار ہے اور اسلئے اس کو نظر انداز کیا جا سکتا ہے۔

اس لیے ڈوری کے تناؤ ف کے انتصابی جزو ترکیبی (ف جم ط) کو ذرّہ کے جاذبہ م ج کے مساوی رکھا جا سکتا ہے، پس اُسی درجہ تقرب تک



شکل ک

$$\text{ف} = \text{م}\,\text{ج} \quad \ldots\ldots \quad (\text{۱})$$

اس لیے اگر لا سے ذرّہ کا اُفقی ہٹاؤ تعبیر ہو تو

$$\text{م}\,\frac{\text{فر}^{\text{۲}}\,\text{لا}}{\text{فرت}^{\text{۲}}} = -\,\text{ف}\,\text{جب}\,\text{ط} = -\,\text{م}\,\text{ج}\,\frac{\text{لا}}{\text{ل}} \quad \ldots (\text{۲})$$

یا

$$\frac{\text{فر}^{\text{۲}}\,\text{لا}}{\text{فرت}^{\text{۲}}} = -\,\text{ن}^{\text{۲}}\,\text{لا} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\text{۳})$$

بشرطیکہ

$$\text{ن}^{\text{۲}} = \frac{\text{ج}}{\text{ل}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\text{۴})$$

اس لیے افقی حرکت سادہ موسیقی ہے اور دَور

$$\text{ت} = \text{۲}\,\pi\,\sqrt{\left(\frac{\text{ل}}{\text{ج}}\right)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\text{۵})$$

ہے۔

یہ ذہن نشین رہے کہ چونکہ صرف تقرب کی وجہ سے ہی تفرقی مساوات

شکل (۳) میں تحویل ہوئی ہے اس لیے کسی مخصوص صورت میں سادہ موسیقی حل کے جواز کے لیے یہ لازمی ہے کہ ابتدائی شرطیں ایسی ہوں کہ وہ تقرّب کے مطابق ہوں۔ اس لیے اگر ابتدائی ہٹاؤ لا. اور ابتدائی رفتار ع. ہو تو دفعہ ۵ مثال ۲ کے حل کی طرح تقریبی حل

$$\text{لا} = \text{لا}_{.}\ \text{جم}\ \text{ن ت} + \frac{\text{ع}_{.}}{\text{ن}}\ \text{جب}\ \text{ن ت} \quad \ldots\ldots (6)$$

۳ حاصل ہوتا ہے۔ اس لیے نسبتیں $\frac{\text{لا}_{.}}{\text{ل}}$ اور $\frac{\text{ع}_{.}}{\text{ن ل}}$ دونوں چھوٹی ہونی چاہییں۔

آخری شرط سے یہ ضروری ہے کہ نسبت $\frac{\text{ع}_{.}}{\sqrt{\text{ج ل}}}$ چھوٹی ہو (بموجب ۴) یعنے ابتدائی رفتار ع. اُس رفتار کے مقابلہ میں چھوٹی ہونی چاہیے جو ایک ذرہ ایک ایسے ارتفاع میں سے جو رقاص کے طول کا نصف ہو آزادانہ گِر کر حاصل کرتا ہے۔

سادہ رقاص کا ٹھیک نظریہ دفعہ ۳۰ میں بیان کیا جائیگا۔

معیاری سادہ رقاص جس میں کمیّت ایک نقطہ پر مرتکز ہو اور جو ایک ایسی ڈوری کے ذریعہ لٹکایا گیا ہو جو جاذبہ اور جمود سے عاری ہو فی الحقیقت ممکن نہیں لیکن ایک دھاتی گولے کے ذریعہ جو ایک نفیس باریک تار سے لٹکایا گیا ہو ج کی قیمت کا ایک اچھا تقرب حاصل ہو سکتا ہے، چنانچہ اس کے لیے ضابطہ

$$\text{ج} = \frac{4\pi^{2}\,\text{ل}}{\text{ت}^{2}} \quad \ldots\ldots (7)$$

ہے۔ ج کو معلوم کرنے کے اس سے زیادہ صحیح طریقے آئندہ بیان کیے جائینگے۔

رقاص کا نظریہ اِس لحاظ سے اہم ہے کہ اس سے اِس امر کے تصدیق کرنے کے ٹھیک ذریعے حاصل ہوتے ہیں کہ کسی دیے ہوئے مقام پر جاذبہ کا اسراع تمام جسموں کے لیے وہی ہوتا ہے اور اس لیے یہ کہ کسی جسم کا

جاذبہ اُس کی کمیّت کے متناسب ہوتا ہے۔ اگر ہم کوئی مفروضہ اختیار نہ کریں اور ذرّہ کے جاذبہ کو ج سے تعبیر کریں تو مساوات (۲) کی بجائے مساوات

$$\text{م}\ \frac{\text{فر}^{2}\text{لا}}{\text{فرت}^{2}} = -\text{ج}\ \frac{\text{لا}}{\text{ل}} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (\text{۸})$$

حاصل ہوگی اور ایک چھوٹے اہتزاز کا دَور

$$\text{ت} = 2\pi \sqrt{\frac{\text{م ل}}{\text{ج}}} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (\text{۹})$$

ہوگا۔ نیوٹن نے تجربہ سے یہ واقعہ بیان کیا کہ ایک ہی طول کے رقاصوں کی صورت میں دَور لنگر کی کمیت یا مادّہ پر منحصر نہیں ہوتا، اس کی توثیق بعد میں زیادہ نفیس ذریعوں سے اکثر ہوگی۔ اِس تجربی واقعہ سے یہ ثابت ہوتا ہے کہ نسبت $\frac{\text{ج}}{\text{م}}$ ایک ہی مقام پر تمام جسموں کے لیے وہی ہوتی ہے۔

۱۲- بگڑی ہوئی سادہ موسیقی حرکت مستقل قوت بگاڑ۔

اگر ایک ذرّہ، حسبِ دفعہ ۱۰، ایک جاذب قوت کے تحت ہو جو فاصلہ کے متناسب ہو اور اس کے علاوہ ایک معلومہ بیرونی قوت یا قوت «بگاڑ» کے تحت بھی ہو جس کا اسراعی اثر ہ ہو تو حرکت کی (۳۱)
مساوات شکل

$$\frac{\text{فر}^{2}\text{لا}}{\text{فرت}^{2}} + \text{ن}^{2}\,\text{لا} = \text{ہ} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (\text{۱})$$

اختیار کرتی ہے۔

اس لیے اگر قوت بگاڑ مستقل ہو اور اسراع ع پیدا کرے تو

$$\frac{\text{فر}^{2}\text{لا}}{\text{فرت}^{2}} + \text{ن}^{2}\,\text{لا} = \text{ع} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (\text{۲})$$

اِس کو ہم شکل

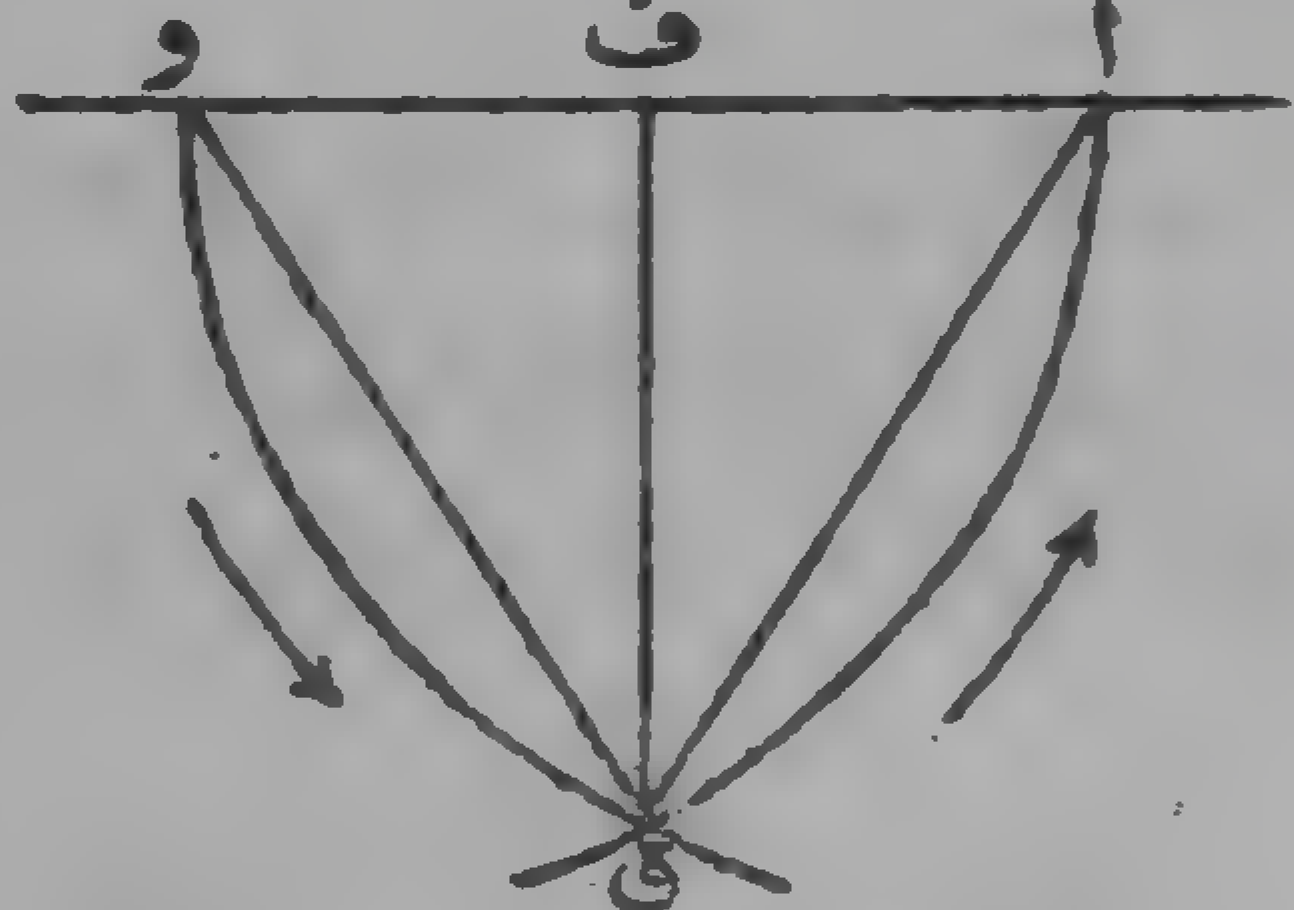
$$\frac{\text{فر}^2}{\text{فرت}^2}\left(\text{لا} - \frac{\text{ع}}{\text{ن}^2}\right) + \text{ن}^2\left(\text{لا} - \frac{\text{ع}}{\text{ن}^2}\right) = 0 \quad \text{.......} \quad (۳)$$

میں لکھ سکتے ہیں جس کا حل

$$\text{لا} - \frac{\text{ع}}{\text{ن}^2} = \text{ا جم ن ت} + \text{ب جب ن ت} \quad \text{.....} \quad (۴)$$

ہے ۔ اس کی تعبیر یہ ہے کہ ذرّہ، توازن کے نئے محل $\left(\text{لا} = \frac{\text{ع}}{\text{ن}^2}\right)$ کے گرد اختیاری حیطہ اور ابتدائی ہیت کے سادہ موسیقی اہتزاز کر سکتا ہے ۔ اِس اہتزاز کا دَور $\frac{2\pi}{\text{ن}}$ وہی ہے جو غیر بگڑی ہوئی حرکت میں تھا۔

مثال ۔ فرض کرو کہ ذرہ ابتداءً ساکن ہے اور اس پر ایک مستقل قوت بگاڑ دَور کے $\frac{1}{4}$ ویں حصہ تک عمل کرتی ہے اور پھر دَور کے $\frac{1}{4}$ ویں حصہ تک رُک جاتی ہے اور اس کے بعد پھر عمل کرتی ہے اور مستقلاً رہتی ہے ۔



شکل ۷

فرض کرو کہ توازن کا ابتدائی محل و ہے۔ و ا = $\frac{\text{ع}}{\text{ن}^2}$ لو جہاں ع وہ مستقل اسراع ہے جو بگاڑ کی قوت کی وجہ سے ہے ۔ تب ذرہ توازن کے نئے محل

ا کے گرد حیطہ و ا کے ساتھ اہتزاز کرنے لگیگا اور اس لیے قائد نقطہ، ا کے گرد،
و سے شروع کرکے، ایک دائرہ مرتسم کرنے لگیگا۔ دَور کے $\frac{1}{4}$ ویں حصّہ کے بعد (۳۲)
وہ محل ق پر ہوگا جہاں و ا ق = $\frac{1}{2}\pi$، اور اس لیے مرتعش نقطہ، و ا کے
وسطی نقطہ ف پر ہوگا۔ اب چونکہ بموجب فرض قوت بگاڑ رُک جاتی ہے اس لیے
قائد نقطہ، و کے گرد ق پر ابتدا کرکے ایک دائرہ مرتسم کرنے لگیگا کیونکہ ابتدائی رفتار
ن × ف ق ہے۔ چونکہ ا و ق = $\frac{1}{2}\pi$ اس لیے ذرّہ دَور کا $\frac{1}{4}$ واں حصّہ گذر جانے
کے بعد ا پر صفر رفتار کے ساتھ پہنچیگا۔ اس لیے اب اگر پھر قوت بگاڑ عمل کرنا شروع
کرے تو ذرّہ ا پر ساکن رہیگا۔

اِس مثال سے اُس قاعدہ کی وضاحت ہوتی ہے جس کو گاؤسس نے
غیر مقصور مماسی رو پیماؤں میں رَو کے استعمال کرنے کے لیے تجویز کیا تھا۔ یہ مان لیا گیا
ہے کہ انصراف اس قدر چھوٹے ہیں کہ سوئی پر استردادی جفت کو اُن انصرافوں
کے متناسب لیا جا سکتا ہے جو آلہ کے پیمانہ سے ظاہر ہوتے ہیں۔ سوئی کی سکون
کی حالت میں رَو کو (کنجی دباکر) اس وقت تک جاری رکھا جاتا ہے کہ انصراف کی
قیمت توازن کی تخمینہ قیمت کا نصف ہو جائے۔ اس کے بعد رَو کو روک دیا جاتا
ہے تاکہ وہ ساکن ہو جائے اور پھر اس کو جاری کر دیا جاتا ہے۔ اگر تخمینہ انصراف
صحیح ہو اور عملوں کو ٹھیک طور پر انجام دیا گیا ہو تو سوئی ساکن رہیگی۔ لیکن
عملاً یہ شرطیں ٹھیک طور پر پوری نہیں ہوتیں جس کا نتیجہ یہ ہوتا ہے کہ بالآخر
سوئی نئے توازن کے محل کے گرد اہتزاز کرنے لگتی ہے۔ لیکن چونکہ سعت بہت چھوٹی
ہوتی ہے اس لیے اِس محل کو بڑی صحت کے ساتھ متعین کیا جا سکتا ہے۔

۱۴۔ دَوری قوتِ بگاڑ۔

دوسری اہم صورت یہ ہے کہ معلومہ قوتِ بگاڑ وقت کا ایک سادہ
موسیقی تفاعل ہو چنانچہ فرض کرو کہ

ل = ع جم ب ت .... (۱)

جہاں ب کی قیمت معلوم ہے - اس مساوات کو حل کرنے میں یہ دریافت طلب ہو سکتا ہے کہ وہ بیرونی قوت کیا ہے جو مقررہ دور $\frac{۲\pi}{ب}$ کی سادہ موسیقی حرکت کو برقرار رکھنے کے لیے ضروری ہے - فرض کرو کہ

لا = ج جم ب ت .... (۲)

دفعہ ۱۲ (۱) میں درج کرنے پر

لا = (ن^۲ - ب^۲) ج جم ب ت .... (۳)

جو مجوزہ شکل (ا) کے مطابق ہے اگر

(ن^۲ - ب^۲) ج = ع .... (۴)

اس لیے دی ہوئی قوت "قسری" اہتزاز

لا = $\frac{ع}{ن^۲ - ب^۲}$ جم ب ت .... (۵)

کو برقرار رکھ سکتی ہے -

ظاہر ہے کہ لا کی اس قیمت میں ہم رقموں

ا جم ن ت + ب جب ن ت

(۳۴) کا اضافہ کر سکتے ہیں کیونکہ ان سے لا کی مطلوبہ قیمت پر اثر نہیں پڑتا - واقعہ یہ ہے کہ ان سے وہ "آزاد" اہتزاز تعبیر ہوتے ہیں جو لا کے بغیر موجود ہو سکتے ہیں - اس طرح ہمیں مکمل حل

لا = $\frac{ع}{ن^۲ - ب^۲}$ جم ب ت + ا جم ن ت + ب جب ن ت ... (۶)

حاصل ہوتا ہے جس میں دو اختیاری مستقل ہیں -

قسری ارتعاش (۵) کا دَور $\frac{2\pi}{\text{ب}}$ وہی ہے جو قوتِ بگاڑ کا ہے۔ اس کی ہیئت قوت کی ہیئت کے مساوی ہوگی یا اس کے مخالف بموجب اس کے کہ ب $\gtrless$ ن یعنے بموجب اس کے کہ عائدہ کردہ دَور آزاد ارتعاش کے دَور سے طویل تر یا صغیر تر ہو۔ اگر عائد کردہ دَور لا انتہا طویل ہو تو ب = ۰ اور ہر لمحہ پر ہٹاؤ وہ ہوگا جو ایک یکساں قوت سے جو مقدار میں اصلی قوت کی فوری قیمت کے مساوی ہو برقرار رکھا جاسکتا ہے۔ اگر ہم "موجوں" کے نظریہ سے ایک اصطلاح اختیار کریں تو ہم اِس کو ہٹاؤ کی سکونیاتی یا "متوازن" قیمت کہہ سکتے ہیں۔ فرض کرو کہ اس کو لآ سے تعبیر کیا گیا ہے تو

$$\text{لآ} = \frac{\text{ع}}{\text{ن}^{2}} \times \text{جم ب ت} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (7)$$

پس قسری اہتزاز میں کسی دوسرے دَور کے لیے

$$\text{لا} = \frac{\text{لآ}}{\frac{\text{ب}^{2}}{\text{ن}^{2}} - 1} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (8)$$

حاصل ہوتا ہے۔

جب، ب صفر سے آگے بڑھتا ہے تو قسری اہتزاز کا خیطہ بھی بڑھتا ہے۔ حتیٰ کہ جب، ب تقریباً ن کے مساوی ہوجاتا ہے یعنے جب عائد کردہ دَور طبعی دَور کے تقریباً مساوی ہوجاتا ہے تو یہ خیطہ بہت بڑا ہوجاتا ہے۔ اگر تفرقی مساوات حقیقی شرطوں یا حالات کا لحاظ کرتے صرف ایک تقرب ہو، جیسا کہ رقاص کی صورت میں تو حل (۶) کا اطلاق بھی نہیں ہوسکتا، کیوں کہ وہ اس اساسی مفروضہ کے مطابق نہیں رہتا جس میں لا کو چھوٹا مان کر تقرب حاصل کیا گیا ہے۔ رگڑ کی قوتیں بھی جو کسی نہ کسی حد تک ہمیشہ رو بہ عمل رہتی ہیں اہم اور قابل لحاظ ہوسکتی ہیں۔ اِس سوال پر آئندہ (بارہویں باب میں) غور کیا جائیگا لیکن ہمیں یہ معلوم

ہو چکا ہے کہ غیر معمولی حیطہ کا ارتعاش وقوع پذیر ہو سکتا ہے جب کبھی آزاد اور قسری دَوروں میں تقریبی تطابق پیدا ہو۔ اس منظر کو جو تمام مرتعش نظاموں میں واقع ہوتا ہے "گمک" کہتے ہیں، یہ اصطلاح صوتیات سے لی گئی ہے جس میں اِس اصول کی اہم مثالیں بکثرت ملتی ہیں۔

اِن دو دَوروں کے ٹھیک مطابق ہونے کی صورت میں گذشتہ (۳۴)
طریقہ ناکام ہوتا ہے لیکن یہ مشکل حل ہو سکتی ہے اگر ہم حل (۶) کی انتہائی شکل کا، ب ← ن کے لیے، امتحان کریں جبکہ مستقلوں ا اور ب کو مقررہ ابتدائی شرطوں کے مطابق لیا گیا ہو۔ چنانچہ اگر ت = ۰ کے لیے لا = لا٠، لاَ = ع٠ تو

$$\text{ا} + \frac{\text{ع}}{\text{ن}^2 - \text{ب}^2} = \text{لا}_0 \text{ ، ن ب} = \text{ع}_0 \quad \ldots\ldots\ldots (۹)$$

اس لیے

$$\text{لا} = \text{لا}_0 \text{ جم ن ت} + \frac{\text{ع}_0}{\text{ن}} \text{ جب ن ت} + \frac{\text{ع}}{\text{ن}^2 - \text{ب}^2}(\text{جم ب ت} - \text{جم ن ت}) \quad \ldots\ldots\ldots (۱۰)$$

آخری رقم کو شکل

$$\frac{\text{ع ت}}{\text{ن} + \text{ب}} \times \text{جب } \tfrac{1}{2}(\text{ن} + \text{ب})\text{ت} \times \frac{\text{جب } \tfrac{1}{2}(\text{ن} - \text{ب})\text{ت}}{\tfrac{1}{2}(\text{ن} - \text{ب})\text{ت}}$$

میں لکھا جا سکتا ہے جس میں دوسرے جزو ضربی کی انتہائی قیمت ایک ہے۔ پس ب ← ن کے لیے

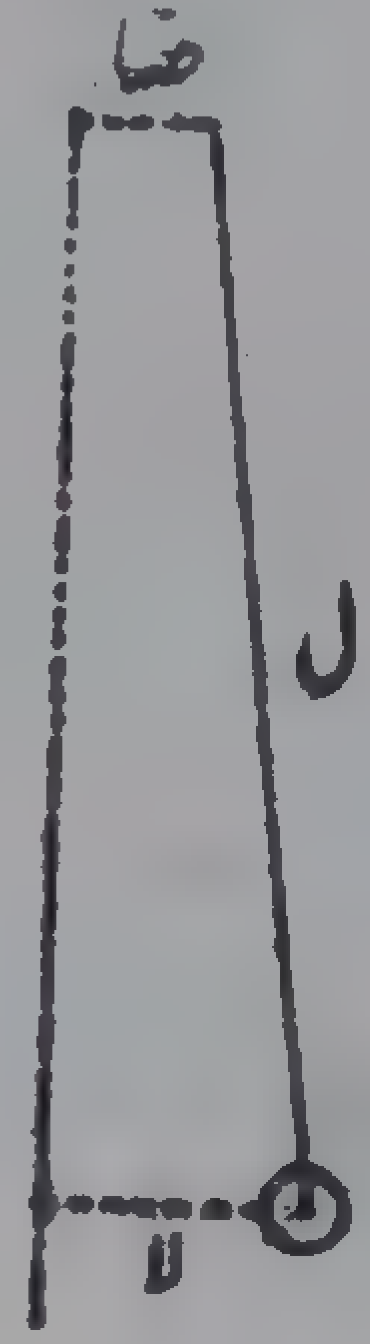
$$\text{لا} = \text{لا}_0 \text{ جم ن ت} + \frac{\text{ع}_0}{\text{ن}} \text{ جب ن ت} + \frac{\text{ع ت}}{۲\text{ن}} \text{ جب ن ت} \quad \ldots (۱۱)$$

آخری رقم کے متعلق یہ کہا جا سکتا ہے کہ وہ ایک سادہ موسیقی ارتعاش کو جس کا حیطہ ت کے متناسب بڑھتا ہے تعبیر کرتی ہے۔ اُس وجہ کی بناء پر

جس کو پہلے بیان کیا جا چکا ہے یہ نتیجہ عملی صورتوں میں حرکت کی صرف ابتدائی منزلوں میں بالعموم درست رہتا ہے۔

اگر ب کو اس فاصل قیمت سے آگے بڑھا دیا جائے تو قسری اہتزاز کی ہئیت اُلٹی ہوجاتی ہے اور اس کا حیطہ مسلسل گھٹتا ہے۔

گذشتہ نظریہ کی تمثیل ایک ایسے رقاص کی صورت سے ملتی ہے جس کے نقطۂ تعلیق کو ایک دیے ہوئے طریقہ پر پس وپیش افقاً متحرک کیا گیا ہو۔ یہ مان لیا گیا ہے کہ شرطیں ایسی ہیں کہ خطِ انتصابی کے ساتھ ڈوری کا میلان ہمیشہ چھوٹا رہتا ہے۔



شکل ۹

اگر ایک ثابت اُفقی خط سے اس نقطۂ تعلیق کا ہٹاؤ ضا سے اور لنگر کا ہٹاؤ لا سے تعبیر ہو تو

$$\text{م}\,\frac{\text{فر}^2\,\text{لا}}{\text{فرت}^2} = -\text{م ج} \times \frac{\text{لا} - \text{ضا}}{\text{ل}} \quad \cdots\cdots\cdots (۱۲)$$

یا اگر $\text{ن}^2 = \frac{\text{ج}}{\text{ل}}$ (حسبِ دفعہ ۱۱) تو

$$\frac{\text{فر}^2\,\text{لا}}{\text{فرت}^2} + \text{ن}^2\,\text{لا} = \text{ن}^2\,\text{ضا} \quad \cdots\cdots\cdots (۱۳)$$

یہ مساوات وہی ہے جو حاصل ہوتی اگر ڈوری کا اُوپر کا سرا ثابت ہوتا (۳۵)
اور لنگر پر ایک اُفقی قوت جس کا اسراعی اثر ن² ضا ہو عمل کرتی۔

اگر عاید کردہ حرکت سادہ موسیقی ہو، مثلاً

$$\text{ضا} = \text{ا جم ب ت} \quad \cdots\cdots\cdots (۱۴)$$

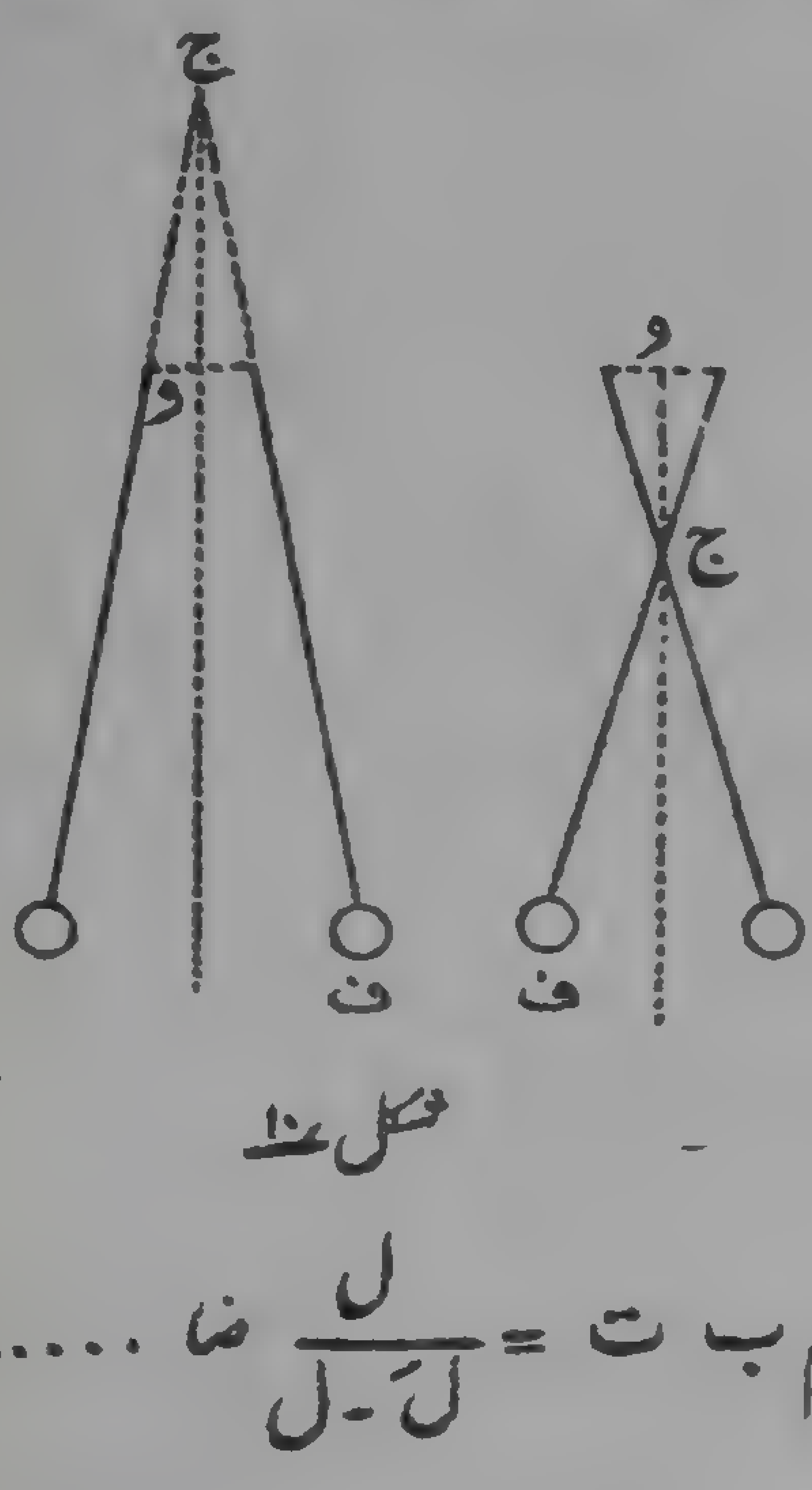
تو حل (۵) کی مانند ہے اور ع = ن² ا۔ اگر ہم ن² = $\frac{\text{ج}}{\text{ل}}$ رکھیں یعنے اگر

مقررہ دَور، طول لَ کے رقاص کے دَور کے مساوی ہو تو قسری اہتزاز

لا = ن^۲ و / (ن^۲ - ب^۲) جم ب ت = لَ / (لَ - ل) ضا ..... (۱۵)

ہے -

اِس نتیجہ کی وضاحت شکل عـ۱۰ میں دو صورتوں کے لیے کی گئی ہے، ایک صورت میں لَ > ل اور دوسری صورت میں لَ < ل- رقاص اس طرح حرکت کرتا ہے گویا کہ وہ ایک ثابت نقطہ جَ سے لٹکایا گیا ہے جہاں فاصلہ ج ف، لَ کے مساوی ہے۔ بلاشبہ حل (۱۵) شکل سے واضح ہے [1]



شکل عـ۱۰

نقطۂ تعلیق کے لحاظ سے ہٹاؤ مساوات

لا - ضا = ب^۲ و / (ن^۲ - ب^۲) جم ب ت = ل / (لَ - ل) ضا ...... (۱۶)

سے حاصل ہوتا ہے۔

---

[1] یہ وضاحت ٹامس ینگ (Thomas Young) کی ہے (دیکھو مصنّف کی کتاب "سکونیات" دفعہ ۱۳۷) جس نے آزاد اور قسری اہتزازوں کے نظریہ کی ابتدائی طریقہ پر تحقیق کی تھی اور اُس کو موجوں کے نظریہ پر استعمال کیا تھا جہاں ہیئت کے اُلٹے ہونے کا سوال اُن صورتوں میں بڑی نظری اہمیت رکھتا ہے جن میں آزاد دَور چاند کی قوتِ بگاڑ کے دور سے طویل تر ہوتا ہے۔

اس کا تعلق زلزلہ نگاروں[1] کے نظریہ سے بھی ہے یعنے اُن آلوں سے کے نظریہ سے جن کو اِسس غرض کے لیے بنایا جاتا ہے کہ وہ زلزلہ کے وقت زمین کی حرکت کو جس حد تک ممکن ہو مرتسم کریں۔ ہر زلزلہ نگار اصل میں ایک رقاص کے معادل ہوتا ہے اور اس کے نشان اضافی حرکت پر منحصر ہوتے ہیں کیونکہ اندراج کرنے والا آلہ سہارے کے ساتھ ضرور حرکت کرتا ہے۔ اگر ن کے مقابلہ میں ب بڑا ہو یا لَ ' لِ کے مقابلہ میں چھوٹا ہو تو اضافی ہٹاؤ تقریباً ضا ہے کیونکہ لنگر تقریباً ساکن ہے پس وہ ارتعاش جو مقابلتاً سرعت کے ساتھ ہوتے ہیں سب ایک ہی پیمانہ پر مندرج ہوتے ہیں۔ اسی لیے زلزلہ نگار کے آزاد دور کو طویل بنایا جاتا ہے چنانچہ اس کی عام مقدار ۱۵ یا ۲۰ ثانیہ ہوتی ہے۔ لیکن اس (۳۶) اندراج میں اُن آزاد ارتعاشوں سے ابتری پیدا ہوسکتی ہے جو پیدا ہوجاتے ہیں اور اسی لیے متعسِر ترکیبیں استعمال کی جاتی ہیں۔ (دیکھو بارہواں باب۔)

۱۴ - عام قوتِ بگاڑ۔

عام تر مساوات

$$\frac{ف^2 لا}{ف ت^2} + ن^2 لا = ف\ (ت) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۱)$$

کے حل سے اُس طریقہ کی توضیح ہوتی ہے جو تفرقی مساواتوں میں "دو مبدلوں کے تغیر" کا ہے۔ اِس میں ف (ت) سے وہ اسراع تعبیر ہوتا ہے جو بگاڑ کی قوت کی وجہ سے ہے۔

اگر وقت ت پر قوت بگاڑ رک جائے تو ذرہ سادہ موسیقی ارتعاش

$$لاَ = ا\ جم\ ن\ تَ + ب\ جب\ ن\ تَ \quad \ldots\ldots\ldots (۲)$$

کرنے لگیگا جہاں تَ اِس مفروضہ آزاد ارتعاش میں وقت کو اسی مبداء سے

---

[1] seismographs,

تعبیر کرتا ہے جہاں سے ت کی پیمائش ہوتی ہے۔ سر ا اور ب اِس واقعہ سے متعین ہوتے ہیں کہ جب، تَ = ت تو ضابطہ (۲) سے جو ہٹاؤ اور رفتار معلوم ہوں وہ اُس ہٹاؤ اور رفتار کے مساوی ہونے چاہییں جو اصلی حرکت میں اس لمحہ پر حاصل ہوتے ہیں۔ دوسرے لفظوں میں مساواتیں

$$\text{ا جم ن ت + ب جب ن ت = لا} \quad \ldots\ldots (۳)$$

اور

$$\text{-ن ا جب ن ت + ن ب جم ن ت} = \frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}} \quad \ldots\ldots (۴)$$

حاصل ہونی چاہئیں جن میں لا اور $\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}}$ اصلی حرکت کے حوالے سے ہیں۔

پس اِن مساواتوں سے سر ا اور ب، وقت ت کے تفاعلوں کے طور پر حاصل ہوتے ہیں جہاں ت وہ وقت ہے جس پر قوتِ بگاڑ عمل کرنا چھوڑ دیتی ہے۔ (۳) کو تفرق کرنے سے

$$\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}} = \frac{\text{فرا}}{\text{فرت}}\text{ جم ن ت + }\frac{\text{فرب}}{\text{فرت}}\text{ جب ن ت - ن ا جب ن ت + ن ب جم ن ت}$$

اور یہ (۴) کی مدد سے

$$\frac{\text{فرا}}{\text{فرت}}\text{ جم ن ت + }\frac{\text{فرب}}{\text{فرت}}\text{ جب ن ت = ۰} \quad \ldots\ldots (۵)$$

میں تحویل پذیر ہے۔ پھر (۴) کو تفرق کرنے سے

$$\frac{\text{فر}^۲\text{لا}}{\text{فرت}^۲} = \text{-ن}^۲\text{ ا جم ن ت - ن}^۲\text{ ب جب ن ت - ن }\frac{\text{فرا}}{\text{فرت}}\text{ جب ن ت + ن }\frac{\text{فرب}}{\text{فرت}}\text{ جم ن ت}$$

$$= \text{-ن}^۲\text{ لا - ن }\frac{\text{فرا}}{\text{فرت}}\text{ جب ن ت + ن }\frac{\text{فرب}}{\text{فرت}}\text{ جم ن ت}$$

اس لیے (۳۷)

$$\text{-ن }\frac{\text{فرا}}{\text{فرت}}\text{ جب ن ت + ن }\frac{\text{فرب}}{\text{فرت}}\text{ جم ن ت = ف(ت)} \quad \ldots (۶)$$

$\frac{\text{فرا}}{\text{فرت}}$ اور $\frac{\text{فرب}}{\text{فرت}}$ کے لیے (۵) اور (۶) کو حل کرنے سے

$$\left.\begin{aligned} \frac{\text{فرا}}{\text{فرت}} &= -\frac{1}{\text{ن}}\,\text{ف (ت) جب ن ت،} \\ \frac{\text{فرب}}{\text{فرت}} &= \frac{1}{\text{ن}}\,\text{ف (ت) جم ن ت} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (۷)$$

اس لیے

$$\left.\begin{aligned} \text{ا} &= -\frac{1}{\text{ن}}\int \text{ف (ت) جب ن ت فرت} \\ \text{ب} &= \frac{1}{\text{ن}}\int \text{ف (ت) جم ن ت فرت} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (۸)$$

اور

اِن میں سے ہر تکملہ میں بلاشبہ ایک اختیاری مستقل کا اضافہ ہوگا۔

ضابطہ

$$\text{لا} = \text{ا جم ن ت} + \text{ب جب ن ت} \quad \ldots\ldots (۹)$$

میں ا اور ب کی قیمتیں (۸) سے معلوم کرکے درج کرنے پر مطلوبہ حل حاصل ہوگا۔ اس کی تصدیق عملِ تفرق سے بہ آسانی ہوسکتی ہے۔

اگر ذرّہ ابتدائً توازن میں ہو تو ا اور ب کی ابتدائی قیمتیں صفر ہیں۔ اس کے علاوہ اگر قوتِ بگاڑ ف (ت)، ت کی قیمتوں کی صرف ایک محدود وسعت کے لیے قابلِ لحاظ ہو تو تکمل کی نچلی حد کو $-\infty$ لیا جاسکتا ہے۔ قوت بگاڑ کے رُک جانے کے بعد ت کی قیمتوں کے لیے اُوپر کی حد کو $+\infty$ کیا جاسکتا ہے۔

وقت ت = ۰ پر ایک ایسے دھکے کا اثر جس سے فوراً رفتار ع پیدا ہو بلاشبہ مساوات

$$\text{لا} = \frac{\text{ع}}{\text{ن}}\,\text{جب ن ت} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۱۰)$$

سے معلوم ہوگا ۔ اگر اسی دھکے کو وقت کے ایک محدود وقفہ پر پھیلا دیا جائے تو بعد کے اہتزاز کا حیط کم ہوگا بشرطیکہ قوت کی علامت ہمیشہ وہی رہے ۔ اس کی وضاحت کے لیے ہم صورت

$$ف(ت) = \frac{م\, تہ}{\pi(ت^2 + تہ^2)} \quad \cdots\cdots\cdots (11)$$

لے سکتے ہیں ۔ یہ سچ ہے کہ اب قوتِ گاڑھ کی نہ کوئی معین ابتدا ہے نہ اختتام لیکن جب، ت تہ کے مقابلہ میں کچھ بڑا ہوتا ہے تو خواہ وہ مثبت ہو یا منفی، ف (ت) کی قیمت بہت چھوٹی ہوتی ہے [1] (۱۱) میں اجزائے ضربی ایسے منتخب کیے گئے ہیں کہ

$$\int_{-\infty}^{+\infty} ف(ت)\, فرت = م \quad \cdots\cdots\cdots (12)$$

(۳۸) اب [2]

$$\left.\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{+\infty} ف(ت)\, جب\, ن ت\, فرت = 0، \\ &\int_{-\infty}^{+\infty} ف(ت)\, جم\, ن ت\, فرت = م\, و^{-ن تہ} \end{aligned}\right\} \cdots (13)$$

اس لیے تنقلی ارتعاش [3]

---

[1] (۱۱) کے تفاعل کی ترسیم کسی اور مقصد کے لیے دفعہ ۹۵ میں دیگئی ہے ۔

[2] پہلا تکملہ ایک ہی مطلق قیمت کے مثبت اور منفی عنصروں کو خارج کرنے سے معدوم ہوتا ہے ۔ دوسرا تکملہ ضابطہ

$$\int_{0}^{\infty} \frac{جم\, ا لا}{لا^2 + ب^2}\, فرلا = \frac{\pi}{2ب} \times و^{-اب}$$

پر منحصر ہے جس کا ثبوت تکملی احصاء کی کتابوں میں ملیگا۔

Residues [3]

$$\text{لا} = \frac{\text{ج}}{\text{ن}}\,\text{و}^{-\text{ن ته}}\ \text{جب ن ت} \qquad \ldots\ldots\ldots (\text{۱۴})$$

ہے۔ تہ کی زیادہ بڑی قیمت کے لیے دھکہ زیادہ طویل ہوگا۔ جزو ضربی $\text{و}^{-\text{ن ته}}$ سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ اس سے حیط پر کیا اثر پڑتا ہے۔ تہ کی کسی دی ہوئی قیمت کے لیے یہ اثر زیادہ بڑا ہوگا اگر ارتعاش کا طبعی تعدد $\left(\frac{\text{ن}}{\text{۲}\pi}\right)$ زیادہ بڑا ہو۔

۱۵۔ غیر قائم توازن کے گرد حرکت۔

فرض کرو کہ ایک ذرہ ایک ایسی دافع قوت کے تحت ہے جو فاصلہ کے متناسب ہے۔ یہ ایک ایسے جسم کی حرکت کا نمونہ ہے جو غیر قائم توازن کے محل کے قریب متحرک ہو۔ اب حرکت کی مساوات کی شکل

$$\frac{\text{ف}^2\text{لا}}{\text{فت}^2} = \text{ن}^2\text{لا} \qquad \ldots\ldots\ldots (\text{۱})$$

ہے۔ اس کا حل، حسبِ دفعہ ۵ مثال ۴،

$$\text{لا} = \text{ا}\,\text{و}^{\text{ن ت}} + \text{ب}\,\text{و}^{-\text{ن ت}} \qquad \ldots\ldots\ldots (\text{۲})$$

ہے۔ جہاں ا اور ب، اختیاری ہیں۔ ابتدائی شرطوں کو اس طرح مقرر کرنا ممکن ہے کہ ا = ۰۔ اس صورت میں ذرہ، توازن کے محل (لا = ۰) کے قریب متقاربا پہنچتا ہے، لیکن اگر ایسا نہ ہو تو لا کی قیمت بالآخر لاانتہا بڑھتی ہے۔

یہ ذہن نشین رہے کہ مساوات (۱) عملی صورتوں میں صرف ایک تقریبی مساوات ہے اور صرف اس وقت تک استعمال کی جا سکتی ہے جب تک کہ لا ایک خاص حد سے متجاوز نہ ہو۔ چنانچہ حل (۲) سے کچھ وقت کے بعد صحیح تعبیر حاصل نہیں ہوتی۔

اس کی مثال مقلوب رقاص سے بہم پہنچتی ہے جس میں ڈوری کی

بجائے ایک ہلکا استوار ڈنڈا ہوتا ہے۔ اگر غیر قائم توازن کے محل سے اُفقی ہٹاؤ لا ہو تو ڈنڈے میں دباؤ ابتداءً م ج ہے جہاں م لنگر کی کمیت ہے اور اس کا اُفقی جزو ترکیبی باہر وار $\frac{\text{م ج لا}}{\text{ل}}$ ہے، اگر لا چھوٹا ہو۔ اس لیے مساوات (۱) کا اطلاق ہوتا ہے بشرطیکہ $\text{ن}^{۲} = \frac{\text{ج}}{\text{ل}}$ ۔

۱۶- متغیر جاذبہ کے تحت حرکت۔ (۳۹)

اگر ذرہ مبداء کی جانب ایسی قوت سے جذب ہو جو فاصلہ کے مربع کے بالعکس متناسب ہے تو حرکت کی مساوات

$$\text{ع} \frac{\text{فرع}}{\text{فرلا}} = -\frac{\text{مہ}}{\text{لا}^{۲}} \qquad \text{(۱)}$$

ہوگی جہاں مہ، اکائی فاصلہ پر کے اسراع کو تعبیر کرتا ہے۔ لا کے لحاظ سے تکمل کرنے پر

$$\frac{1}{2}\text{ع}^{۲} = \frac{\text{مہ}}{\text{لا}} + \text{ج} \qquad \text{(۲)}$$

اگر ذرہ فاصلہ ف پر سکون سے حرکت کی ابتداء کرے تو لا = ف کے لیے ع = ۰ حاصل ہونا چاہیے اور اس لیے $\text{ج} = -\frac{\text{مہ}}{\text{ف}}$، پس

$$\text{ع}^{۲} = ۲\,\text{مہ}\left(\frac{1}{\text{لا}} - \frac{1}{\text{ف}}\right) \qquad \text{(۳)}$$

اگر ف بہت بڑا ہو تو اس کی شکل

$$\text{ع}^{۲} = \frac{۲\,\text{مہ}}{\text{لا}} \qquad \text{(۴)}$$

کی جانب مائل ہوتی ہے اور اس سے جو رفتار متعین ہوتی ہے اُس کو "لاتناہی سے محل لا تک رفتار" کہتے ہیں۔

ہم اِن نتیجوں کو ایک ایسے ذرہ کی صورت پر استعمال کر سکتے ہیں جو راست زمین پر گر رہا ہو، اِس طرح فاصلہ کے تغیّر کے ساتھ جاذبہ کے تغیر کا لحاظ بھی رہیگا۔ کششوں کے نظریہ میں یہ مان لیا جاتا ہے کہ جاذبہ کا اسراع، زمین کے مرکز سے فاصلہ کے مربع کے بالعکس تناسب ہے چنانچہ اگر ہم اِس نظریہ کو تسلیم کرلیں تو فاصلہ لا پر اسراع کی قیمت $\frac{ج ر^{۲}}{لا^{۲}}$ ہوگی جہاں ر زمین کا نصف قطر ہے۔ پس مہ = ج $ر^{۲}$ رکھنے سے لاتناہی سے رفتار کے لیے مساوات

$$ع^{۲} = \frac{۲ ج ر^{۲}}{لا} \qquad \text{.............} \quad (۵)$$

حاصل ہوتی ہے۔ بالخصوص اگر ذرّہ ایک بہت بڑے فاصلہ سے سکون سے چلے تو وہ (اگر کوئی مزاحمت نہ ہو) زمین کی سطح پر رفتار $\sqrt{۲ ج ر}$ کے ساتھ ٹکرائیگا یعنے ایسی رفتار کے ساتھ جو اُس رفتار کے مساوی ہوگی جو ذرّہ، سکون سے زمین کے نصف قطر کے مساوی فاصلہ میں سے گرنے میں حاصل کرتا ہے بشرطیکہ جاذبہ مستقل اور اُس قیمت کے مساوی ہو۔ جو زمین کی سطح پر ہے۔ اگر ہم

$$ر = ۶{,}۳۸ \times ۱۰^{۸} \text{ سمر، } ج = ۹۸۱ \text{ سمر فی ثانیہ فی ثانیہ}$$

لیں تو یہ رفتار ۱۱٫۲ کلومیتر یا تقریباً ۷ میل فی ثانیہ حاصل ہوتی ہے۔

(۲۰) اب ہم زیادہ عام صورت کی طرف رجوع ہوتے ہیں۔ فرض کرو کہ وہ وقت معلوم کرنا ہے جس پر ذرہ ایک دیے ہوئے محل پر پہنچتا ہے۔ (۳) سے

$$\frac{فرلا}{فرت} = ع = - \sqrt{\frac{۲ مہ (ف - لا)}{ف لا}} \qquad \text{.......} \quad (۶)$$

جہاں منفی علامت اس وجہ سے لی گئی ہے کہ حرکت مبداء کی جانب ہے۔

اس کو تکمیل کرنے کے لیے ہم

$$\text{لا} = \text{ف جم}^{2}\text{ط} \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots (۷)$$

رکھ سکتے ہیں کیونکہ لا کی سعت ف سے صفر تک ہے۔ اِس اندراج سے

$$\text{۲ جم}^{2}\text{ط}\ \frac{\text{فرط}}{\text{فرت}} = \sqrt{\frac{\text{۲مہ}}{\text{ف}^{3}}} \quad \dots\dots\dots (۸)$$

یا

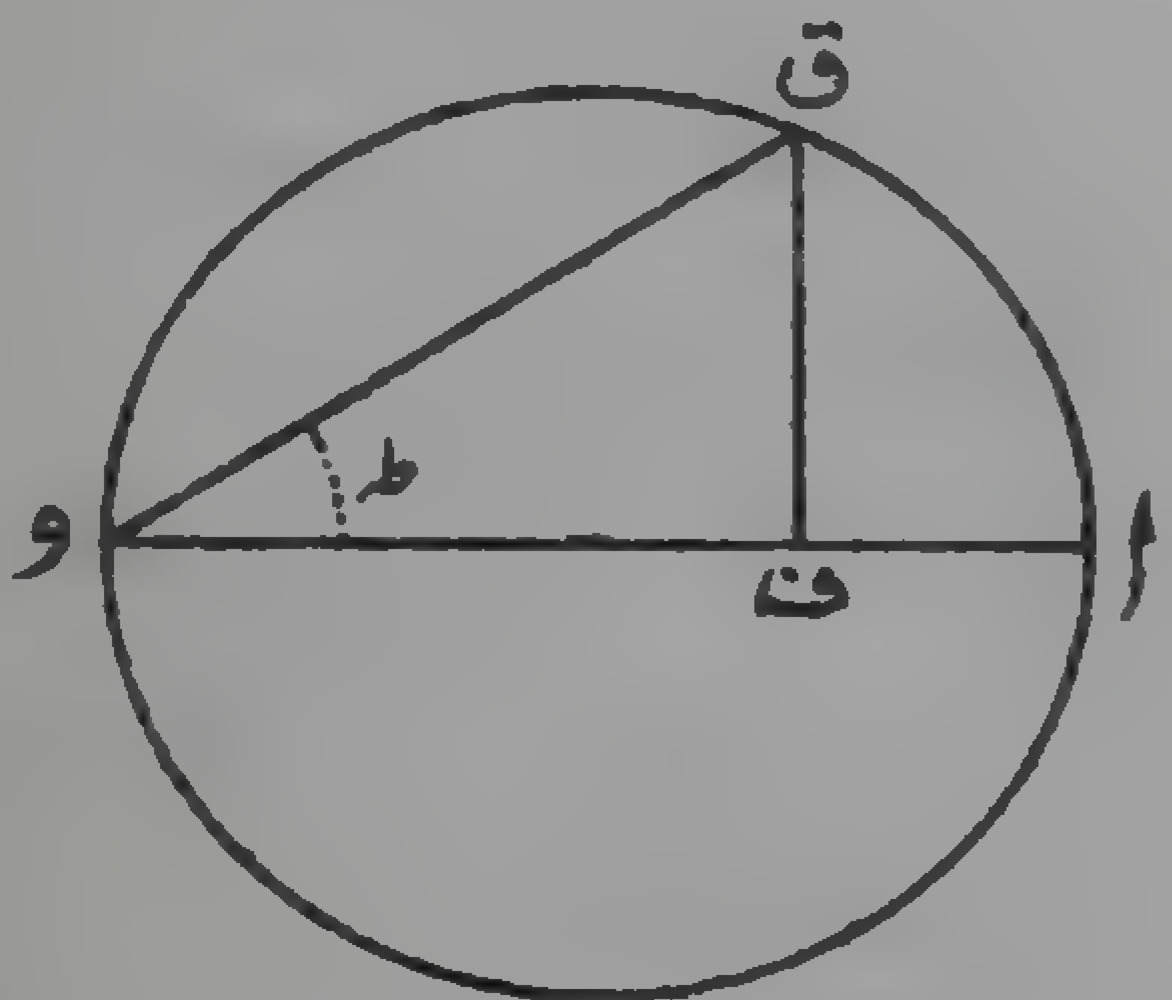
$$\frac{\text{فرت}}{\text{فرط}} = \sqrt{\frac{\text{ف}^{3}}{\text{۲مہ}}} \times (\text{۱} + \text{جم ۲ط}) \quad \dots\dots\dots (۹)$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس لیے

$$\text{ت} = \sqrt{\frac{\text{ف}^{3}}{\text{۲مہ}}} \times (\text{ط} + \text{جب ط جم ط}) \quad \dots\dots (۱۰)$$

اس میں کسی جمعی مستقل کے اضافہ کی ضرورت نہیں ہے اگر ت کا مبداء اُس لمحہ پر لیا گیا ہو جس پر حرکت کی ابتداء ہوئی ہے چنانچہ ط = ۰ کے لیے ت = ۰۔ اس سے ت، ط کے ایک تفاعل کے طور پر متعین ہوگا اور اس لیے ت، لا کے ایک تفاعل کے طور پر حاصل ہوگا۔

اندراج (۷) اور نتیجہ (۱۰) کو ہندسی طور پر اس طرح تعبیر کیا جاسکتا ہے:۔ اگر ا وہ نقطہ ہو جہاں سے حرکت کی ابتدا ہوئی ہے تو ہم و ا کو قطر مان کر ایک دائرہ کھینچتے ہیں اور ذرّہ کے کسی محل ف کے جواب میں معیّن ف ق کھڑا کرتے ہیں۔ اگر ط سے زاویہ ا و ق تعبیر ہو تو



شکل ۱۱

$$\text{و ف} = \text{و ق جم ط} = \text{و ا جم}^2 \text{ط}$$

جو (۷) کے مطابق ہے۔ نیز وہ رقبہ جو و ا، و ق اور قوس ا ق کے درمیان گھرا ہوا ہے

$$\tfrac{1}{2}\,\text{ف}^2\,(\text{ط} + \text{جب ط جم ط})$$

ہے۔ (۱۰) کے ساتھ مقابلہ کرنے پر یہ معلوم ہوگا کہ رقبہ ا و ق وقت کے ساتھ یکساں طور پر بڑھتا ہے اور اس کے اضافہ کی شرح فی اکائی

وقت $\sqrt{\tfrac{1}{2}\,\text{مہ ف}}$ ہے[1]

نیز (۷) اور (۱۰) سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ مکان زمانی منحنی کی شکل ایک خط تدویر[2] ہے بشرطیکہ لا اور ت کے پیمانے ٹھیک طریقہ پر مقرر کیے جائیں[3] (۴۱)

اگر (۱۰) میں ہم ط = $\tfrac{1}{2}\,\pi$ رکھیں تو مبداء پر پہنچنے کا وقت معلوم ہوگا یعنی

$$\text{ت} = \pi\sqrt{\frac{\text{ف}^3}{\text{۸ مہ}}} \qquad \text{(۱۱)}$$

اِس کا مقابلہ اُس وقت سے کیا جا سکتا ہے جو ایک ذرّہ کی گردش کا

---

[1] Newton, *Principia*, lib.1., prop. xxxii.

[2] Cycloid

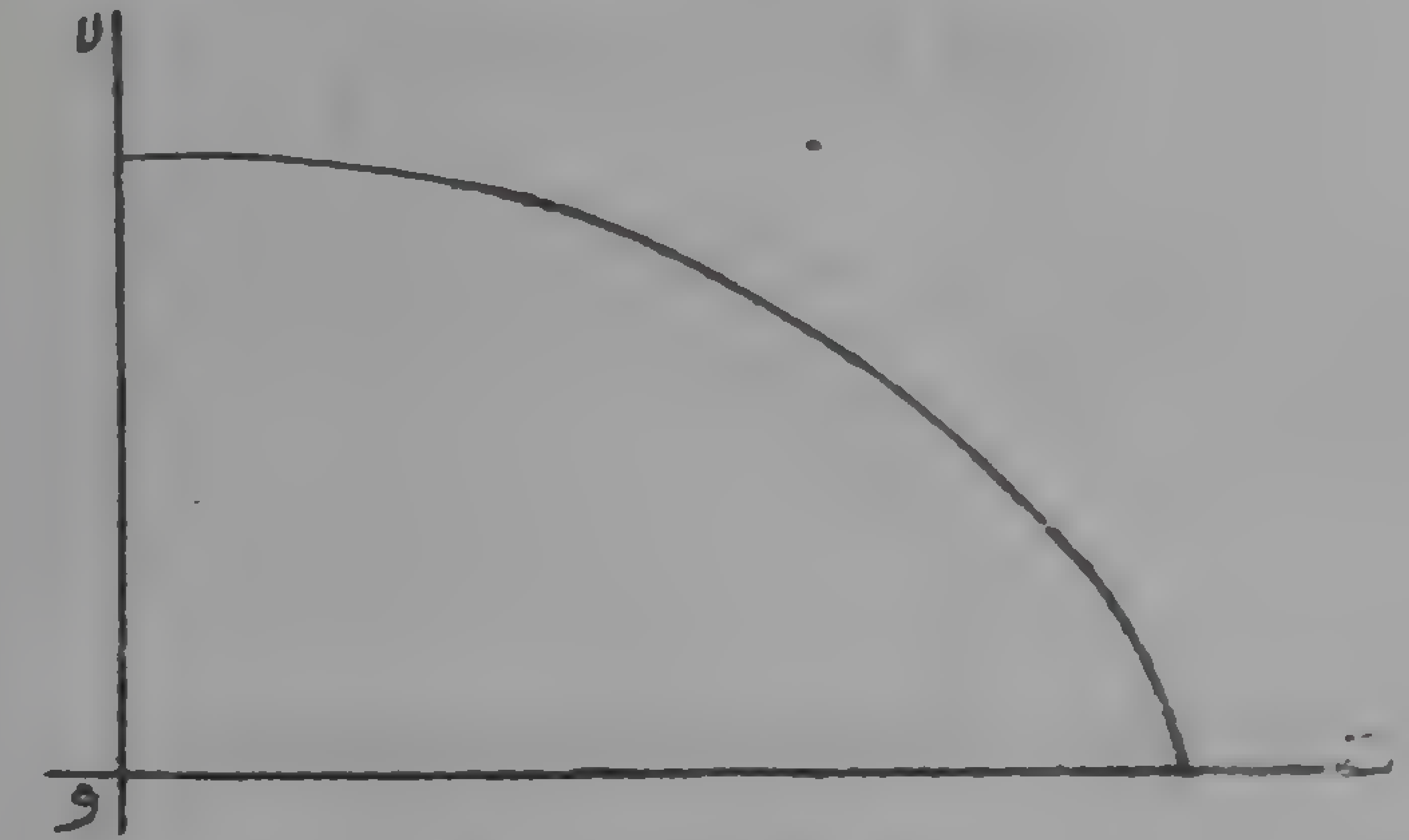
[3] خط تدویر پر کے کسی نقطہ کے محدد شکلوں

$$\text{لا} = \text{ا}\,(\text{۲سا} + \text{جب ۲سا})\ ,\ \text{ا} = \text{ا}\,(\text{۱} + \text{جم ۲سا})$$

میں بیان کیے جا سکتے ہیں اگر محوروں کو مناسب طریقہ پر منتخب کیا گیا ہو (*Inf. Calc.*, Art. 136).

ہوتا ہے جو نصف قطر ف کے ایک دائری مدار میں قوت کے اُسی مرکز کے گرد حرکت کرتا ہے یعنے

$$ت_1 = ۲\pi\sqrt{\frac{ف^۳}{مہ}} \quad \text{.............} \quad (۱۲)$$



شکل ۱۲

(دیکھو دسواں باب) - پس

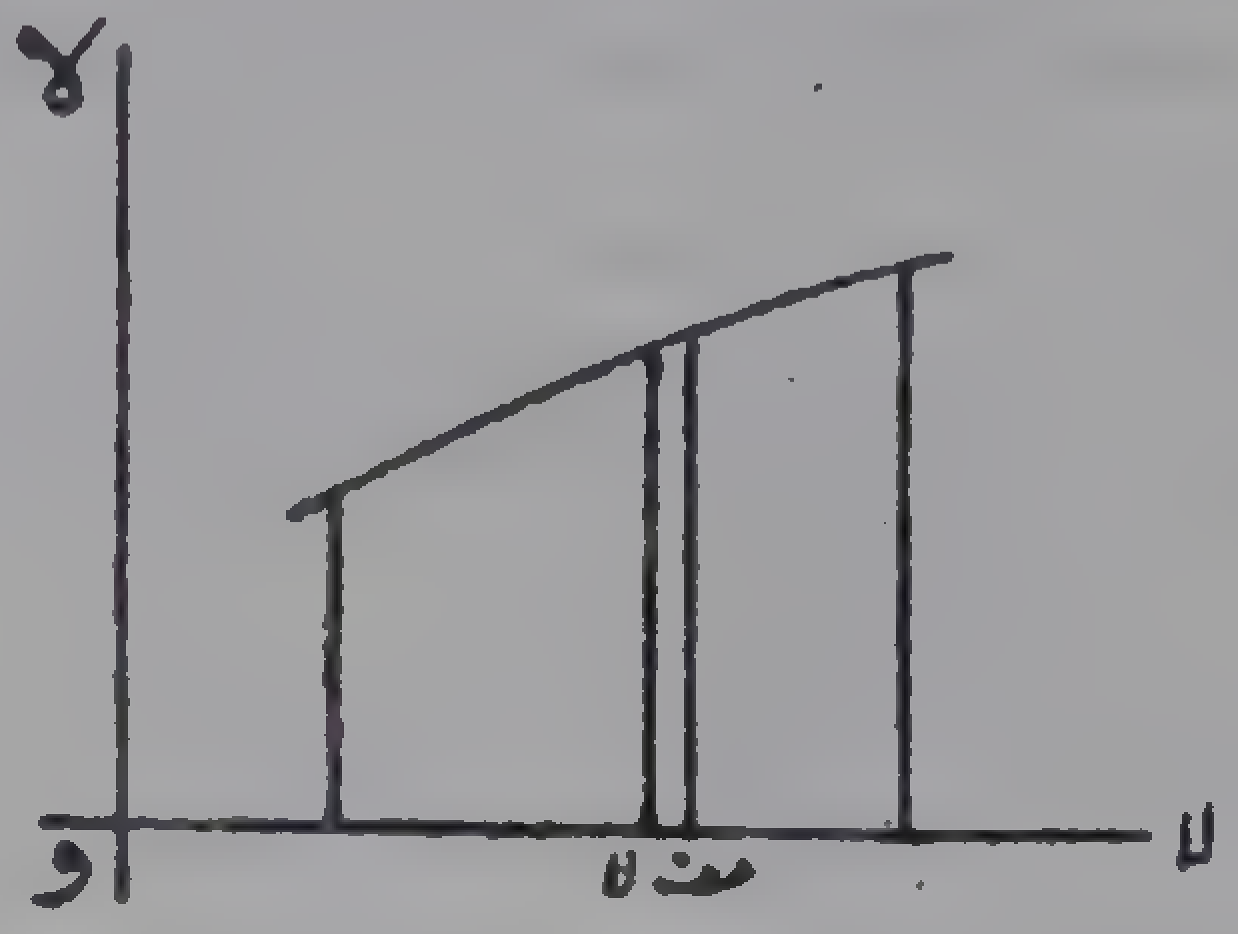
$$\frac{ت_0}{ت_1} = \frac{1}{۸}\sqrt{۲} = ۱۷۷، \text{ تقریباً} \quad \text{.......} \quad (۱۳)$$

مثلاً اگر زمین کی مداروی حرکت کو روک دیا جائے تو وہ سورج کے اندر سال کے ۱۷۷، میں یعنے تقریباً ۶۵ دن میں گر جائیگی۔

۱۷- کام - طاقت۔

فرض کرو کہ ایک ذرہ پر ایک قوت ک عمل کرتی ہے اور ذرہ ایک صغاری ہٹاؤ مف لا حاصل کرتا ہے تو قوت ک نے جو کام کیا اُس کی پیمائش حاصل ضرب ک مف لا سے ہوگی اور اس لیے یہ کام مثبت یا منفی ہوگا بموجب اس کے کہ قوت کی سمت ہٹاؤ کی سمت کے موافق ہو یا مخالف۔ (۴۲)
کسی محدود ہٹاؤ کی صورت میں قوت کا کام معلوم کرنے کے لیے

ہم اِس ہٹاؤ کو مختلف صغاری عنصروں میں جن میں وہ تقسیم پذیر ہو تحلیل کرتے ہیں اور ان میں انجام پائے ہوئے کام کی مقداروں کو جمع کرتے ہیں۔ یہ حاصل جمع مطلوبہ کام کو تعبیر کریگا۔ چنانچہ ہم دیکھتے ہیں کہ یہ نتیجہ ایک محدود تکملہ کی نوعیت کا ہے اور اُس کو ترسیماً ایک منحنی کے ذریعہ تعبیر کیا جاسکتا ہے جو لا کو فصلہ اور لا کو معین مان کر مرتسم کیا گیا ہو۔



شکل ۱۳

کسی ہٹاؤ میں کیے ہوئے کام کی مقدار اُس رقبہ سے تعبیر ہوگی جس کو مُعین عبور کرتا ہے جبکہ لا اپنی ابتدائی قیمت سے اپنی آخری قیمت تک گذرتا ہے بشرطیکہ اِس رقبہ کی علامت معمولی قرار دادوں کے مطابق لی گئی ہو۔[۱]

فٹ پونڈ ثانیہ نظام میں کام کی مطلق اکائی کو "فٹ پونڈل" کہتے ہیں، اور س۔گ۔ث (سمر گرام ثانیہ) نظام میں متناظر مطلق اکائی کو "ارگ" کہتے ہیں۔ اس کے ۱۰^۷ ضعف کو "جول[۲]" کہا جاتا ہے۔

انجینیری کے مقاصد کے لیے تجاذبی اکائیاں فٹ پونڈ یا کلوگرام میٹر بالعموم استعمال کی جاتی ہیں۔

لفظ "طاقت" اُس شرح (فی اکائی وقت) کو تعبیر کرنے کے لیے استعمال کیا جاتا ہے جس پر کام ہو رہا ہے۔ ایک جول فی ثانیہ کی طاقت کو "واٹ[۳]"،

---

[۱] Inf. Calc., دفعہ ۹۹۔

[۲] جے۔پی۔جول (J.P.Joule) (۱۸۱۸ء تا ۱۸۸۹ء) سے منسوب ہے جس نے حیلی توانائی اور حرارت کے درمیان رشتہ واضح طور پر قایم کیا تھا۔

[۳] جیمس واٹ James-watt (۱۷۳۶ء تا ۱۸۰۴ء) سے منسوب ہے جس نے بھاپ انجن ایجاد کیا تھا۔

کہتے ہیں۔ فنی مقاصد کے لیے اس سے بڑی اکائی "کلو واٹ" (= ۱۰۰۰ واٹ) استعمال کی جاتی ہے۔

برطانوی انجینیر "اسپی طاقت" کی اکائی استعمال کرتے ہیں جو ۳۳۰۰۰ فٹ پونڈ فی منٹ کی طاقت یا ۵۵۰ فٹ پونڈ فی ثانیہ کی طاقت کے مساوی ہے۔ متناظر فرانسیسی اکائی "شیول ویپر" (Cheval-Vaucur) ۷۵ کلوگرام میٹر فی ثانیہ کے مساوی ہے۔

یہ مان لینے سے کہ ایک فٹ ۳۰٫۴۸ سمر کے معادل اور ایک پونڈ ۴۵۳٫۶ گرام کے معادل ہے ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\frac{\text{فٹ پونڈ}}{\text{ارگ}} = ۹۸۱ \times ۴۵۳٫۶ \times ۳۰٫۴۸ = ۱٫۳۵۶ \times ۱۰^{۷}$$

اس لیے ایک فٹ پونڈ ۱٫۳۵۶ جول کے معادل ہے یا جول ۰٫۷۳۷ فٹ پونڈ کے معادل ہے۔ نیز (۴۳)

$$\frac{\text{اسپی طاقت}}{\text{کلوواٹ}} = ۵۵۰ \times ۱٫۳۵۶ \times ۱۰^{-۳} = ۰٫۷۴۶$$

۱۸ - توانائی کی مساوات۔

اب ہم خطی حرکت کی عام مساوات

$$\text{م} \frac{\text{فرع}}{\text{فرت}} = \text{لا} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۱)$$

کی طرف رجوع ہوتے ہیں۔ اس کو ع سے ضرب دینے پر مساوات

$$\text{م ع} \frac{\text{فرع}}{\text{فرت}} = \text{لا ع}$$

یا

$$\frac{\text{فر}}{\text{فرت}} \left(\tfrac{۱}{۲} \text{م ع}^{۲} \right) = \text{لا} \frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۲)$$

حاصل ہوتی ہے۔

حاصل ضرب $\frac{1}{2}\text{م}\,\text{ع}^2$ کو "**توانائی بالحرکت**" کہتے ہیں۔ اس کی وجہ ابھی بیان کی جائیگی۔ چونکہ ق مف لا سے وہ کام تعبیر ہوتا ہے جو قوت ایک صغاری ہٹاؤ مف لا میں انجام دیتی ہے۔ اس لیے حاصل ضرب

ق $\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}}$ سے اُس شرح کی پیمایش ہوتی ہے جس پر کام لمحہ ت پر انجام پا رہا ہے۔ اس لیے مساوات (۲) سے یہ ظاہر ہوتا ہے کہ توانائی بالحرکت کسی لمحہ پر ایک ایسی شرح سے (مثبت یا منفی) بڑھ رہی ہے جو اُس شرح کے مساوی ہے جس پر کام ذرہ پر ہو رہا ہے۔ پس ت کے لحاظ سے تکمل کرنے پر یہ معلوم ہوتا ہے کہ وقت کے کسی وقفہ میں توانائی بالحرکت کا اضافہ اُس کُل کام کے مساوی ہے جو اِس وقفہ میں ذرہ پر ہوتا ہے۔ علامتوں میں

$$\frac{1}{2}\text{م}\,\text{ع}_2^2 - \frac{1}{2}\text{م}\,\text{ع}_1^2 = \int_{\text{ت}_1}^{\text{ت}_2} \text{ق}\,\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}}\,\text{فرت} \quad \ldots\ldots (۳)$$

جہاں ع_1 اور ع_2 علی الترتیب لمحول ت_1 اور ت_2 پر کی رفتاریں ہیں۔

اگر قوت ہمیشہ ایک ہی محل میں وہی ہو اور اس لیے ق، لا کا ایک مُعیّن تفاعل ہو تو اُوپر کے تکملہ کی بجائے تکملہ

$$\int_{\text{لا}_1}^{\text{لا}_2} \text{ق}\,\text{فرلا}$$

رکھا جا سکتا ہے جہاں لا_1 اور لا_2 ابتدائی اور آخری محل ہیں۔ اِس طرح قوت کا ایک مستقل اور بقائی میدان (دیکھو سکونیات دفعہ ۴۶) حاصل ہوتا ہے اور توانائی بالقوہ کا تخیل اطلاق پذیر ہو جاتا ہے۔ ذرّہ کو سکون سے (۴۴)
کسی معیاری محل لا سے قوت کے میدان کے عمل کے خلاف، کسی مقررہ محل لا تک سکون میں لانے کے لیے ایک خارجی عامل کو جو کام کرنا پڑتا ہے وہی ہوتا ہے خواہ یہ سفر کسی راستہ سے طے ہو اور اس کام کو محل لا کی تناظر

توانائی بالقوہ کہتے ہیں۔ اگر اس کو قہ سے تعبیر کیا جائے تو

$$\text{قہ} = -\int_{\text{لا}_0}^{\text{لا}} \text{ط}\,\text{فرلا} = \int_{\text{لا}}^{\text{لا}_0} \text{ط}\,\text{فرلا} \quad \ldots\ldots (۴)$$

کیونکہ - ط وہ خارجی قوت ہے جو خیال کردہ عمل کی ہر منزل پر میدان کی قوت کی تعدیل کرنے کے لیے مطلوب ہے۔ اس عمل کے متعلق ہم یہ فرض کر سکتے ہیں وہ لا انتہا سستی سے واقع ہوتا ہے[1] اگر ہم ایک چھوٹے ہٹاؤ پر غور کریں تو

$$\text{مف قہ} = -\text{ط مف لا} \quad \ldots\ldots (۵)$$

یا

$$\text{ط} = -\frac{\text{فرقہ}}{\text{فرلا}} \quad \ldots\ldots (۶)$$

وہ کام جو میدان کی قوت انجام دیتی ہے جبکہ ذرہ کسی محل لا_1 سے کسی دوسرے محل لا_2 تک گذرتا ہے حسبِ ذیل ہے :-

$$\int_{\text{لا}_1}^{\text{لا}_2} \text{ط}\,\text{فرلا} = \int_{\text{لا}_1}^{\text{لا}_0} \text{ط}\,\text{فرلا} + \int_{\text{لا}_0}^{\text{لا}_2} \text{ط}\,\text{فرلا} = \int_{\text{لا}_1}^{\text{لا}_0} \text{ط}\,\text{فرلا} - \int_{\text{لا}_2}^{\text{لا}_0} \text{ط}\,\text{فرلا}$$

$$= \text{قہ}_1 - \text{قہ}_2 \quad \ldots\ldots (۷)$$

اس لیے اگر کوئی بیرونی قوتیں نہ ہوں تو (۳) سے

$$\tfrac{1}{2}\,\text{م}\,\text{ع}_2^2 - \tfrac{1}{2}\,\text{م}\,\text{ع}_1^2 = \text{قہ}_1 - \text{قہ}_2$$

یا

$$\tfrac{1}{2}\,\text{م}\,\text{ع}_2^2 + \text{قہ}_2 = \tfrac{1}{2}\,\text{م}\,\text{ع}_1^2 + \text{قہ}_1 \quad \ldots\ldots (۹)$$

[1] ابھی یہ معلوم ہوگا کہ یہ شرط غیر ضروری ہے۔

یعنے توانائی بالحرکت اور توانائی بالقوہ کا مجموعہ مستقل ہوتا ہے۔

اگر بیرونی قوتیں زیر عمل ہوں تو مساوات (۸) کی بائیں جانب وہ کام جمع کرنا چاہیے جو یہ قوتیں ذرّہ پر کرتی ہیں۔ دوسرے لفظوں میں فرق

$$\left(\tfrac{1}{2}\,\text{م}\,\text{ع}_2^2 + \text{قہ}_2\right) - \left(\tfrac{1}{2}\,\text{م}\,\text{ع}_1^2 + \text{قہ}_1\right)$$

اُس کام کے مساوی ہے جو اس طرح انجام پاتا ہے۔ اس لیے یہ کام اُس (۴۵)
اضافہ (مثبت یا منفی) کے معادل ہے جو ذرّہ کی کُل توانائی میں ہوتا ہے۔ بعض صورتوں میں اِس کو اس طرح بیان کیا جاتا ہے کہ بیرونی عامل پر ذرّہ کا ردّ عمل جو کام کرتا ہے وہ کُل توانائی کی کمی کے مساوی ہوتا ہے۔

اس لیے مقدار $\tfrac{1}{2}\,\text{م}\,\text{ع}^2 + \text{قہ}$ سے جس کو ہم نے "کُل توانائی" کہا ہے اُس کام کی مقدار معلوم ہوتی ہے جس کو ذرّہ بلحاظ رفتار اور محل اپنی اصلی حالت سے معیاری محل میں آکر ساکن ہونے کے لیے بیرونی مزاحمتوں کے خلاف انجام دیتا ہے۔ اسی وجہ سے اس کو "توانائی" سے موسوم کیا جاتا ہے یعنے "مزاحمت کے خلاف کام کرنے کی قابلیت" کے مفہوم میں۔ توانائی کے اِن دو حصوں کو مختلف طریقوں پر موسوم کیا جاتا ہے چنانچہ ایک کو 'حرکت کی توانائی'، یا 'توانائی بالحرکت'، یا 'اصلی توانائی'[1] اور دوسرے کو 'محل کی توانائی'، یا 'سکونیاتی توانائی'، یا 'توانائی بالقوہ'، کہا جاتا ہے[2]

مثال ۱۔ ایک ذرّہ م کی توانائی بالقوہ، بلحاظ جاذبہ، کسی معیاری سطح کے اُوپر ارتفاع لا پر

$$\text{قہ} = \text{م}\,\text{ج}\,\text{لا} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (۱۰)$$

---

[1] حاصل ضرب م ع² کو جی۔ ڈبلیو۔ لیب نیز (G.W. Leibnitz) (۱۶۴۶ء تا ۱۷۱۶ء) کے زمانہ سے Vis viva کہتے تھے، اصطلاح 'Energy' کو ینگ (Young) نے جاری کیا۔

[2] جلہ $\tfrac{1}{2}$م ع² کے لیے نام "Actual Energy" رینکن (Rankine) کا تجویز کردہ ہے۔

ہے۔ اس لیے ذرہ کی انتصابی حرکت میں جبکہ کوئی مزاحمت نہ ہو ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\tfrac{1}{2} \text{م ع}^2 + \text{م ج لا} = \text{مستقل} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (11)$$

مثال ۲ ۔ ایک مرغولی کمانی کو اس کے طبعی طول ل سے طول ل+لا تک تنانے میں جو کام مطلوب ہے وہ دفعہ ۱۰ مثال ۱ کی ترقیم کی بموجب

$$\int_{0}^{\text{لا}} \text{ک لا فرلا} = \tfrac{1}{2} \text{ک لا}^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (12)$$

ہے۔ اس لیے ایک لٹکے ہوئے وزن کی صورت میں

$$\text{فہ} = \tfrac{1}{2} \text{ک لا}^2 - \text{م ج لا} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (13)$$

اگر لا کو نیچے وار ناپا جائے۔ اس لیے توانائی کی مساوات

$$\tfrac{1}{2} \text{م ع}^2 + \tfrac{1}{2} \text{ک لا}^2 - \text{م ج لا} = \text{مستقل} \quad \ldots\ldots\ldots (14)$$

ہے۔

مثال ۳ ۔ اگر جاذبہ کے اُس تغیر کا لحاظ رکھا جائے جو زمین کے مرکز سے فاصلہ کے تغیر کے ساتھ ہوتا ہے تو ایک ذرہ کو سطح کے اُوپر مرکز سے فاصلہ لا پر لانے میں جو کام مطلوب ہے وہ

$$\text{فہ} = \int_{\text{و}}^{\text{لا}} \frac{\text{م ج و}^2}{\text{لا}^2} \text{فرلا} = \text{م ج و}^2 \left(\frac{1}{\text{و}} - \frac{1}{\text{لا}}\right) \quad \ldots\ldots (15)$$

ہے جہاں و زمین کا نصف قطر ہے۔ اس لیے نصف قطر کی سمت میں حرکت کی صورت میں توانائی کی مساوات

$$\tfrac{1}{2} \text{م ع}^2 - \frac{\text{م ج و}^2}{\text{لا}} = \text{مستقل} \quad \ldots\ldots\ldots (16)$$

ہے۔ (مقابلہ کرو دفعہ ۱۶ کے ساتھ)

۱۹- حرکی اکائیاں اور ان کے ابعاد-

خواہ کوئی پیمانوی مقدار ہو اُس کو ایک عدد سے مشخص کیا جاسکتا ہے، یہ عدد اُس نسبت کو ظاہر کرتا ہے جو اِس مقدار اور اُسی قسم کے کسی معیار یا اکائی مقدار کے درمیان ہوتی ہے- یہ عدد صریحاً منتخبہ اکائی کی مقدار کے بالعکس متناسب ہوگا-

حرکیات کے کسی "مطلق" نظام میں اساسی اکائیاں، کمیت، طول، اور وقت کی اکائیاں ہوتی ہیں- ان کو اختیاری طور پر اور آزادانہ مقرر کیا جاسکتا ہے لیکن باقی تمام اکائیاں اِن سے ماخوذ ہوتی ہیں اور بالکل ان پر منحصر ہوتی ہیں- ہم اِن کی مقداروں کو علی الترتیب م، ل، ت سے تعبیر کرینگے-

اب ہم مختلف ماخوذ اکائیوں کے ابعاد معلوم کرینگے- یہ اکائیاں رفتار اور اسراع کی اکائیوں کے علاوہ ہونگی کیونکہ ہم اِن پر دفعہ ۴ میں بحث کرچکے ہیں-

اکائی کثافت اُس اکائی کمیت کی کثافت ہے جو اکائی حجم میں یکساں طور پر پھیلی ہوئی ہو، اس لیے اس کی علامت $\frac{م}{ل^{۳}}$ یا م $ل^{-۳}$ ہے-

اکائی معیار حرکت اُس اکائی کمیت کا معیارِ حرکت ہے جو اکائی رفتار سے حرکت کر رہا ہو- اس لیے اس کی علامت $\frac{م ل}{ت}$ یا م ل $ت^{-۱}$ ہے-

اکائی قوت وہ ہے جو فی اکائی وقت اکائی معیارِ حرکت پیدا کرتی ہے اور اس لیے وہ $\left(\frac{م ل}{ت}\right) \div ت$ یا $\frac{م ل}{ت^{۲}}$ یا م ل $ت^{-۲}$ ہے-

تعبیر ہوتی ہے۔

کام کی یا توانائی بالقوہ کی اکائی وہ کام ہے جو اکائی قوت اکائی طول میں سے عمل کرکے انجام دیتی ہے، اس لیے اس کی علامت $\left(\frac{\text{مل}}{\text{ت}^2}\right)\times\text{ل}$ یا $\frac{\text{مل}^2}{\text{ت}^2}$ یا $\text{مل}^2\,\text{ت}^{-2}$ ہے۔

توانائی بالحرکت کی اکائی اُس اکائی کمیت کی توانائی بالحرکت ہے جو اکائی رفتار سے حرکت کر رہا ہو۔ چنانچہ اس کی علامت $\text{م}\times\left(\frac{\text{ل}^2}{\text{ت}^2}\right)$ یا $\frac{\text{مل}^2}{\text{ت}^2}$ یا $\text{مل}^2\,\text{ت}^{-2}$ ہے

دباؤ کی شدت یا زور (دیکھو سکونیات دفعہ ۹۰ اور ۱۳۶) کی اکائی ماسکونیات یا لچک میں فی اکائی رقبہ اکائی قوت کی شدت ہے۔ اس لیے وہ علامت $\left(\frac{\text{مل}}{\text{ت}^2}\right)\div\text{ل}^2$ یا $\frac{\text{م}}{\text{ل ت}^2}$ یا $\text{م ل}^{-1}\,\text{ت}^{-2}$ سے تعبیر ہوتی ہے۔ چونکہ فساد صرف ایک نسبت ہے، اس لیے یہ لچک کے قدروں، مثلاً ینگ کا مقیاس، کے ابعاد بھی ہیں[1]

کسی عام حرکیاتی مساوات میں یعنے اُس مساوات میں جو درست رہے
خواہ مطلق اکائیوں کا کوئی نظام اختیار کیا جائے ہر رقم کے ابعاد ایک ہی ہونے (۴۷)
چاہئیں۔ کیونکہ اگر ایسا نہ ہو تو اختیار کردہ اساسی اکائیوں میں تبدیلی کرنے سے مختلف رقموں کی عددی قیمتیں مختلف تناسبوں میں بدل جائینگی۔ اس کی ایک مثال ہمیں توانائی کی مساوات میں ملتی ہے (دفعہ ۱۰۸) جس میں توانائی بالحرکت اور توانائی بالقوہ کے ابعاد ایک ہی ہیں یعنے $\left(\frac{\text{مل}^2}{\text{ت}^2}\right)$۔ یہ اصول ضابطوں کی صحت کا امتحان

[1] سکونیات کے دفعہ ۱۳۸ میں دی ہوئی عددی قیمتیں تجاذبی اکائیوں میں ہیں۔ ان کو مطلق پیمایش میں تحویل کرنے کے لیے انہیں ج سے ضرب دینا چاہیے۔

کرنے میں نہایت مفید ہے۔

ایک اور لحاظ سے بھی ابعاد پر غور کرنا مفید ہے چنانچہ اِس سے کسی مخصوص مسئلہ کے نتیجہ میں جس طریقہ پر مقداریں داخل ہونگی اس کا ایک حد تک اندازہ لگانے میں مدد ملتی ہے۔

مثلاً اگر ہم یہ مان لیں کہ ایک معلومہ رقاص کے چھوٹے اہتزاز کا دَور ایک محدود مقدار ہے تو ہمیں فوراً یہ معلوم ہو جاتا ہے کہ اُس کو $\sqrt{\frac{\text{ل}}{\text{ج}}}$ کے متناسب ہونا چاہیے۔ کیونکہ وہ عنصر جن پر اس کا دارومدار ہو سکتا ہے صرف لنگر کی کمیّت (م)، ڈوری کا طول (ل)، اور زیرِ بحث مقام پر ج کی قیمت ہیں۔ اِن علامتوں سے جو جملہ حاصل ہو سکتا ہے وہ صرف اُوپر کا جملہ ہے کیونکہ اُن کے ابعاد صرف ایک وقت کے ابعاد میں تحویل ہوتے ہیں۔

نیز اگر ایک جسم ایک قوت کے تحت ہو جو فاصلہ کے مربع کے بالعکس متناسب ہے تو فاصلہ ج سے قوت کے کسی دیے ہوئے مرکز میں گِرنے کا وقت صرف ج پر اور مستقل (مہ) پر جو اکائی فاصلہ پر کے اسراع کو تعبیر کرتا ہے منحصر ہوگا۔ مہ کے ابعاد جو ایسے ہیں کہ $\frac{\text{مہ}}{\text{ل}^{2}}$ ایک اسراع ہے $\text{ل}^{3}\,\text{ت}^{-2}$ ہونے چاہییں۔ پس اگر ہم یہ مان لیں کہ زیرِ بحث وقت $\text{ج}^{\text{ف}}\,\text{مہ}^{\text{ق}}$ کے متناسب ہے جہاں ف، ق کو معلوم کرنا ہے تو ضابطہ کے ابعاد $\text{ل}^{\text{ف}}(\text{ل}^{3}\,\text{ت}^{-2})^{\text{ق}}$ یا $\text{ل}^{\text{ف}+3\text{ق}} \times \text{ت}^{-2\text{ق}}$ ہونگے۔ اس لیے

$$\text{ف} + ۳\text{ق} = ۰ \text{،} \quad -۲\text{ق} = ۱$$

یا ف = $\frac{۳}{۲}$ اور ق = $-\frac{۱}{۲}$ اور اس لیے مطلوبہ وقت $\sqrt{\frac{\text{ج}^{3}}{\text{مہ}}}$ کے متناسب ہوگا۔

اِس استدلال کو زیادہ واضح شکل میں اس طرح پیش کیا جا سکتا ہے کہ ہم "مشابہ نظاموں" یا (زیادہ صحیح طور پر) "مشابہ نظاموں کی مشابہ حرکتوں" پر غور کریں۔[1] مثلاً ہم مساوی تناسب

---

[1] استدلال کے اِس طریقہ کی ابتدا اصل میں جے۔ بی۔ فوریر (J.B. Fourier) (۱۷۶۸ تا ۱۸۳۰) نے اپنی کتاب Theorie analytique de la chaleur (۱۸۲۲ء) میں پیش کی ہے۔

$$\frac{\text{فر}^2\text{لا}}{\text{فرت}^2} = -\frac{\text{مہ}}{\text{لا}^2} \text{ ، } \frac{\text{فر}^2\text{لاَ}}{\text{فرتَ}^2} = -\frac{\text{مہَ}}{\text{لاَ}^2} \quad \ldots\ldots\ldots (۱)$$

(۴۸) پر غور کر سکتے ہیں جو اُن دو ذرّوں سے متعلق ہیں جو جداگانہ قوت کے دو مختلف مرکزوں میں

مقدار	ابعاد	اکائیاں
کمیّت	م	گرام کلوگرام
طول	ل	سمر (سنتی میتر) میتر
وقت	ت	ثانیہ
رفتار	ل / ت	سمر / ثانیہ میتر / ثانیہ
اسراع	ل / ت²	سمر / ثانیہ² میتر / ثانیہ²
حجمی کثافت	م / ل³	گرام / سمر³
سطحی کثافت	م / ل²	گرام / سمر²
خطی کثافت	م / ل	گرام / سمر کلوگرام / میتر
قوت	م ل / ت²	گرام، سمر / ثانیہ² (ڈائین) کلوگرام، میتر / ثانیہ²
کام توانائی جفت	م ل² / ت²	گرام، سمر² / ثانیہ² (ارگ) کلوگرام، میتر² / ثانیہ² (جول)
طاقت	م ل² / ت³	گرام، سمر² / ثانیہ³ کلوگرام، میتر² / ثانیہ³ (واٹ)
زور لچک کے قدر	م / ل ت²	گرام / سمر، ثانیہ² کلوگرام / میتر، ثانیہ²
جمود کا معیار	م ل²	گرام، سمر² کلوگرام، میتر²
زاویئ رفتار	ت⁻¹	ثانیہ⁻¹
زاویئ معیارِ حرکت	م ل² / ت	گرام، سمر² / ثانیہ کلوگرام، میتر² / ثانیہ

کر رہے ہیں جہاں قوتیں فاصلہ کے مربع کے بالعکس متناسب ہیں ۔ یہ ظاہر ہے کہ
لاَ ، لا کے ساتھ ایک مستقل نسبت اور تَ ، ت کے ساتھ ایک مستقل نسبت میں

ہو سکتا ہے بشرطیکہ

$$\frac{\text{لا}}{\text{ت}^{2}} : \frac{\text{لاَ}}{\text{تَ}^{2}} = \frac{\text{مہ}}{\text{لا}^{2}} : \frac{\text{مہَ}}{\text{لاَ}^{2}} \quad \cdots\cdots\cdots (۲)$$

اور بشرطیکہ ابتدائی شرطوں کے درمیان مناسب متناظر ہو۔ رشتہ (۲) (۴۹)

$$\text{ت} : \text{تَ} = \frac{\text{لا}^{\frac{3}{2}}}{\text{مہ}^{\frac{1}{2}}} : \frac{\text{لاَ}^{\frac{3}{2}}}{\text{مہَ}^{\frac{1}{2}}} \quad \cdots\cdots (۳)$$

کے معادل ہے جہاں ت اور تَ وقت کے کوئی دو متناظر وقفے ہیں اور لا اور لاَ قوت کے مرکزوں سے کوئی دو متناظر فاصلے ہیں۔ اس کی ایک مخصوص صورت کے طور پر فرض کرو کہ فاصلوں ف، فَ سے سکون سے مرکزوں میں گرنے کے وقت علی الترتیب $ت_1$ اور $ت_2$ ہیں تو

$$\text{ت} : \text{تَ} = \frac{\text{ف}^{\frac{3}{2}}}{\text{مہ}^{\frac{1}{2}}} : \frac{\text{فَ}^{\frac{3}{2}}}{\text{مہَ}^{\frac{1}{2}}} \quad \cdots\cdots (۴)$$

گذشتہ صفحہ پر جو جدول دی گئی ہے اُس میں اُن اہم مقداروں کی فہرست درج ہے جو حرکیات میں واقع ہوتی ہیں، ان کے ساتھ وہ ابعاد لکھ دیے گئے ہیں جو کسی مطلق نظام میں اِن مقداروں کے ہوتے ہیں۔ س۔گ۔ث نظام میں مختلف اکائیوں کی تشخیص کا مختصر طریقہ اور دیگر میتری نظام بھی درج کر دیے گئے ہیں اور ساتھ ہی یہ بھی بتا دیا گیا ہے کہ کسی مخصوص اکائیوں کے لیے کیا خاص نام جاری ہیں۔ س۔گ۔ث اکائیوں کو بہ خط عربی لکھا گیا ہے۔

کم سے کم وقت

√ (۲س / ج × وف / ر (ف - ر))

لگیگا اور یہ کہ اعظم رفتار

√ (۲ ج س × ر (ف - ر) / وف)

ہوگی جہاں ٹرین کا وزن و (ٹنوں میں) ہے

اگر ف = ۲۱ ٹن، و = ۸۰۰ ٹن، ر = ۱۲ ٹن، س = ایک میل تو وقت اور اعظم رفتار محسوب کرو۔ [۴ منٹ، ۳۰ میل فی گھنٹہ]

۵۔ ریل کا ایک ڈبہ میلان ع کے راستہ پر ایک مستقل رفتار سے نیچے وار حرکت کرسکتا ہے۔ میلان ب (> ع) کے راستہ پر اس کا اسراع نیچے وار کیا ہوگا اگر یہ مان لیا جائے کہ رگڑ کی مزاحمت اور عمادی دباؤ میں نسبت ہر صورت میں وہی ہے۔ [جیب (ب - ع) / جم ع × ج]

۶۔ ایک ٹرین پوری رفتار سے جارہی ہے، اس کا ایک ڈبہ ایک اسٹیشن سے فاصلہ ل پر اس سے علٰحدہ ہو جاتا ہے۔ اگر یہ ڈبہ اسٹیشن پر پہنچ کر ساکن ہو جائے تو ثابت کرو کہ اُس وقت ٹرین کا باقی حصہ اسٹیشن سے آگے فاصلہ ھ ل / (ھ - م) پر ہوگا جہاں کُل ٹرین کی کمیت ھ اور ڈبہ کی کمیت م ہے۔ (فرض کرلو کہ انجن کی کھینچ مستقل ہے اور اس کے کسی حصہ پر مزاحمت مستقل اور اس کے وزن کے متناسب ہے)۔

۷۔ ایک ذرہ ایک مستقل قوت کے تحت حرکت کر رہا ہے۔ ثابت کرو کہ وقت کے کسی وقفہ میں اس کی اوسط توانائی بالحرکت

۱/۶ م (ع۱² + ع۱ ع۲ + ع۲²)

مثالیں ۲

۱۔ ایک غبارہ جس کی اصلی کمیت ھر ہے اسراع ع کے ساتھ گر رہا ہے۔ لداؤ کی کتنی مقدار غبارہ سے باہر پھینک دی جائے کہ اُس کا اُوپر وار اسراع ع ہو جائے۔ (ہوا کی رگڑ کی مزاحمت کو نظرانداز کرو)۔

[۲ ھر ع \ (ع + ج)]

۲۔ ایک کمیت م ایک ثابت اُفقی تختہ پر ساکن ہے۔ اس پر ایک اُفقی دھکا پڑتا ہے جس کی وجہ سے اُس کی رفتار ع ہو جاتی ہے۔ وہ وقت جس میں وہ ساکن ہوگی اور وہ فاصلہ جو وہ طے کریگی معلوم کرو اگر رگڑ کی قدر مہ ہو۔

اگر تختہ (کمیت ھر) ایک اُفقی میز پر ہو اور حرکت کرنے میں آزاد ہو تو ثابت کرو کہ وہ حرکت میں نہیں آئیگا جب تک کہ تختہ اور میز کے درمیان رگڑ کی قدر

مہ × م / (ھر + م)

سے کم نہ ہو جائے۔

۳۔ ایک رائفل سے جس کی نالی ۲½ فٹ لمبی ہے ایک اونس وزن کی گولی رفتار ۱۰۰۰ فٹ فی ثانیہ سے نکلتی ہے۔ گولی کی توانائی (فٹ پونڈ میں) معلوم کرو۔

نیز وہ شرح (اسپی طاقت میں) معلوم کرو جس سے گیسیں گولی پر عین دہانہ سے نکلنے کے پیشتر، کام کر رہی تھیں، یہ فرض کر لو کہ گولی پر کا دباؤ اثنائے اخراج میں مستقل ہے۔ [شرح ۱۰٫۷ توانائی ۹۷۶۶٫۶]

۴۔ اگر ایک ٹرین پر جرّی قوت (ٹنوں میں) ف ہو اور مزاحمت ر ہو تو ثابت کرو کہ سکون سے سکون تک فاصلہ س طے کرنے میں

ہے جہاں ابتدائی اور آخری رفتاریں ۱ۓ اور ۲ۓ ہیں۔
ثابت کرو کہ یہ توانائی وقفہ کے وسطی لمحہ پر کی توانائی بالحرکت سے بڑی ہے لیکن اُس توانائی بالحرکت سے کم ہے جو ذرّہ کے ابتدائی اور آخری محلوں کے وسطی محل پر ذرہ کی ہے۔

۸۔ ایک پونڈ کی ایک کمیت پر ایک ہتھوڑے کی ضرب پڑتی ہے جس سے اُس کی رفتار ایک فٹ فی ثانیہ ہو جاتی ہے۔ دھکّے کے دَوران میں بڑے سے بڑا دباؤ معلوم کرو اگر یہ فرض کر لیا جائے کہ دباؤ صفر سے اعظم تک مستقل شرح سے بڑھتا ہے اور پھر اعظم سے صفر تک مستقل شرح سے گھٹتا ہے اور دھکّے کا وقفہ ۰۰۱ء ثانئے ہے۔ [$62\frac{1}{2}$ پونڈ]

۹۔ ایک منحنی مرتسم کیا گیا ہے جس میں ایک ذرہ کی توانائی بالحرکت مُعیّن سے اور فاصلہ طے شدہ فصلہ سے تعبیر کیا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ قوت منحنی کے ڈھال سے تعبیر ہوتی ہے۔

۱۰۔ اگر ایک ذرّہ پر کام مستقل شرح سے انجام پائے تو ثابت کرو کہ وہ رفتار جو ذرّہ سکون سے فاصلہ لا طے کرنے میں حاصل کرتا ہے $لا^{\frac{1}{3}}$ کے متناسب ہے۔

۱۱۔ دو ٹرینوں کی کمیتیں مساوی ہیں اور انھیں چکنی ہموار پٹڑیوں پر انجن کھینچ رہے ہیں جن میں سے ایک مستقل کھینچ عائد کرتا ہے اور دوسرا، مستقل شرح سے کام کرتا ہے۔ اگر دو مختلف لمحوں پر ان کی رفتاریں مساوی ہوں تو ثابت کرو کہ اِن لمحوں کے درمیانی وقفہ میں دوسری ٹرین پہلی ٹرین سے زیادہ فاصلہ طے کریگی اور اِس وقفہ کے وسطی لمحہ پر دونوں انجن مساوی شرحوں سے کام کر رہے ہونگے۔

مثالیں ۳

(سادہ موسیقی حرکت ۔ رقاص وغیرہ)

۱۔ ایک افقی شیلف ایک سادہ موسیقی حرکت کے ساتھ نیچے اور اوپر حرکت کرتا ہے اور موسیقی حرکت کا دَور ½ ثانیہ ہے ۔ وہ بڑے سے بڑا قابل قبول حیطہ معلوم کرو کہ ایک وزن جو شیلف پر رکھا ہوا ہو اچھل کر گرنے نہ پائے ۔

[۲ء۴۴ انچ]

۲۔ ایک رقاص ابتداءً ساکن ہے اور اس کا طول ل ہے ۔ اس کے لنگر پر ایک چھوٹی مستقل اُفقی قوت وقت ت تک عمل کرتی ہے اور پھر رُک جاتی ہے۔ ثابت کرو کہ بعد کے اہتزاز کا حیطہ

$$\frac{۲ع}{ن^۲} \times \text{جب } \tfrac{۱}{۲} \text{ ن ت}$$

ہے جہاں قوت کا اسراعی اثر ع ہے اور $ن = \sqrt{\frac{ج}{ل}}$

۳۔ اگر لندن سے پیرس تک جتنا کے درمیان فاصلہ تقریباً ۲۰۰ میل ہے۔ ایک سُرنگ بنائی جائے تو ثابت کرو کہ ایک ٹرین اِس سرنگ کو صرف جاذبہ کے تحت تقریباً ۴۲ منٹ میں طے کریگی اور اس کی اعظم رفتار تقریباً ۴۴۶ میل فی گھنٹہ ہوگی ۔

۴۔ ۵ پونڈ کی ایک کمیت ایک مرغولی کمانی سے لٹکتی ہے اور یہ دیکھا گیا کہ وہ ۱۶ء۵ ثانیوں میں ۵۰ مکمل ارتعاش کرتی ہے۔ پونڈوں میں وہ قوت معلوم کرو جو کمانی کو ایک انچ تنائے ۔ نیز اہتزاز کا دَور معلوم کرو اگر ۵ پونڈ کی زائد کمیت اُس پر لگا دی جائے۔

[۳ء۶۷ ، ء۴۷ ثانیے]

۵ ۔ کمیت مر ایک نقطہ و سے ایک مرغولی کمانی پر لٹک رہی ہے ۔ جب نقطہ و ساکن ہوتا ہے تو انتصابی اہتزازوں کا دَور ایک ثانیہ ہے ۔ اگر و انتصابی خط میں ایک سادہ موسیقی حرکت جاری کرے جس کا حیطہ ایک انچ اور دَور $\frac{1}{2}$ ثانیہ ہو تو مر کے قسری اہتزاز کا حیطہ معلوم کرو ۔ مر اور و کی ہیئتوں کے درمیان کیا رشتہ ہے ؟

۶ ۔ ایک مائع پیما مائع میں سیدھا تیرتا ہے ، اس کا ہٹاؤ ۳۰ مکعب سمر ہے اور اس کے تنے کا قطر ۸ء سمر ہے ۔ ثابت کرو کہ ایک چھوٹے انتصابی اہتزاز کا وقت ۵۵ء۱ ثانیہ ہے ۔

۷ ۔ ثابت کرو کہ سادہ موسیقی حرکت میں اگر ابتدائی ہٹاؤ لا اور ابتدائی رفتار ع ہو تو حیطہ

$$\sqrt{لا^2 + \frac{ع^2}{ن^2}}$$

ہوگا اور ابتدائی ہیئت

$$جیب^{-1} \frac{ع}{ن\, لا}$$

ہوگی ۔

۸ ۔ ثابت کرو کہ سادہ موسیقی حرکت میں اگر رفتار کو دفعتاً و سے و + مف و میں تبدیل کیا جائے تو حیطہ (ا) اور ہیئت (فہ) کی تبدیلیاں

$$مف\, ا = -\frac{مف\, و}{ن}\, جب\, فہ \text{ ، } مف\, فہ = -\frac{مف\, و}{ن\, ا}\, جم\, فہ$$

سے حاصل ہونگی ۔

۹ ۔ ثابت کرو کہ ایک رقاص کے چھوٹے اہتزاز میں اوسط توانائی بالحرکت اور اوسط توانائی بالقوہ مساوی ہوتی ہیں ۔

۱۰ ۔ ثابت کرو کہ سکون سے سکون تک ایک رقاص کی نصف جنبش میں لنگر کی اوسط رفتار اعظم رفتار کا ۶۳۷ء ہوتی ہے ۔

۱۱ - ایک رقاص کو زمین کی سطح کے اوپر ایک میل ارتفاع تک پہنچایا گیا ہے - اس کے طول کا کتنا حصہ گھٹانا چاہیے کہ وہ سابقہ دور میں اہتزاز کر سکے۔
[۱/۲۰۰۰]

۱۲ - ایک وزن ایک ثابت نقطے سے ایک ڈوری کے ذریعہ جس کا طول ۱۰ فٹ ہے لٹک رہا ہے۔ اگر اس کو اِس کے زیر ترین محل سے رفتار ۲½ فٹ فی ثانیہ کے ساتھ چلا دیا جائے تو ساکن ہونے سے پہلے وہ کتنی دُور جھولیگا۔نیز پہلے ۲½ فٹ طے کرنے میں وہ کتنے ثانیہ لیگا ؟ [۲ء۴۴ فٹ، ۱ء۰۶ ثانیہ]

۱۳ - ایک سادہ رقاص ریل کے ایک ڈبہ کی چھت سے لٹک رہا ہے۔ وہ انتصابی رہتا ہے جبکہ ٹرین ۳۰ میل فی گھنٹہ کی رفتار سے جا رہی ہو۔ بریک ڈالنے پر رقاص ۳° کے زاویہ میں سے جھولتا ہے۔ ثابت کرو کہ ٹرین تقریباً ۵۸۳ گز کے فاصلہ میں ساکن ہو جائیگی، مزاحمت کو مستقل فرض کیا گیا ہے۔

۱۴ - ایک اُفقی برآمدہ بیرم کا طول ل اور اس کی تراشش کا رقبہ سہ ہے۔ اس کے سِرے سے ایک کمیّت م لٹک رہی ہے جو انتصابی اہتزاز کرتی ہے جس کا دَور ت ہے۔ ثابت کرو کہ برآمدہ بیرم کے لیے ینگ کے مقیاس کی قیمت مطلق اکائیوں میں

$$\frac{۴ \pi^۲ م ل^۳}{۳ سہ ک^۲ ت^۲}$$

ہے جہاں تراش کا گردشی نصف قطر اس کے مرکز میں سے گذرنے والے ایک اُفقی خط کے گرد، ک ہے۔

۱۵ - ایک کمیّت م طول ل والے ایک اُفقی ڈنڈے کے وسطی نقطہ سے لٹکی ہوئی ہے اور ڈنڈا سِروں پر سہارا گیا ہے۔ اگر م کے انتصابی اہتزازوں کا دَور ت ثانیہ ہو تو ڈنڈے کی خمیدگی کی استواری جمود کو نظر انداز کر کے معلوم کرو۔ (دیکھو سکونیات، دفعہ ۱۴۶) $\left[\frac{۱}{۱۲}\pi^۲ \frac{م ل^۳}{ت^۲}\right]$

۱۶ - ایک ڈوری جس کے سِرے ثابت ہیں تناؤ ف کے ساتھ

تنی ہوئی ہے ۔ ثابت کروکہ اس کے ایک دیے ہوئے نقطہ پر قوت لگاکر ایک
چھوٹا جانبی ہٹاؤ لا پیدا کرنے کے لئے جو کام مطلوب ہے وہ

$$\frac{\text{ا + ب}}{\text{۲ ا ب}}\ \text{ف لا}^{۲}$$

ہے جہاں سروں سے اِس نقطہ کے فاصلے ا ، ب ہیں ۔
اِس امر کی تصدیق کروکہ یہ اُس کام کے مساوی ہے جو ڈوری کے
طول کو تناؤ ف کے خلاف بقدر لا کے بڑھانے کے لیے مطلوب ہوتا ہے ۔
۱۷ ۔ ایک ذرّہ م کو ایک ہلکے تار سے باندھا گیا ہے جو دو ثابت نقطوں (۵۳
کے درمیان تناؤ ف سے خوب اچھی طرح تنا ہوا ہے ۔ اگر تار کے اِن
دو سِروں سے ذرّہ کے فاصلے ا ، ب ہوں تو ثابت کروکہ م کے ایک
چھوٹے عرضی اہتزازہ کا دَور

$$۲\pi \times \sqrt{\frac{\text{م}}{\text{ف}} \times \frac{\text{ا ب}}{\text{ا + ب}}}$$

ہے ۔
ثابت کروکہ ایک ایسے تار کے لیے جس کا طول دیا گیا ہو دَور
طویل ترین ہوگا اگر ذرّہ کو وسطی نقطہ پر لگایا گیا ہو ۔
۱۸ ۔ ایک ذرّہ کو غیر قائم توازن کے محل سے ذرا ہٹایا گیا ہے ۔
حرکت کی ابتدائی منزل کے لیے مکان زمانی منحنی کی مختلف شکلیں بناؤ ۔
۱۹ ۔ اگر دفعہ (۱۴) میں خلل انداز قوت ف (ت) متناسب ہو
$\text{و} - \text{ن}^{۲}\text{ت}^{۲}$ کے ، تو ثابت کروکہ وہ سادہ موسیقی ارتعاش جو حاصل ہوگا

$$\text{لا} = \frac{\text{ع}}{\text{ن}} \left(\text{و} - \tfrac{۱}{۲}\text{ن}^{۲}\text{ت}^{۲}\right) \text{جب ن ت}$$

سے معلوم ہوگا جہاں ع وہ رفتار ہے جو اِسی مقدار کے ایک فوری دھکے سے

پیدا ہوتی ہے۔

[اس کا انحصار ضابطہ

$$\int_{۰}^{\infty} و^{-\frac{لا^{۲}}{ا^{۲}}} \text{ جم } ۲\, ب\, لا\; فرلا = \frac{۱}{۲}\sqrt{\pi\, ا\, و^{-ا^{۲}ب^{۲}}}$$

سے ہے۔]

مثالیں ۴

(متغیر جاذبہ وغیرہ)

۱۔ ایک ذرّہ کو سطح زمین سے اُوپر وار ایک ایسی رفتار سے پھینکا گیا ہے جو ذرّہ کو ارتفاع ف تک لے جاتی اگر جاذبہ یکساں ہوتا۔ اگر جاذبہ کے تغیر کا لحاظ رکھا جائے اور ہوا کی مزاحمت کو نظرانداز کیا جائے تو ثابت کرو کہ وہ ارتفاع جس پر ذرّہ پہنچیگا بقدر $\frac{ف^{۲}}{(ا - ف)}$ کے بڑا ہوگا جہاں ا، زمین کا نصف قطر ہے۔

۲۔ ایک ذرّہ کو انتصاباً اُوپر وار ایک ایسی رفتار سے پھینکا گیا ہے جو اس کو لاتناہی تک لیجانے کے لیے عین کافی ہے۔ ثابت کرو کہ ارتفاع ف پر پہنچنے کا وقت

$$\frac{۱}{۳}\sqrt{\frac{۲ا}{ج}\left\{\left(۱ + \frac{ف}{ا}\right)^{\frac{۳}{۲}} - ۱\right\}}$$

ہے جہاں ا، زمین کا نصف قطر ہے۔

۳۔ اگر ایک ذرّہ کو سطح زمین سے اُوپر وار ایک میل فی ثانیہ کی رفتار سے پھینکا جائے تو اُن ارتفاعوں کے درمیان فرق (تقریباً) معلوم کرو جو ذرّہ

(۱) مستقل جاذبہ کے مفروضہ پر، (۲) متغیر جاذبہ کے مفروضہ پر حاصل کریگا جہاں دوسری صورت میں جاذبہ زمین کے مرکز سے فاصلہ کے مربع کے بالعکس متناسب ہے۔ [امیل ۱۸۷۲]

(۵ ۴ ـ اگر ایک ذرّہ ایک بہت بڑے فاصلہ سے سکون سے زمین پر گرے تو اس فاصلہ کے پہلے اور دوسرے نصف حصّوں کو طے کرنے کے اوقات نسبت ۹ : ۲ (تقریباً) میں ہونگے۔

۵ ـ اگر ایک ذرّہ ایک مرکزی کشش کے تحت جو فاصلہ کے مکعب کے بالعکس متناسب ہے ایک خطِ مستقیم میں حرکت کرے تو ثابت کرو کہ مکان زمانی منحنی ایک مخروطی ہے۔

یہ منحنی کس شرط کے تحت علی الترتیب ایک ناقص، مکافی، یا زائد ہوگا؟ اُس صورت کا امتحان کرو جس میں قوت دافعی ہو۔

۶ ـ ایک ذرّہ قوت کے ایک مرکز کی جانب جس کا اسراعی اثر $\frac{\text{مہ}}{(\text{فاصلہ})^{۳}}$ ہے فاصلہ ا سے سکون سے حرکت کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ مرکز میں گرنے کا وقت $\frac{\text{ا}^{۲}}{\sqrt{\text{مہ}}}$ ہے۔

۷ ـ ایک ذرّہ تجاذبی قوت کے ایک مرکز کے تحت جس کا اسراعی اثر $\text{مہ} \times (\text{فاصلہ})^{\text{ن}}$ ہے فاصلہ ا سے سکون سے حرکت کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ مرکز میں گرنے کا وقت

$$\frac{\text{ا}^{\frac{۱}{۲}(۱-\text{ن})}}{\sqrt{\text{مہ}}}$$

کے متناسب ہے۔

۸ - ایک ذرّہ قوت کے دو مساوی مرکزوں کے تحت ہے جن کا اسرائی اثر $\frac{\text{مہ}}{(\text{فاصلہ})^{2}}$ ہے - اگر وہ اِن دونوں مرکزوں سے مساوی فاصلوں ا سے سکون سے حرکت کرے تو حرکت مابعد مرتسم کرو اور ثابت کرو کہ اعظم رفتار

$$\sqrt{\text{۲مہ} \times \frac{\text{ا - ب}}{\text{اب}}}$$

ہے جہاں ۲ب، مرکزوں کے درمیان فاصلہ ہے -

تیسرا باب

دو ابعادی حرکیاتِ محض

۲۰- رفتار

وہ کُل ہٹاؤ جو وقت کے ایک دیے ہوئے وقفہ میں ایک متحرک ذرّہ طے کرتا ہے سمتی کی نوعیت کا ہوتا ہے اور اُس خطِ مستقیم سے تعبیر کیا جاتا ہے جو متحرک ذرّہ کے ابتدائی اور آخری محلوں کو ملاتا ہے یا کسی مساوی اور متوازی خطِ مستقیم سے جو اُسی جہت میں کھینچا گیا ہو۔ متواتر ہٹاؤں کو صریحاً اُس قانون کی بموجب مرکب کیا جاسکتا ہے جو سمتیوں کو جمع کرنے کا ہے۔

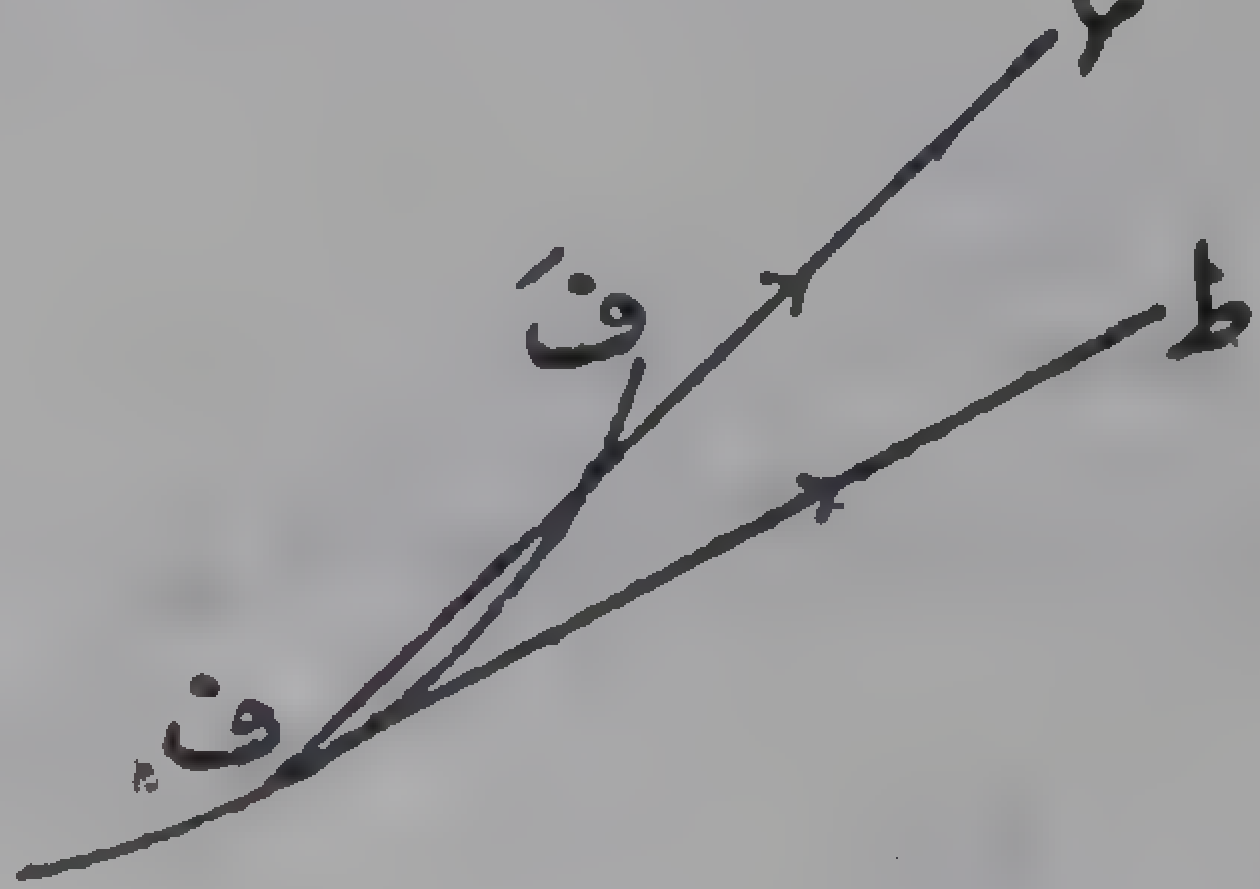
اگر وقت کے مساوی وقفوں میں ہٹاؤ ہر لحاظ سے مساوی ہوں تو رفتار کو مستقل کہا جاتا ہے اور اس کو اُس سمتی سے مشخص کیا جاسکتا ہے جو ہٹاؤ فی اکائی وقت کو تعبیر کرتا ہے۔

عام صورت میں رفتار کی تعریف حاصل کرنے کے لیے فرض کرو کہ لمحوں ت، ت + مف ت پر متحرک نقطہ کے محل علی الترتیب ف، فَ ہیں جہاں مف ت کو ابھی چھوٹا نہیں فرض کیا گیا ہے۔ ف فَ کو ایک ایسے نقطہ ع تک خارج کرو کہ

$$\text{ف ۶} = \frac{\text{ف فَ}}{\text{مف تت}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

تب ف ۶ سے[1] وہ چیز تعبیر ہوتی ہے جس کو ہم وقفہ مف تت میں نقطہ کی اوسط رفتار کہہ سکتے ہیں جس کا یہ مطلب ہے کہ ایک نقطہ جو ساوی مستقل رفتار سے حرکت کر رہا ہو وہی ہٹاؤ ف فَ اُسی وقفہ مف تت میں طے کریگا - اگر یہ وقفہ متغیر ہو تو سمتی مختلف قیمتیں اختیار کریگا اور اگر ہم یہ خیال کریں کہ مف تت کو لا انتہا گھٹا دیا گیا ہے تو وہ اُن تمام صورتوں میں جن پر غور کرنا ضروری ہے ایک محدود انتہائی قیمت کی طرف مائل ہوگا۔ اِس انتہائی سمتی کو اُس رفتار کی تعریف کے طور پر اختیار کیا جاتا ہے جو متحرک ذرہ کی لمحہ ت پر ہے۔ اختصاراً "لمحہ ت پر کی رفتار" وہ اوسط رفتار ہے جو لا متناہی چھوٹے وقفہ میں جس کی ابتداء ت سے ہوتی ہے حاصل ہوتی ہے۔ اس کی سمت اُس مماس کی سمت ہے جو راستہ کے نقطہ ف پر کھینچا گیا ہو، اس کے علاوہ، اگر منحنی کی قوس کو س سے تعبیر کیا جائے جس کو منحنی پر کے کسی ثابت نقطہ سے پیمایش کیا گیا ہو تو وتر ف فَ انتہا میں قوس مف س کے ساتھ نسبتِ مساوات میں ہوگا اور اس لیئے ف پر کی رفتار مقدار اور سمت دونوں میں ضابطہ

(۵۶)



شکل ۱۲

$$\text{د} = \frac{\text{فرس}}{\text{فرت}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

سے حاصل ہوگی۔

---

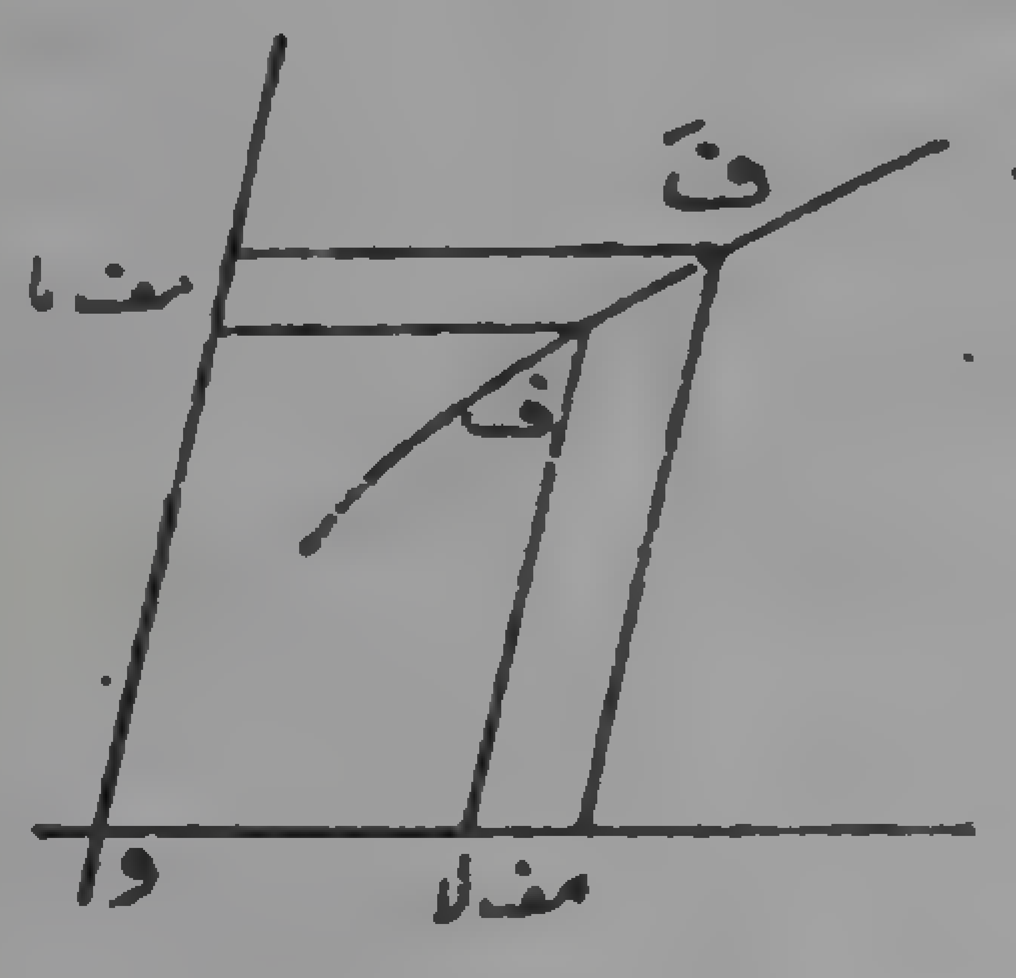
[1] حرفوں کی ترتیب بلاشبہ اہم ہے۔

عمل حساب میں رفتاروں کو، دوسری سمتیوں کی مانند، ان کے اجزائے ترکیبی کے ذریعہ جو محدّدوں کے کسی نظام کے حوالے سے لیے گئے ہوں مشخص کیا جاسکتا ہے۔ مثلاً دو ابعاد میں نقطہ ف کے کارٹیزی محدّد لا، ما ہوں اور فَ کے لا + مف لا، ما + مف ما تو سمتی ف فَ کے ظِل، محدّدوں کے محوروں پر، مف لا، مف ما ہیں اور اس لیے اوسط رفتار فضا ءکے ظِل

$$\frac{\text{مف لا}}{\text{مف ت}} \text{،} \frac{\text{مف ما}}{\text{مف ت}}$$

ہیں۔ پس لمحہ ت پر "ترکیبی رفتاریں" یعنی ف ط کے ظِل محدّدوں کے محوروں پر

$$\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}} \text{،} \frac{\text{فرما}}{\text{فرت}} \quad \text{.........} (۳)$$



شکل ۱۵

ہونگے۔ اِن جملوں سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ محدّدوں کے کسی محور کے متوازی رفتار کا جزو ترکیبی اُس رفتار کے مساوی ہوتا ہے جو اِس محور پر متحرک نقطہ کے ظِل کی ہے۔ روانی ترقیم میں رفتار کے اجزائے ترکیبی کو لا، ما سے اور اصلی رفتار کو سَ سے تعبیر کیا جائیگا۔ فی الحال یہ واضح رہے کہ قائم محوروں کی کوئی قید نہیں ہے۔

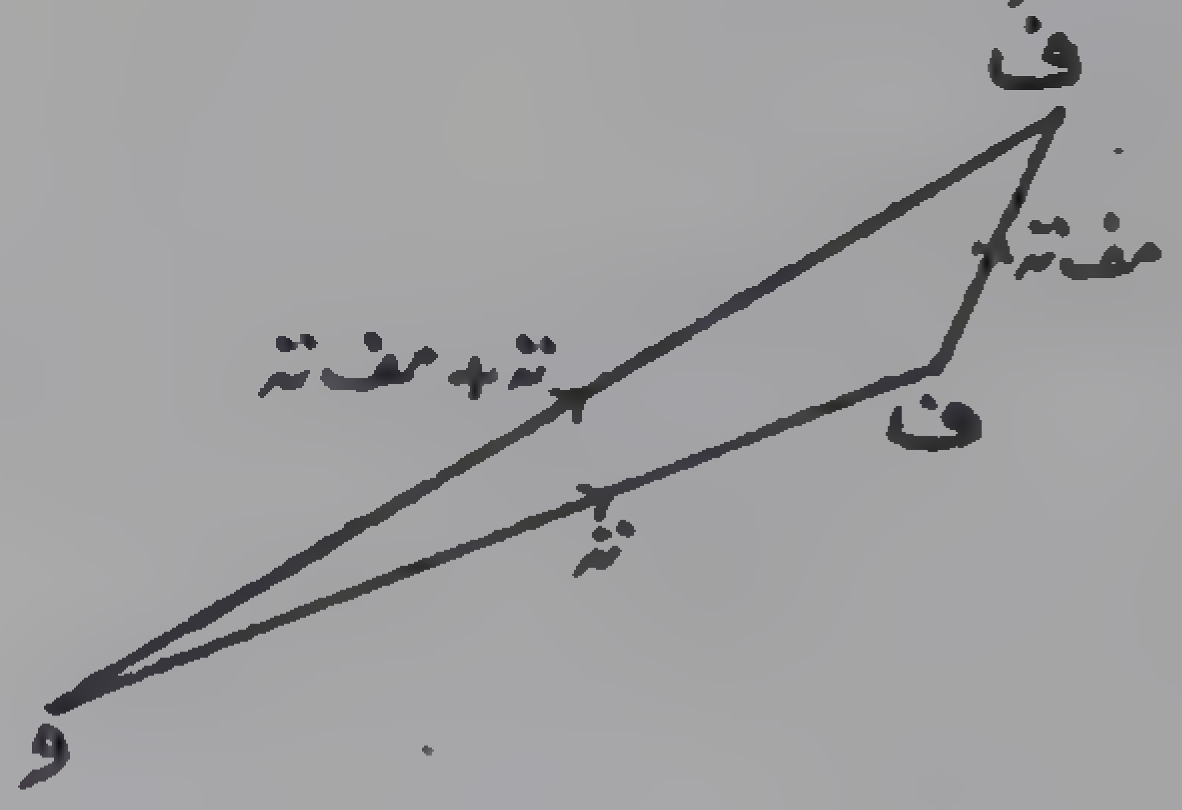
لیکن اگر محور قائم ہوں اور اُس زاویہ کو جو حرکت کی سمت اور محور لا کے درمیان ہے سا سے تعبیر کیا جائے تو اجزائے ترکیبی

$$\text{لا} = \frac{\text{فرلا}}{\text{فرس}} \frac{\text{فرس}}{\text{فرت}} = \text{سَ جم سا ، ما} = \frac{\text{فرما}}{\text{فرس}} \frac{\text{فرس}}{\text{فرت}} = \text{سَ جب سا} \quad ...(۴)$$

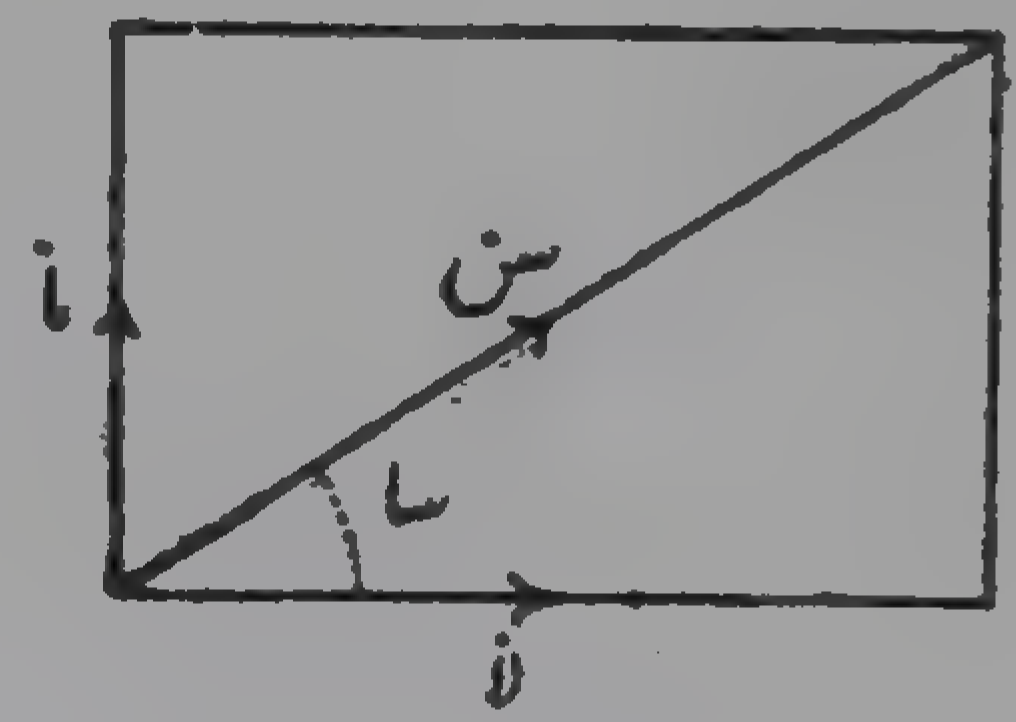
ہونگے اور اس لیے

سن^{2} = لا^{2} + ا^{2} ، مس سا = ا / لا .... (۵)

یہ رشتے قایم تظلیل لینے سے بھی واضح ہوجاتے ہیں۔



شکل ۱۷



شکل ۱۶

رفتار کی تعریف کو سمتیوں کی زبان میں سب سے زیادہ اختصار کے ساتھ بیان کیا جاسکتا ہے۔ اگر کسی ثابت مبداء کے لحاظ سے متحرک نقطہ کا محل سمتی تہ سے تعبیر کیا جائے تو ہم لکھ سکتے ہیں :

وف = تہ، وفَ = تہ+مفتہ ...... (۶)

اور اس لیے

ففَ = فو+وفَ = وفَ - وف = مفتہ

اس لیے وقفہ مف ت میں اوسط رفتار

$$\frac{\text{مفتہ}}{\text{مفت}}$$

سے تعبیر ہوتی ہے اور لمحہ ت پر رفتار

و = فرتہ / فرت = تہ .... (۷)

سے بیان ہوتی ہے

پس رفتار کی تعریف یہ کی جاسکتی ہے کہ وہ محل کی تبدیلی کی شرح ہے بشرطیکہ لفظ "تبدیلی" سے سمتی کا اضافہ مُراد ہو۔

اگر محددوں کے محوروں پر و ف کے ظِل لا، ما سے تعبیر ہوں تو

ت = لا ز + ما ژ .... (۸)

جہاں ز اور ژ، متعلقہ محوروں کے متوازی اکائی سمتیاں ہیں - پس

و = تؔ = لاؔ ز + ماؔ ژ .... (۹)

جس سے (پھر) یہ معلوم ہوتا ہے کہ و کے ظِل لاؔ، ماؔ ہیں۔

۲۱ - رسم الطریق - اسراع (۵۸

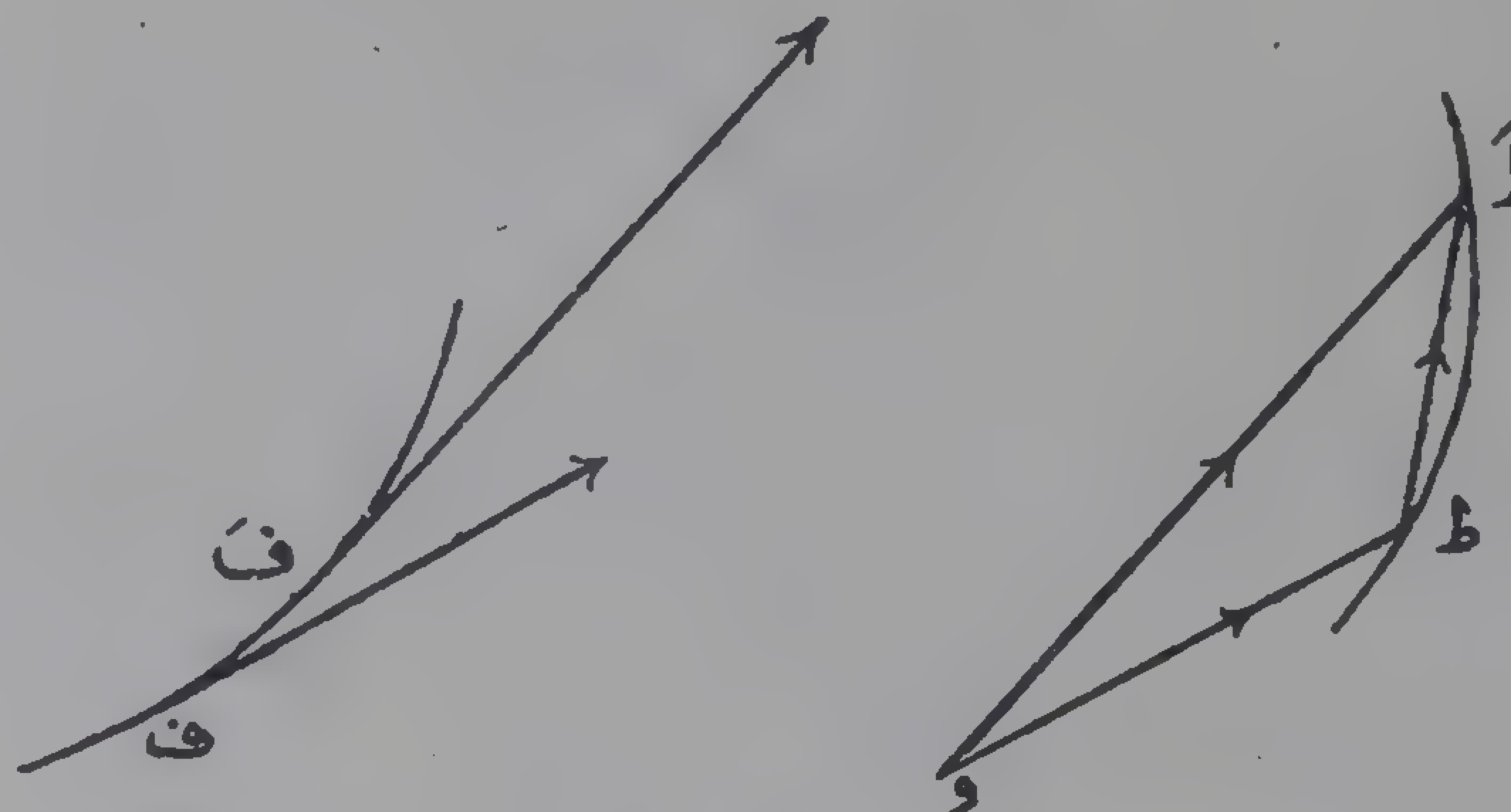
جس طرح رفتار کی یہ تعریف کی جاسکتی ہے کہ وہ محل کی تبدیلی کی شرح ہے عین اسی طرح "اسراع" کی یہ تعریف ہوسکتی ہے کہ وہ رفتار کی تبدیلی کی شرح ہے۔ رفتار کی طرح وہ بھی ایک سمتی ہے جس میں سمت اور مقدار دونوں ہوتے ہیں۔

اگر ایک ثابت نقطہ و سے سمتیاں و ط کھینچی جائیں (شکل ۱۸) جن سے مختلف لمحوں پر ایک متحرک نقطہ کی رفتاریں تعبیر ہوں تو نقاط ط سے ایک منحنی مرتسم ہوگا اور اوپر کی تمثیل سے یہ ظاہر ہے کہ یہ منحنی اسراع کی بحث میں وہی حصّہ لیگا جو رفتار کی تعریف میں متحرک ذرہ کا حقیقی راستہ لیتا ہے۔ اس کے مذکورۂ بالا عمل میں ط کے طریق کے لیے ایک خاص نام تجویز کرنا سہولت بخش ہوگا، انگریزی میں اصطلاح (Hodograph) اِس مقصد کے لیے تجویز ہوئی ہے[۱] اور وہ عام طور پر

---

[۱] یہ تجویز سر ڈبلیو - آر - ہیملٹن (Sir W.R. Hamilton) (۱۸۰۵ تا ۱۸۶۵ء) پروفیسر علم ہیئت ڈبلن کی ہے جو احصاء Calculus of Quaternions. کے موجد ہیں۔

استعمال کی جاتی ہے اگرچہ اس کو بہت موزوں نہیں کہا جاسکتا۔ ہم اِس کو رسم الطریق کہینگے۔



شکل ۱۸

اگر کسی وقفہ کے آغاز اور ختم پر کی رفتاروں کو و ط اور و طَ سے تعبیر کیا جائے تو سمتی ط طَ سے، جو ان کا فرق ہے، پُوری طرح وہ تبدیلی تعبیر ہوگی جو اِس وقفہ میں رفتار میں واقع ہوچکی ہے۔ اگر یہ تبدیلی وقت کے مساوی وقفوں میں ہمیشہ وہی ہو تو ہم کہتے ہیں کہ متحرک ذرّہ کا اسراع مستقل ہے اور یہ اسراع اُس سمتی سے مشخص کیا جاتا ہے جس سے رفتار کی تبدیلی فی اکائی وقت تعبیر ہوتی ہے۔ دیکھو شکل ۲۶ صفحہ ۱۱۴ جس میں دائیں جانب و ا، و ب، و ج، و د، اُن رفتاروں کو تعبیر کرتے ہیں جو وقت کے مساوی وقفوں پر حاصل ہوتی ہیں۔

عام صورت میں اگر لمحوں ت، ت + مف ت پر کی رفتاریں و ط، و طَ سے تعبیر ہوں تو سمتی (۵۹)

$$\frac{\text{ط طَ}}{\text{مف ت}}$$

سے وہ چیز تعبیر ہوگی جس کو ہم وقفہ مف ت میں "اوسط اسراع" کہہ سکتے ہیں، اس کا یہ مطلب ہے کہ ایک مستقل اسراع جو اس اوسط اسراع کے مساوی ہو اُسی وقفہ میں رفتار کی وہی تبدیلی ط ظَ پیدا کریگا۔

اگر مف ت کو لا انتہا گھٹا دیا جائے تو یہ اوسط اسراع بالعموم ایک محدود انتہائی قیمت کی طرف مائل ہوگا، اس انتہائی قیمت کو "لمحہ ت پر کے اسراع" کی تعریف قرار دیا جاتا ہے۔ اس کی سمت اُس مماس کی سمت ہے جو رسم الطریق کے نقطہ ط پر کھینچا گیا ہو اور اُس کی مقدار رسم الطریق پر ط کی رفتار سے حاصل ہوتی ہے۔ مثلاً مستقل اسراع کی صورت میں رسم الطریق ایک خط مستقیم ہوتا ہے جو مستقل رفتار سے مرتسم شدہ ہوتا ہے۔

اگر ہم کارٹیزی محددوں کو خواہ وہ قایم ہوں یا مائل استعمال کریں تو محوروں پر و ط کے ظِل لاَ، ماَ سے تعبیر ہونگے اور اس لیے ط ظَ کے ظِل مف لاَ، مف ماَ سے تعبیر ہونگے۔ اس لیے وقفہ مف ت میں اوسط اسراع کے ظِل

$$\frac{\text{مف لاَ}}{\text{مف ت}} \text{،} \frac{\text{مف ماَ}}{\text{مف ت}}$$

ہونگے۔ اس لیے "اسراع کے اجزائے ترکیبی" یعنے لمحہ ت پر اسراع کے ظِل لاَ، ماَ ہونگے یعنے عام ترقیم میں

$$\frac{\text{فر}^2\text{لا}}{\text{فرت}^2} \text{،} \frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فرت}^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

اس لیے اسراع کے یہ اجزائے ترکیبی اُن اسراعوں کے مماثل ہیں جو محددوں کے محوروں پر متحرک نقطہ کے ظِلوں کے ہیں۔

سمتیوں کی ترقیم میں

$$\text{و ط} = \text{د} \text{،} \ \text{و ظَ} = \text{د} + \text{مف د}$$

اور اس لیے   ط طَ = مف و

پس وقفہ مف ت میں اوسط اسراع $\frac{\text{مف و}}{\text{مف ت}}$ سے تعبیر ہوتا ہے

اور لمحہ ت پر کا اسراع

$$\text{ا} = \frac{\text{فرو}}{\text{فرت}} = \text{و} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٢)$$

ہے۔

نیز چونکہ حسبِ دفعہ (٢٠) مساوات (٩) (٦٠)

$$\text{و} = \text{لاَ ز} + \text{ما زَ} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٣)$$

اس لیے

$$\text{ا} = \text{لاُ ز} + \text{ما زُ} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٤)$$

اگر اسراع ا مستقل ہو تو (٢) کو تکمل کرنے پر

$$\text{نَہ} = \text{و} = \text{ا ت} + \text{ب} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٥)$$

$$\text{نہ} = \tfrac{١}{٢}\,\text{ا ت}^{٢} + \text{ب ت} + \text{ج} \quad \ldots\ldots \quad (٦)$$

جہاں سمتیاں ب، ج اختیاری ہیں۔ اگر اس کی صحیح تعبیر کی جائے تو اِس سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ متحرک ذرّہ کا راستہ ایک قطع مکافی ہے۔

یہ واضح رہے کہ اُوپر کی تعریفیں صرف دو ابعاد میں حرکت کی صورت کے لیے ہی وقف نہیں ہیں۔ وہ ضابطے جو کارٹیزی محدّدوں پر مشتمل ہیں ایک تیسرے محدّد 'ی' کے ادخال سے بڑی آسانی سے تعمیم پذیر ہیں۔

رفتاروں اور اسراعوں کے لیے قطبی محدّدوں کی رقوم میں جو ضابطے حاصل ہوتے ہیں اُن کی تحقیق دفعہ ٨٦ میں کی گئی ہے۔

مثال ١ ۔ فرض کرو کہ ایک نقطہ ف، ایک ثابت نقطہ و کے

گرد مستقل زاویٔ رفتار ن سے لصف قطر ا کا ایک دائرہ مرتسم کرتا ہے۔
و میں سے گذرنے والے قایم محوروں کے لحاظ سے

لا = ا جم طہ، ما = ا جب طہ .... (۷)

جہاں طہ = ن ت + صہ .... (۸)

اس لیے لاَ = ـ ن ا جب طہ، ماَ = ن ا جم طہ .... (۹)

اِس سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ رفتار، و ف کے علی القوایم ہے اور وہ ن ا کے مساوی ہے۔

نیز
لاً = ـ ن² ا جم طہ = ـ ن² لا ،
ماً = ـ ن² ا جب طہ = ـ ن² ما .... (۱۰)

چونکہ ـ لا، ـ ما ظل ہیں ف و کے اس لیے اسراع کی تعبیر سمتی ن² × ف و سے ہوتی ہے۔

مثال (۲) فرض کرو کہ ف ایک قطع ناقص کو اس طریقہ پر مرتسم کرتا ہے کہ خارج المرکز زاویہ وقت کے ساتھ یکساں طور پر بڑھتا ہے۔
صدر محوروں کے حوالے سے

لا = ا جم فہ ، ما = ب جب فہ .... (۱۱)

جہاں فہ = ن ت + صہ .... (۱۲)

اس لیے لاَ = ـ ن ا جب فہ، ماَ = ن ب جم فہ .... (۱۳)

اس لیے حاصل رفتار

سَ = ن √(ا² جب² فہ + ب² جم² فہ) = ن × و د ...... (۱۴)

ہے جہاں و ف کا مزدوج نیم قطر و د ہے۔ پس رفتار کی تعبیر سمتی ن × و د سے ہوتی ہے اور رسم الطریق (ایک خاص پیمانہ پر) د کے طریق پر منطبق ہوتا ہے یعنی خود ناقص پر۔

نیز

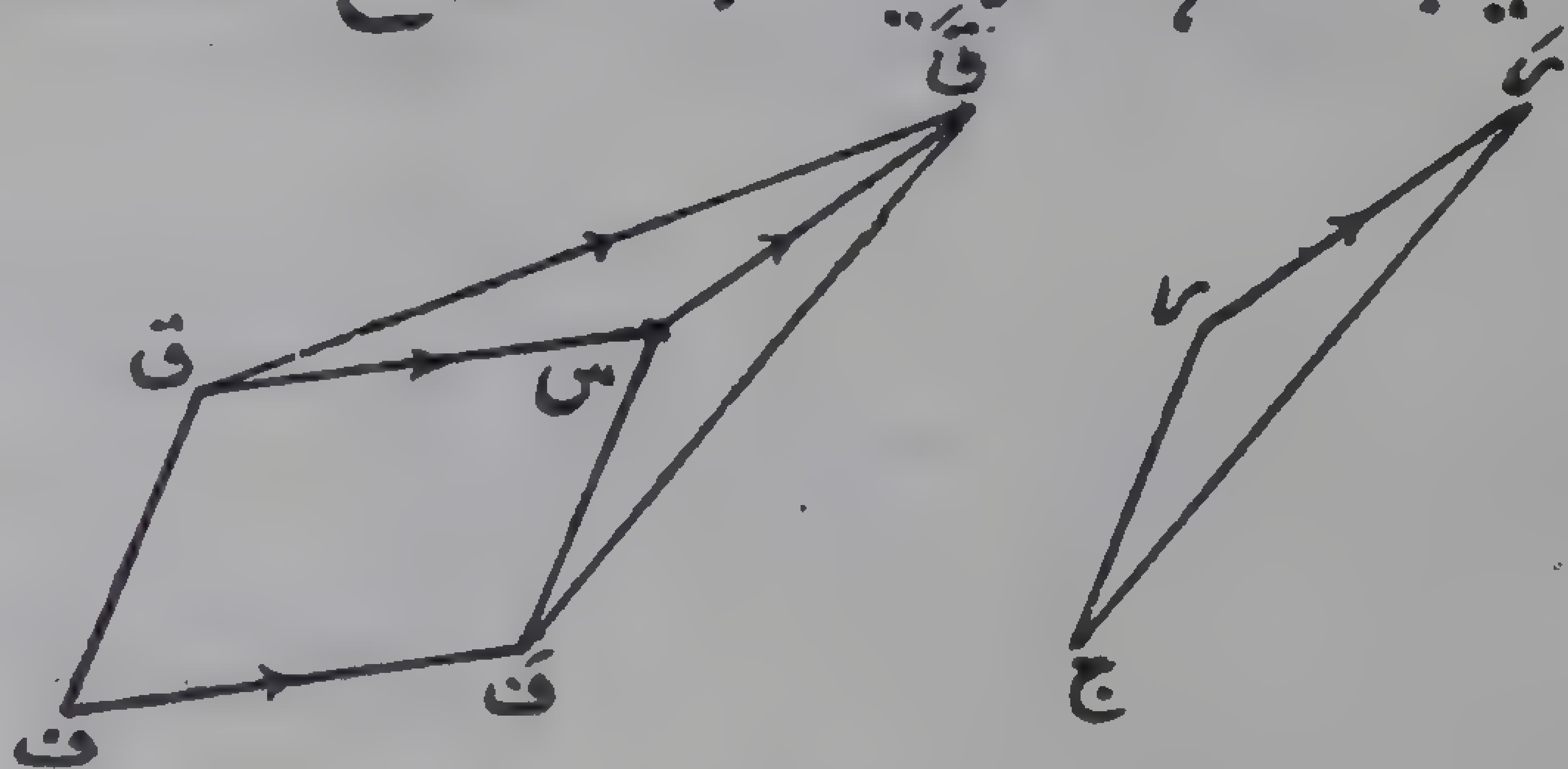
لاَ = − نؔ اؔ جم فہ = − نؔ لا ، ⎫
ماَ = − نؔ ب جب فہ = − نؔ ما ⎭ .... (۱۵)

اس لیے اسراع ، سمتی نؔ × ف و سے تعبیر ہوتا ہے۔

اس قسم کی حرکت کو "ہمناقصی موسیقی" کہتے ہیں۔ دفعہ ۲۸ میں اس پر اس کے بالعکس نقطۂ نظر سے بحث کی جائیگی۔

۲۲ ۔ حرکت اضافی۔

سمتی ف ق جو نقطہ ف کے لحاظ سے نقطہ ق کے محل کو ظاہر کرتا ہے بلاشبہ ق اور ف کے محل سمتیوں کا فرق ہے جہاں ان سمتیوں کو کسی مبداء و کے لحاظ سے لیا گیا ہو۔ اس لیے اگر ف ، ق کو متحرک نقطے سمجھا جائے تو وقت کے کسی وقفہ میں ف کے لحاظ سے ق کا ہٹاؤ ، ق اور ف کے ہٹاؤں کا ہندسی فرق ہوگا۔ یہ نتیجہ سمتیوں کی جمع کے نظریہ سے فوراً ماخوذ ہوتا ہے لیکن اس کو ایک شکل کے ذریعہ بھی واضح کیا جاسکتا ہے۔ اگر ایک ثابت نقطہ ج سے ف ق کے



شکل ۱۹

مختلف محلوں کے متناظر مساوی اور متوازی خطوط ج م کھینچے جائیں تو م کا طریق ، ف کے لحاظ سے ق کا راستہ ہوگا۔ اس لیے اگر

متحرک نقطوں کے متواتر محلوں کے دو زوج ف، ق اور فَ، قَ ہوں اور اگر ف ق ، فَ قَ کے مساوی اور متوازی علی الترتیب خطوط ج ر، ج رَ کھینچے جائیں تو ر رَ اِس وقفہ میں اضافی ہٹاؤ کو تعبیر کریگا۔ اگر ہم اُس متوازی الاضلاع ف فَ س ق کو مکمل کریں جو ف فَ اور ف ق سے متعین ہوتا ہے تو مثلث ج ر رَ اور فَ س قَ مماثل ہونگے۔ اس لیے

ر رَ = س قَ = ق قَ ـ ق س = ق قَ ـ ف فَ

اور یہی ثابت کرنا تھا۔

اب ہٹاؤ فی اکائی وقت پر غور کیا جائے تو یہ معلوم ہوگا کہ ف کے لحاظ سے ق کی رفتار، ق اور ف کی رفتاروں کا ہندسی فرق ہے۔ اسی طرح رفتار کی تبدیلی فی اکائی وقت پر غور کیا جائے تو اضافی اسراع کے لیے اس کے مشابہ ایک قاعدہ حاصل ہوتا ہے۔

سمتیوں کی ترقیم میں فرض کرو کہ ایک ثابت نقطہ و کے لحاظ سے (۶۲)
ف، ق کے محل سمتی ر۱، ر۲ ہیں تو اضافی ہٹاؤ

مف (ر۲ ـ ر۱) = مف ر۲ ـ مف ر۱ .... (۱)

سے بیان ہوگا اور اضافی رفتار

فر/فرت (ر۲ ـ ر۱) = رَ۲ ـ رَ۱ .... (۲)

ہوگی اور اضافی اسراع

فر/فرت (رَ۲ ـ رَ۱) = رً۲ ـ رً۱ .... (۳)

ہوگا۔

کارٹیزی محددوں میں اضافی ہٹاؤ کے اجزائے ترکیبی

مف لا$_2$ - مف لا$_1$ ، مف ما$_2$ - مف ما$_1$ .... (۴)

اور اضافی رفتار کے اجزائے ترکیبی

لا̇$_2$ - لا̇$_1$ ، ما̇$_2$ - ما̇$_1$ .... (۵)

اور اضافی اسراع کے اجزائے ترکیبی

لا̈$_2$ - لا̈$_1$ ، ما̈$_2$ - ما̈$_1$ .... (۶)

ہونگے ۔

حسب دفعہ ۲ یہ معلوم ہوگا کہ ایک ثابت مبداء و کے لحاظ سے جو خود مستقل رفتار سے متحرک ہو ایک متحرک نقطہ ف کا اسراع، ف کے مطلق اسراع کے مساوی ہوتا ہے ۔

۲۳ - برتدویری حرکت -

حرکت اضافی کی ایک اہم تمثیل برتدویری حرکت کے نظریہ سے بہم پہنچتی ہے ۔ اگر ایک نقطہ ق ایک ثابت مرکز و کے گرد مستقل زاویئی رفتار سے ایک دائرہ مرتسم کرے اور ف ، ق کے لحاظ سے ایک دائرہ مستقل زاویئی رفتار سے مرتسم کرے تو ف کے راستہ کو " برتدویری " کہتے ہیں۔

و میں سے گذرنے والے قایم محوروں کے حوالے سے ق کے محدد شکل

لا = ا جم (ن ت + صہ) ، ما = ا جب (ن ت + صہ)..... (۱)

کے ہونگے ۔ جہاں ق کی زاویئی رفتار اپنے دائرہ میں ن ہے اور اس دائرہ کا نصف قطر ا ہے ۔ اگر متوازی الاضلاع و ق ف قَ کو مکمل کیا جائے تو قَ کے محدد

لا = اَ جم (نَ ت + صہَ) ، ما = اَ جب (نَ ت + صہَ)..... (۲)

ہونگے جہاں اَ = و قَ = ق ف اور ق ف یا و قَ کی زاویئی رفتار

نَ ہے ۔

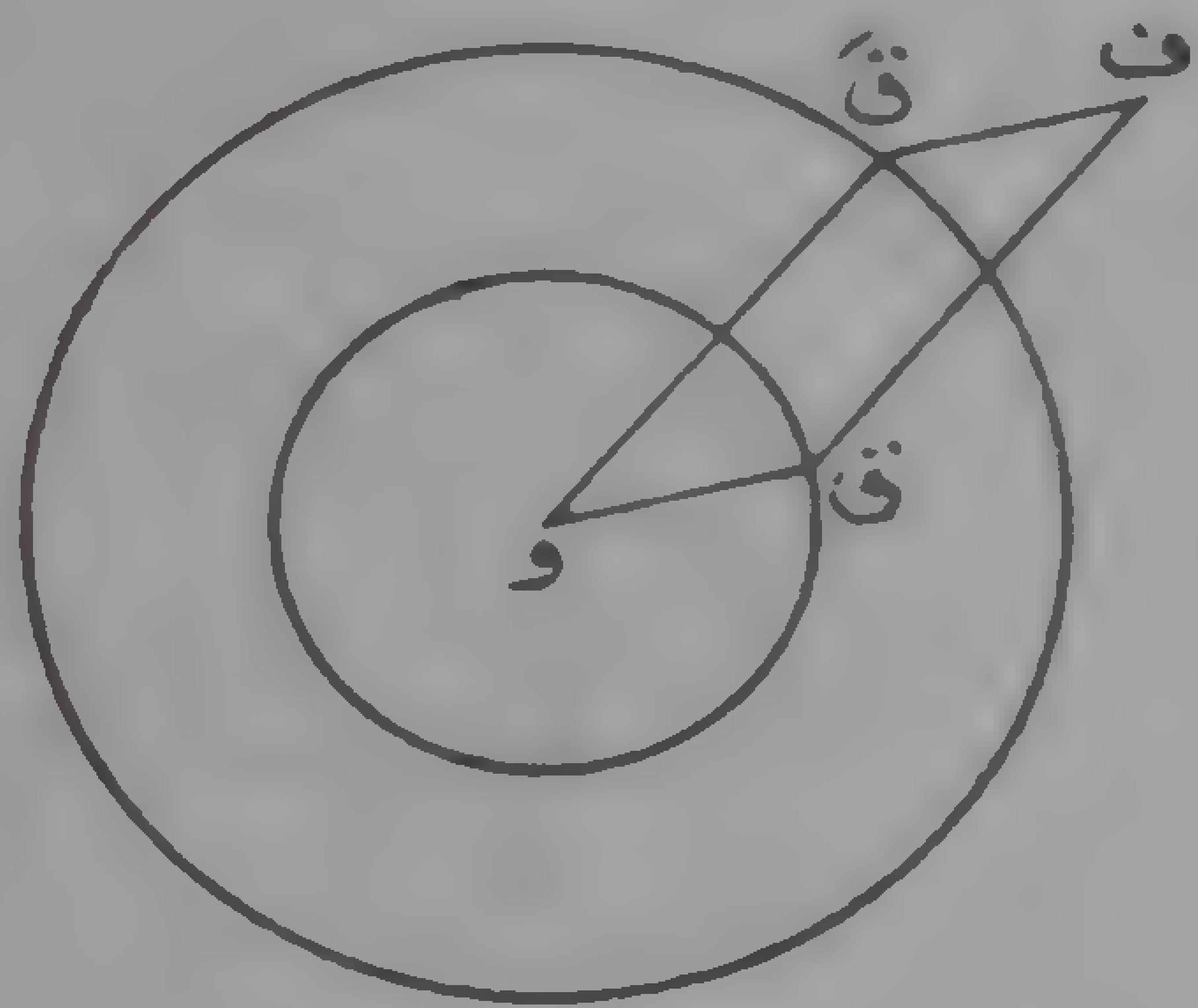
چونکہ (۲۳)

وف = وق + ق ف = و ق + وقَ ......(۳)

اس لیے ف کے محدد

لا = ا جم (ن ت + صہ) + اَ جم (نَ ت + صَہ)
ما = ا جب (ن ت + صہ) + اَ جب (نَ ت + صَہ) ...(۴)

ہو گئے ۔

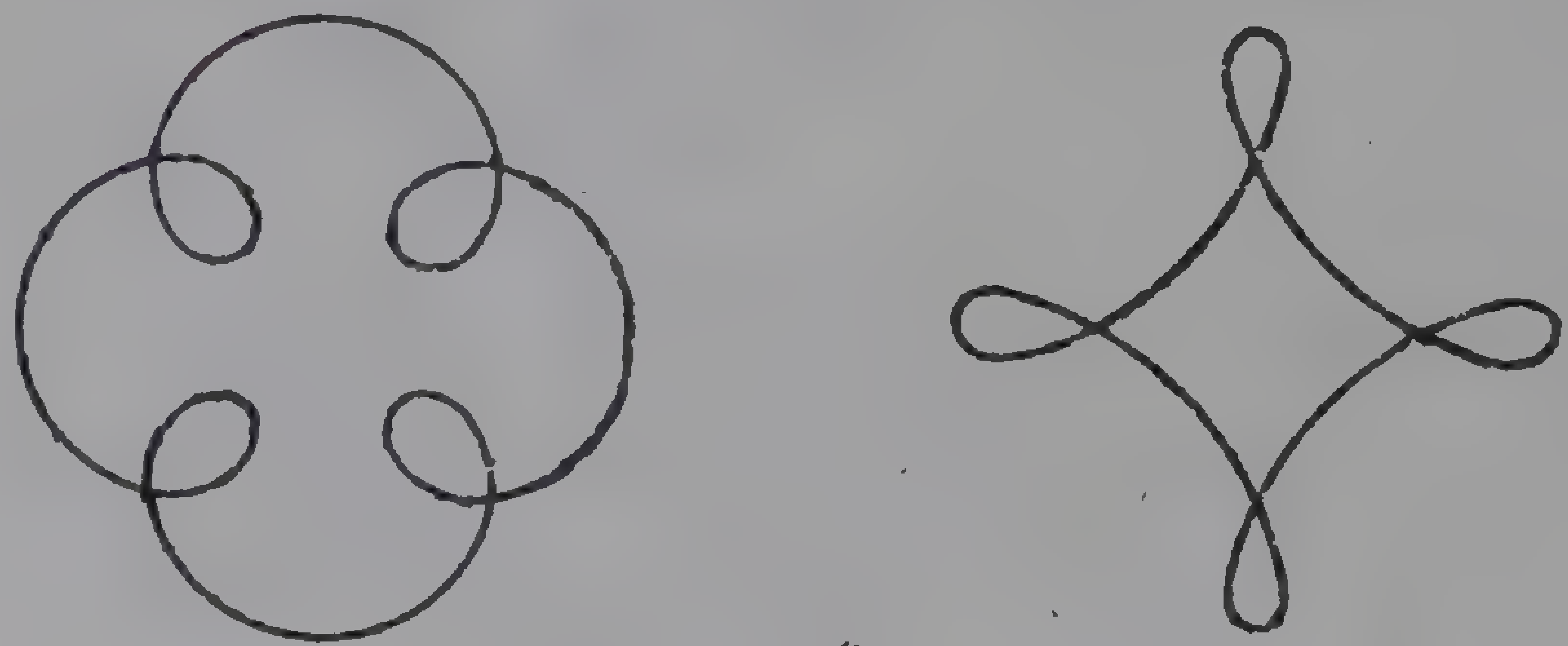


شکل ۲۰

یہ ظاہر ہے کہ ف کے راستہ کو ایک ایسے نقطہ کا راستہ بھی سمجھا جا سکتا ہے جو قَ کے لحاظ سے ایک دائرہ مرتسم کرے اور قَ ، و کے گرد ایک دائرہ مرتسم کرے جبکہ زاویٔ رفتاریں مستقل ہوں اور علی الترتیب ن ، نَ کے مساوی ہوں ۔

اگر زاویٔ رفتاریں ن ، نَ ہم علامت ہوں یعنے اگر گردشیں ایک ہی جہت میں ہوں تو بر تدویری کو "راست" کہتے ہیں ، لیکن اگر ن ، نَ مختلف العلامت ہوں تو بر تدویروں کو "رجعی" کہتے ہیں ۔ بر تدویری متداخلہ یا بند منحنی ہو گا اگر زاویٔ رفتاریں ن ، نَ ، دو صحیح عددوں کی نسبت میں ہوں ورنہ نہیں ۔ شکل ۲۱ میں دو صورتوں کو

علی الترتیب ن = ۵ نَ اور ن = -۳ نَ کے متناظر دکھایا گیا ہے۔



شکل ۲۱

اگر دو نقطے مستقل زاویئی رفتاروں سے دو ہم مرکز دائرے مرتسم کررہے ہوں تو اِن نقطوں کا اضافی مدار بھی ایک برتدویری ہوگا۔ مثلاً شکل ۲۰ میں سمتی ق قَ ، وقَ اور وق کا ہندسی فرق ہے اور اس لیے محدّدوں کے محوروں پر اس کے ظِل ' (۴) میں اکی علامت کو بدلنے سے یا (جس کا وہی مطلب ہے) صہ کی قیمت میں π کا اضافہ کرنے سے حاصل ہونگے۔ (۶۴)

مثلاً اگر ہم سیّاروں کے مداروں کے خروج المرکزوں کو نظر انداز کریں اور نیز طریق الشمس کے ساتھ اِن مداروں کے میلانوں کو بھی ناقابلِ التفات سمجھیں تو زمین کے لحاظ سے کسی سیّارہ کا راستہ ایک برتدویری ہوگا۔ اضافی مدار حلقہ دار ہوتے ہیں (مثلاً شکل ۲۱ میں پہلی صورت)' اس لیے اگر زمین سے ایک سیّارہ کی حرکت کا مشاہدہ کیا جائے اور اِس حرکت کا ظِل آسمان پر ہو تو یہ معلوم ہوگا کہ سیّارہ کی حرکت باقاعدہ وقفوں سے رک جاتی ہے اور الٹی ہو جاتی ہے۔ "مقیم نقطوں" اور "رجعی حرکتوں" کی حقیقی وجہ یہی ہے اور یہ سیّاروں کے ظاہری

مداروں کی بڑی اہم خصوصیت ہے[1]

۴۴۔ سادہ موسیقی ارتعاشوں کا ایک دوسرے پر انطباق۔

دو سادہ موسیقی ارتعاشوں میں سے ایک کو دوسرے پر ایک ہی خطِ مستقیم میں انطباق کرنے کا یہ نتیجہ ہوگا کہ ایک ایسی حرکت پیدا ہوگی جو ایک برتدویری حرکت کی قائم ظِل ہوتی ہے۔ یہ دفعہ ۱۰ کی ہندسی تعبیر سے یا دفعہ ۴۲ کے ضابطوں (۴) سے ظاہر ہے۔

اگر زاوئی رفتاریں ن، نَ مساوی ہوں اور ان کی جہت بھی ایک ہی ہو تو اِن دو ترکیبی ارتعاشوں کا دَور وہی ہوگا۔ زاویہ ق و قَ (شکل ۶۲) مستقل ہوگا، ف کا راستہ دائری ہوگا، اور حاصل ارتعاش اُسی دَور کا سادہ موسیقی ہوگا۔

لیکن اگر ن، نَ نامساوی ہوں تو زاویہ ق و قَ تمام قیمتیں اختیار کریگا اور و ف کا طول حدود ﻭ ± ﻭَ کے درمیان اہتزاز کریگا۔

لارڈ کیلون Lord kelvin کی "موجی گھڑی" میں متوازی الاضلاع و ق ف قَ جوڑے ہوئے ڈنڈوں پر مشتمل ہوتا ہے اور "سوئیاں" و ق، و قَ علی الترتیب نصف قمری یوم اور نصف شمسی یوم میں گردش کرتی ہیں۔ اِن کے طول قمری اور شمسی نیم یومی موجوں کے حیطوں کے متناسب ہوتے ہیں اور و میں سے گذرنے والے ایک خطِ مستقیم پر ف کے ظِل سے موج کا وہ ارتفاع حاصل ہوتا ہے جو اِن موجوں کے اجتماع کی وجہ سے پیدا ہوتا ہے۔

---

[1] برتدویریوں کے مفروضہ سے ان کی وضاحت اسکندریہ کے ٹولمی Ptolemy (وفات ۱۶۸ء) نے اپنی کتاب Almagest میں کی تھی

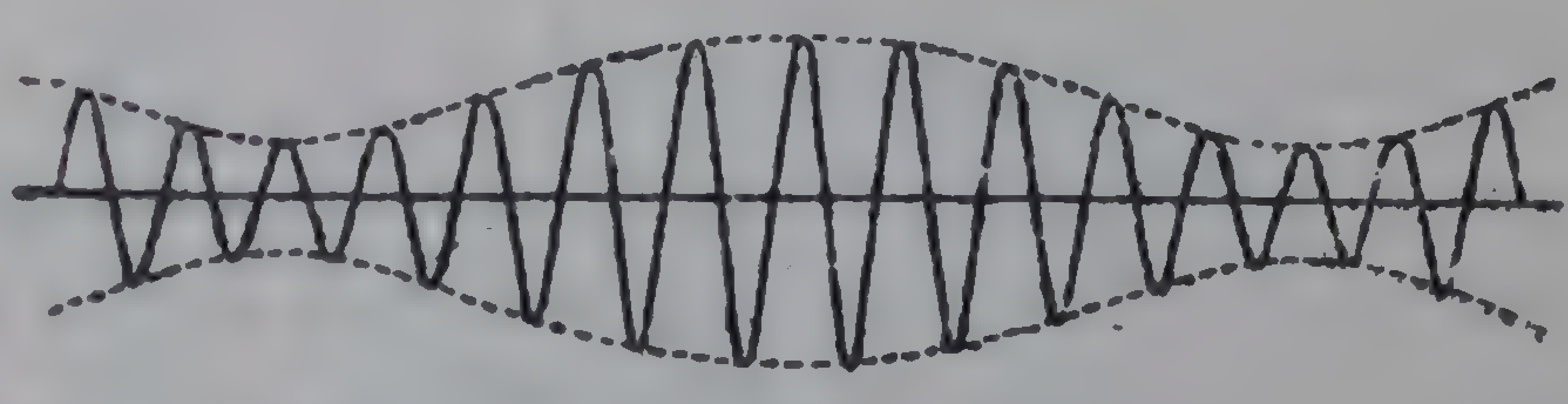
(۶۵) اگر زاویٔ رفتاریں ن، نَ بالکل ٹھیک تو نہیں لیکن تقریباً مساوی ہوں تو زاویہ ق وقَ، وق یا وقَ کی ایک واحد گردش کے دَوران میں بہت تھوڑا متغیر ہوگا اور حاصل ارتعاش کو (تقریباً) ایک سادہ موسیقی ارتعاش کہا جاسکیگا جس کا حیطہ حدود ا ± ڈ کے درمیان متغیر رہیگا۔ اِس تغیر کا دَور وہ وقفہ ہے جس میں ایک بازو دوسرے کے لحاظ سے چار قائمہ زاویے سبقت لے جاتا ہے یا پیچھے رہ جاتا ہے

اور اس لیے وہ $\frac{\pi 2}{ن - نَ}$ ہے ۔ دوسرے لفظوں میں اِن اہتزازوں کا

تعدد $\frac{ن - نَ}{\pi 2}$ ، ابتدائی دو ارتعاشوں کے تعددوں کا فرق ہے۔

تمثیل کے طور پر موج اعظم اور موج اصغر کا باری باری سے وقوع پذیر ہونا ہے جو قمری اور شمسی نیم یومی اجزائے ترکیبی کے ہیئتوں کے علی الترتیب منطبق ہونے یا مخالف ہونے پر واقع ہوتی ہیں۔

نیچے کی شکل میں صورت ا = ۲ اَ، ۹ ن = ۱۰ نَ کے لیے مکان زمانی منحنی کو دکھایا گیا ہے۔



شکل ۲۲

تغیرات بلاشبہ بہت نمایاں ہوتے ہیں جبکہ ابتدائی ارتعاشوں کے حیطے ا، اَ مساوی ہوں ۔ اُس وقت حاصل کا حیطہ صفر اور ۲ا کے درمیان متغیر ہوتا ہے۔

تحلیلی طور پر حاصل ہوتا ہے

لا = و جم طہ + وَ جم طہَ .... (۱)

جہاں　طہ = ن ت + صہ، طہَ = نَ ت + صہَ .... (۲)

اس لیے

لا = (و + وَ) جم ½ (طہ + طہَ) جم ½ (طہ − طہَ)

− (و − وَ) جب ½ (طہ + طہَ) جب ½ (طہ − طہَ) .... (۳)

اگر اس میں

ر جم فہ = (و + وَ) جم ½ (طہ − طہَ)
ر جب فہ = (و − وَ) جب ½ (طہ − طہَ)　....... (۴)

رکھا جائے تو اس کو

لا = ر جم [½ (طہ + طہَ) + فہ] .... (۵)

لکھا جاسکتا ہے جہاں ر اور فہ کی قیمتیں (۴۶)

ر² = و² + ۲ و وَ جم (طہ − طہَ) + وَ² .... (۶)

اور　مس فہ = (و − وَ)/(و + وَ) مس ½ (طہ − طہَ) .... (۷)

سے معلوم ہوتی ہیں۔

اگر ن اور نَ تقریباً مساوی ہوں تو ضابطہ (۵) کے متعلق یہ سمجھا جاسکتا ہے کہ وہ ایک سادہ موسیقی ارتعاش کو تعبیر کرتا ہے جس کا حیطہ ر، و + وَ اور و − وَ کے درمیان آہستہ آہستہ متغیر ہوتا ہے اور ہیئت کا تغیر بھی سست ہے۔ شکل ۲۲ میں نقطہ دار منحنی حیطہ کے تغیر کو ظاہر کرتا ہے۔

مثالیں (۵)

۱۔ ایک جہاز ایک بندرگاہ کی طرف رفتار ع سے آرہا ہے اور دوسرا وہاں سے رفتار و سے جارہا ہے، ان کے راستے سیدھے ہیں اور ایک دوسرے سے زاویہ عہ بناتے ہیں۔ ثابت کرو کہ جب ان کے درمیان فاصلہ اقل ہوتا ہے تو بندرگاہ سے ان کے فاصلے نسبت

و + ع جم عہ : ع + و جم عہ

میں ہوتے ہیں۔

۲۔ ایک کشتی کو جس کی رفتار ۸ بحری میل فی گھنٹہ ہے کس سمت میں کھینا چاہیے کہ وہ ایک بندرگاہ پر جو ۱۰ میل کے فاصلہ پر سمت ش۔ ش۔ مر[1] میں واقع ہے پہنچے جبکہ ۲ بحری میل فی گھنٹہ کی ایک ج۔ مر رو چل رہی ہو۔ نیز اس کے لیے کتنا وقت لگیگا۔ [۹° ۸' ش کا مر، ۸۵ ½ منٹ]

۳۔ جب ایک دخانی جہاز ۱۵ بحری میل فی گھنٹہ کی رفتار سے سمت ش میں جارہا ہے تو مستول کے سرے پر کا پرّہ مر۔ ش۔ مر بتاتا ہے اور جب جہاز ٹھہر جاتا ہے تو وہ ش۔ مر کو بتاتا ہے۔ ہوا کی رفتار معلوم کرو۔ جہاز کو کس سمت میں جانا چاہیے کہ پرّہ مر کو بتائے۔

۴۔ ایک جہاز ش کی طرف ۱۰ میل (بحری) فی گھنٹہ کی رفتار سے جارہا ہے اور مستول کے سرے پر پرّہ ش۔ ش۔ مر بتاتا ہے۔ پھر جہاز ش کی جانب مُڑتا ہے تو پرّہ ش۔ ش۔ غ بتاتا ہے۔ ہوا کس سمت سے چل رہی ہے اور اُس کی رفتار کیا ہے۔ [ش۔ غ، ۱۰ بحری میل]

۵۔ اگر ایک گاڑی کے پہیّہ کے آرّوں پر دو نقطے ف، ق ہوں تو ف کے لحاظ سے ق کی رفتار کی سمت اور مقدار معلوم کرو جبکہ یہ دیا گیا ہو کہ

---

[1] ش سے شمال، مر سے مشرق، ج سے جنوب اور غ سے مغرب مراد ہیں۔

پہیہ کا نصف قطر و ہے اور گاڑی کی رفتار ع ہے۔

۶۔ ایک متحرک نقطہ کا رسم الطریق اور اس کی ترسیم کا قانون دیا گیا ہے۔ اُس کا راستہ کس طرح معلوم کیا جائیگا۔ قطب کے محل کو بدلنے کا کیا اثر ہوگا۔

اگر رسم الطریق ایک دائرہ ہو جو مستقل رفتار سے مرتسم ہوا ہے تو ثابت کرو کہ راستہ استداری خطی منحنی ہے۔

۷۔ ایک کشتی کو ایک نہر میں پانی کے لحاظ سے مستقل رفتار کے ساتھ چلایا جاتا ہے، یہ رفتار نہر کی رفتار کے مساوی ہے۔ ثابت کرو کہ اگر کشتی کو ساحل کے ایک ثابت نقطہ کی جانب چلایا جائے تو اِس کا راستہ ایک مکافی ہوگا جس کا ماسکہ یہ نقطہ ہوگا اور وہ نقطہ جہاں کشتی ساحل پر پہنچیگی اِس مکافی کا راس ہوگا۔

۸۔ اگر گذشتہ مثال میں نہر کی رفتار کو کشتی کی (اضافی) رفتار کے ساتھ (۶۷)
نسبت $\frac{1}{\text{ن}}$ ہو تو ثابت کرو کہ راستہ کی قطبی مساوات

$$\text{ر} = \frac{\text{و}\,(\text{جب}\,\tfrac{1}{2}\,\text{طہ})^{\text{ن}-1}}{(\text{جم}\,\tfrac{1}{2}\,\text{طہ})^{\text{ن}+1}}$$

ہے۔

اس صورت کا امتحان کرو کہ جبکہ ن > ۱ یا ن < ۱

۹۔ ثابت کرو کہ ایک بر تدویری کے کسی نقطہ پر رفتار دفعہ ۲۳ کی ترقیم میں

$$\text{م}\sqrt{\text{ن}^2\text{و}^2 + 2\,\text{ن}\,\text{نَ}\,\text{و}\,\text{وَ}\,\text{جم}(\text{طہ}-\text{طہَ}) + \text{نَ}^2\text{وَ}^2}$$

ہے۔

۱۰۔ دفعہ ۲۳ کی ترقیم میں ثابت کرو کہ ایک بر تدویری میں حرکت کی سمت مبداء میں سے گذرتی ہے جبکہ

$$\text{جم}\left\{(\text{ن}-\text{نَ})\,\text{ت} + \text{صہ} - \text{صہَ}\right\} = \frac{\text{ن}\,\text{و}^2 + \text{نَ}\,\text{وَ}^2}{(\text{ن}+\text{نَ})\,\text{و}\,\text{وَ}}$$

ثابت کرو کہ یہ واقع نہیں ہو سکتا جب تک کہ ن و عدداً نَ وَ سے کم نہ ہو جہاں و > وَ۔

۱۱- ثابت کرو کہ اگر ایک برتدویری مرکز میں سے گذرے تو اس کی قطبی مساوات کی شکل

ر = ا جم م طہ

ہے جہاں م $\gtrless$ ۱ بموجب اس کے کہ برتدویری راست ہے یا رجعی۔

۱۲- ایک نقطہ جو ایک ایسے اسراع کے تحت ہے جو مقدار اور سمت میں مستقل ہے لمحوں ت۱، ت۲، ت۳ پر علی الترتیب تین نقطوں ف۱، ف۲، ف۳ میں سے گذرتا ہے۔ ثابت کرو کہ اسراع مقدار اور سمت دونوں میں سمتی

$$\frac{۲\,(\text{ف}_۲\text{ف}_۳ \times \text{ت}_۱ + \text{ف}_۳\text{ف}_۱ \times \text{ت}_۲ + \text{ف}_۱\text{ف}_۲ \times \text{ت}_۳)}{(\text{ت}_۲ - \text{ت}_۳)(\text{ت}_۳ - \text{ت}_۱)(\text{ت}_۱ - \text{ت}_۲)}$$

سے تعبیر ہوتا ہے۔

۱۳- ایک نقطہ کا اسراع مقدار اور سمت میں مستقل ہے۔ ثابت کرو کہ ایک نقطہ کے لحاظ سے جو ایک خطِ مستقیم میں مستقل رفتار سے حرکت کر رہا ہے اس کا راستہ ایک مکافی ہے۔

۱۴- مساواتوں

لا = و جم سا ، ما = و جب سا

کے تفرق سے ثابت کرو کہ ایک نقطہ کا اسراع جو ایک مستوی منحنی مرتسم کر رہا ہو دو اجزائے ترکیبی سے مرکب ہے جن میں سے ایک مماس کی سمت میں $\frac{\text{فرو}}{\text{فرت}}$ اور دوسرا مرکز انحناء کی جانب و $\frac{\text{فرسا}}{\text{فرت}}$ ہے۔

۱۵- مساواتوں

لا = ر جم طہ ، ما = ر جب طہ

کے تفرق سے ثابت کرو کہ قطبی محددوں میں رفتار کے اجزائے ترکیبی سمتی قطر کی سمت اور اس کے علی القوائم سمت میں علی الترتیب

رَ ، ر طَ

ہیں اور انہی سمتوں میں اسراع کے اجزائے ترکیبی علی الترتیب

ز - رطہ^۲ ، رطہ + ۲ ز طہ

ہیں -

(۶۸) ۱۶ - دو سادہ موسیقی ارتعاش ایک ہی دَور کے اور ایک ہی خطِ مستقیم میں ہیں اور ان کے حیطے ا ، ب اور ان کی ہئیت کا فرق صہ ہے۔ اگر اِن سادہ موسیقی حرکتوں کو مرکب کیا جائے تو ثابت کرو کہ حاصل ارتعاش کا حیطہ

$\sqrt{ا^۲ + ۲ ا ب جم صہ + ب^۲}$

ہے -

۱۷ - ثابت کرو کہ ایک برتدویری جس میں زاویٔ رفتاریں مقدار میں مساوی اور سمت میں مخالف ہیں ایک قطع ناقص ہے۔

۱۸ - ایک ڈنڈے کے سرے ف ، ق ، دو خطوطِ مستقیم و ا ، و ب پر جو ایک دوسرے کے علی القوایم ہیں حرکت کرنے کے لیے مجبور ہیں - اگر ف کی رفتار مستقل ہو تو ثابت کرو کہ ڈنڈے پر کے کسی نقطہ کا اسراع ، و ا کے علی القوایم ہے اور و ا سے فاصلہ کے مکعب کے بالعکس متناسب ہے۔

۱۹ - ایک ڈوری کو ایک ثابت ریل (پھرکی) سے مستقل زاویٔ رفتار سہ کے ساتھ کھولا جاتا ہے اور آزاد حصہ کو محور کے علی القوایم ایک مستوی میں تنا ہوا رکھا جاتا ہے۔ ثابت کرو کہ ڈوری کے سرے ف کا اسراع ، ف م کی سمت میں ہے اور سہ^۲ × ف م کے مساوی ہے جہاں م اُس نصف قطر پر ہے جو نقطہ تماس میں سے گذرتا ہے اور مرکز سے اُس کا فاصلہ نصف قطر کا دُگنا ہے۔

۲۰ - ثابت کرو کہ برتدویری حرکت ایک ایسے ناقص میں حرکت کے معادل ہے جو اپنے مرکز کے گرد یکساں گردش کرتا ہے ، اور ناقص میں اضافی حرکت ناقصی موسیقی قانون کی پابندی کرتی ہے (دفعہ ۲۸) -

چوتھا باب

دو ابعاد میں ایک ذرّہ کی حرکت کا ریزی محدد

۲۵۔ حرکیاتی اصول۔

(۶۹) ایک ذرہ کا "معیارِ حرکت" اس کی کمیت اور اس کی رفتار کا حاصل ضرب ہوتا ہے اور چونکہ کمیت ایک پیمانوی مقدار ہے اس لیے معیارِ حرکت کو ایک سمتی سمجھا جا سکتا ہے چنانچہ ہر لحہ پر اس کی ایک محدود مقدار اور ایک معیّن سمت ہوتی ہے۔ ذرّہ کا رسم الطریق مناسب پیمانہ پر، معیارِ حرکت کی تبدیلیوں کو تعبیر کرنے کے لیے استعمال کیا جا سکتا ہے۔

وقت کے کسی وقفہ میں "معیار حرکت کی تبدیلی" وہ معیارِ حرکت ہے جس کو ابتدائی معیارِ حرکت میں ہندسی طور پر جمع کرنے سے آخری معیارِ حرکت حاصل ہوتا ہے۔ دوسرے لفظوں میں وہ آخری اور ابتدائی معیارِ حرکتوں کا سمتی فرق ہے۔

کسی لا انتہا چھوٹے وقفہ مف ت میں ایک قوت کا "دھکا" قوت اور مف ت کا حاصل ضرب ہوتا ہے۔ اس کو بھی ایک سمتی سمجھا جا سکتا ہے۔

کسی محدود وقفہ میں "کُل" یا "تکملی" دھکّا اُن دھکّوں کا ہندسی مجموعہ ہوتا ہے جو صغیر عنصروں مدت میں (جن کو جمع کرنے سے محدود وقفہ حاصل ہوتا ہے) واقع ہوتے ہیں۔

وہ بنیادی مفروضہ جو اب ہم اختیار کرینگے وہی ہے جو دفعہ ۷ میں بیان ہو چکا ہے لیکن وسیع مفہوم میں - اس میں یہ دعویٰ کیا جاتا ہے کہ معیارِ حرکت کی تبدیلی دھکّے کے متناسب ہوتی ہے اور اس لیے دھکّے کے مساوی ہوتی ہے اگر قوت کی پیمایش کا مطلق نظام اختیار کیا جائے۔ یہ حسبِ سابق ایک طبعی اصول موضوعہ ہے جس کو صرف تجربہ کے ساتھ نظری نتیجوں کا مقابلہ کرکے صحیح ثابت کیا جا سکتا ہے۔ اِس سے گویا سمتیوں کی مساویت بیان ہوتی ہے اور اس لیے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ ان کی سمت اور مقدار مماثل ہیں۔ یہ غیر اہم ہے کہ آیا وقت کا زیرِ بحث وقفہ محدود (۶۰) ہے یا صغاری کیونکہ کسی ایک بیان میں دوسرا بیان نتیجہ کے طور پر شامل ہوتا ہے۔

اس کے علاوہ یہ فرض کیا جاتا ہے کہ جب دو یا زیادہ قوتیں ایک ساتھ عمل کرتی ہیں تو صغیر وقفہ مدت میں اِن مختلف قوتوں کی وجہ سے معیارِ حرکت میں جو تبدیلیاں ہوتی ہیں اُن کو جداگانہ محسوب کیا جا سکتا ہے اور نتیجوں کو معیارِ حرکت کی حقیقی تبدیلی معلوم کرنے کے لیے ہندسی طور پر جمع کیا جاتا ہے۔ چونکہ اِن مختلف قوتوں کی وجہ سے معیارِ حرکت کی تبدیلیاں اِن قوتوں کی سمتوں میں اور اِن کے متناسب ہوتی ہیں اس لیے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ معیارِ حرکت کی حقیقی تبدیلی وہی ہے جو ایک واحد قوت سے جو دی ہوئی قوتوں کا ہندسی مجموعہ ہو پیدا ہوتی ہے۔ پس یہ معلوم ہوتا ہے کہ ہمارے مفروضوں میں وہ قانون شامل ہے جو ایک ذرہ پر عمل کرنے والی مختلف قوتوں کو ترکیب دینے کا ہے اور جو سکونیات میں "قوتوں کے کثیر الاضلاع" کے طور پر موسوم ہے۔

اگر ذرّہ کی کمیّت م، اس کی رفتار و، اور اس پر عمل کرنے والی قوتوں کا ہندسی مجموعہ ف ہو تو سمتی ترقیم میں

مف (م و) = ف مف ت

یا م فرو / فرت = ف .... (۱)

محدود وقت کے لیے اس کو تکمل کرنے پر

م و۲ - م و۱ = ∫ (ت۱ ، ت۲) ف فرت .... (۲)

جہاں اِس محدود تکملہ کو صغیر سمتیوں کے ایک لامتناہی سلسلہ کے مجموعہ کی انتہا سمجھنا چاہیے۔ شکل ۲ نیوٹن کے "حرکت کے دوسرے کلیہ"[ل] کے متناظر ہے۔

اگر ذرّہ کا محل سمتی ر ہو تو

و = رَ .... (۳)

اور اس لیے م رً = ف .... (۴)

اِس مساوات کے حل میں دو اختیاری سمتی شامل ہونگے، اِن کو محل اور رفتار سے متعلق دی ہوئی ابتدائی شرطوں کی رقوم میں متعین کیا جاسکتا ہے۔

۲۶ - کارٹیزی مساواتیں۔ (۷۱)

عمل حساب کے لیے محددوں کا کوئی نہ کوئی نظام ضروری ہے۔

ل "Mutationem motus proportionalem esse vi motrici impressae, et fieri secundum lineam rectam qua visilla imprimitur"

حرکت کی تبدیلی (معیار حرکت) قوت عاملہ (دھکا) کے متناسب ہوتی ہے اور اُس خط مستقیم کی سمت میں واقع ہوتی ہے جس میں قوت عمل کرتی ہے۔

محور ما مستوی پر عمود ہو تو

لا̈ = - م ج جب عہ - ف ، ما̈ = - م ج جم عہ + س ...... (۵)

جہاں تعامل کے مماسی اور عمادی اجزائے ترکیبی ف اور س ہیں - چونکہ بموجب فرض ما = ۰ اس لیے

س = م ج جم عہ .... (۶)

اور م $\frac{\text{فر}^2 \text{لا}}{\text{فرت}^2}$ = - م ج جب عہ - ف .... (۷)

اگر مستوی چکنا ہے تو ف = ۰ اور ابطاء ج جب عہ ہے - اگر مستوی کھُردرا ہے تو ف = مہ س ، رگڑ کے قانون کی بموجب ، اور

(۷۲)

ج (جب عہ + مہ جم عہ) = ج $\frac{\text{جب (عہ + لہ)}}{\text{جم لہ}}$ .... (۸)

ہے اگر رگڑ کا زاویہ لہ ہو -

۲۷ - حرمی کی حرکت -

پچھلی مساواتوں کا ایک آسان اطلاق اُس صورت پر کیا جا سکتا ہے جس میں ایک ذرّہ جاذبہ کے تحت بغیر کسی مزاحمت کے حرکت کرتا ہے -

اگر محور ما کو انتصاباً اُوپر وار لیا جائے تو خواہ محور لا اُفقی ہو یا نہ ہو حاصل ہوتا ہے -

لا̈ = ۰ ، ما̈ = - م ج .... (۱)

اور اس لیے لا̇ = ۰ ، ما̇ = - ج .... (۲)

تکمل کرنے پر

لا̇ = ا ، ما̇ = - ج ت + ب (۳)

لا = ا ت + ج ، ما = - $\frac{1}{2}$ ج ت^2 + ب ت + د ... (۴)

دو ابعاد میں حرکت کی صورت پر غور کرو اور کارٹیزی محدد استعمال کرو خواہ محور قائم ہوں یا مائل - فرض کرو کہ لمحہ ت پر رفتار کے اجزائے ترکیبی ع، و اور قوت کے اجزائے ترکیبی لا ، ما ہیں - اس لیے معیارِ حرکت کے اجزائے ترکیبی م ع، م و ہیں اور وقفہ مف ت میں معیارِ حرکت کی تبدیلی کے اجزائے ترکیبی لا مف ت ، ما مف ت ہیں - اب چونکہ مساوی سمتیوں کے متوازی ظل مساوی ہوتے ہیں اس لیے

$$\text{مف(م ع) = لا مف ت ، مف(م و) = ما مف ت} \quad \text{....(۱)}$$

یا

$$\text{م}\frac{\text{فرع}}{\text{فرت}} = \text{لا ، م}\frac{\text{فرو}}{\text{فرت}} = \text{ما} \quad \text{........(۲)}$$

لیکن

$$\text{ع} = \frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}} \text{ ، و} = \frac{\text{فرما}}{\text{فرت}} \quad \text{......(۳)}$$

اس لیے

$$\text{م}\frac{\text{فر}^{2}\text{لا}}{\text{فرت}^{2}} = \text{لا ، م}\frac{\text{فر}^{2}\text{ما}}{\text{فرت}^{2}} = \text{ما} \quad \text{......(۴)}$$

کسی مخصوص صورت میں اِن مساواتوں کا حل ایسا ہوگا جس میں چار اختیاری مستقل شامل ہونگے - ان مستقلوں کو لا ، ما ، $\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}}$ ، $\frac{\text{فرما}}{\text{فرت}}$ کی قیمتوں سے متعلق ابتدائی معلومہ شرطوں سے متعین کیا جا سکتا ہے -

تین ابعاد پر اس کی توسیع بالکل واضح ہے جہاں حل میں چھ اختیاری مستقل ہونگے -

مثال - ایک ذرہ میلان ع کے ایک مستوی پر خطِ میلان اعظم کے اُوپر وار جاذبہ اور مستوی کے تعامل کے تحت پھسلتا ہے -

اگر محور لا کو میلانِ اعظم کے ایک خط پر اُوپر وار لیا جائے اور

جہاں ا، ب، ج، د اختیاری ہیں۔

مثلاً فرض کرو کہ ذرہ کو نخددوں کے مبداء سے لمحہ ت = ۰ پر رفتار (ع، و) کے ساتھ پھینکا گیا ہے۔ تب

$$\text{ا} = \text{ع}،\ \text{ب} = \text{و}،\ \text{ج} = 0،\ \text{د} = 0 \qquad \dots\dots (5)$$

اس لیے

$$\dot{\text{لا}} = \text{ع}،\ \dot{\text{ما}} = \text{و} - \text{ج}\,\text{ت} \qquad \dots\dots (6)$$

$$\text{لا} = \text{ع}\,\text{ت}،\ \text{ما} = \text{و}\,\text{ت} - \tfrac{1}{2}\,\text{ج}\,\text{ت}^2 \qquad \dots\dots (7)$$

ت کو ساقط کرنے پر راستہ کی مساوات

$$\text{ما} = \frac{\text{و}}{\text{ع}}\,\text{لا} - \frac{\text{ج}}{2\,\text{ع}^2}\,\text{لا}^2 \qquad \dots\dots (8)$$

حاصل ہوتی ہے جو ایک مکافی کو تعبیر کرتی ہے جس کا محور انتصابی ہے۔

اگر ایک لمحہ کے لیے ہم مبداء کو راستہ کے راس پر لیں اور محور لا کو اُفقی تو و = ۰ اور اس لیے

$$\text{لا} = \text{ع}\,\text{ت}،\ \text{ما} = -\tfrac{1}{2}\,\text{ج}\,\text{ت}^2 \qquad \dots\dots (9)$$

اس لیے

$$\text{ما} = -\frac{\text{ج}}{2\,\text{ع}^2}\,\text{لا}^2 \qquad \dots\dots (10)$$

اس لیے مکافی کا وترِ خاص $\frac{2\,\text{ع}^2}{\text{ج}}$ ہے جہاں ع (مستقل) افقی رفتار ہے۔ نیز اگر وقت ت پر رفتار ق ہو تو

$$\text{ق}^2 = \dot{\text{لا}}^2 + \dot{\text{ما}}^2 = \text{ع}^2 + \text{ج}^2\,\text{ت}^2 = \text{ع}^2 - 2\,\text{ج}\,\text{ما} \qquad \dots\dots (11)$$

اگر

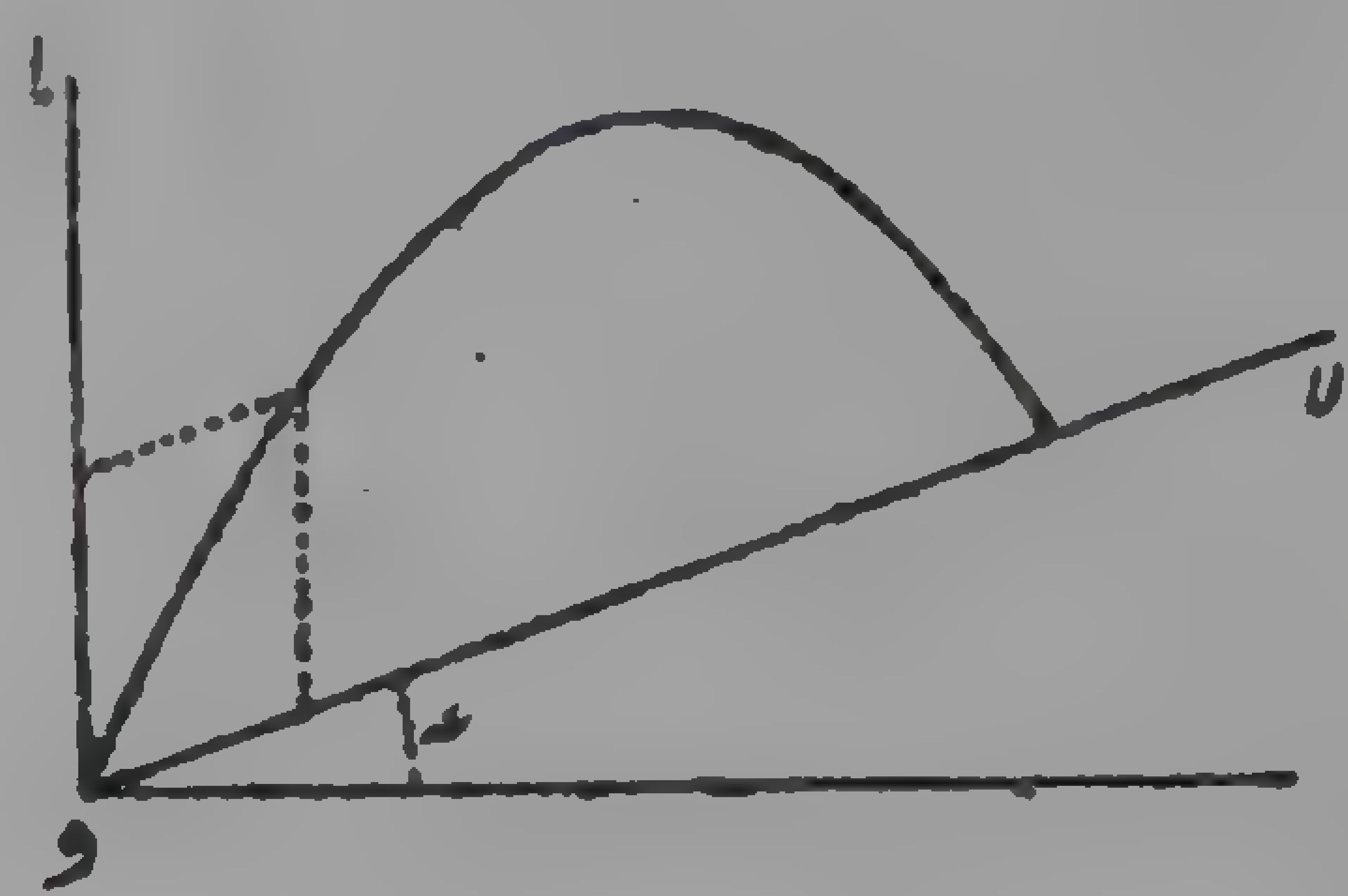
$$\text{ما}' = \frac{\text{ع}^2}{2\,\text{ج}} - \text{ما} \qquad \dots\dots (12)$$

رکھا جائے یعنے اگر ماَ مرتب کے نیچے گہرائی کو تعبیر کرے تو

$$ق^{2} = ۲\,ج\,ما \qquad \text{..............} \; (۱۳)$$

پس کسی نقطہ پر رفتار وہ ہے جو ایک ذرّہ سکون سے انتصاباً گر کر مرتب کی ہمواری پر حاصل کرتا۔

اب ہم پھر ضابطوں (۷) کی طرف رجوع ہوتے ہیں جہاں مبداء راستہ پر کا کوئی نقطہ ہے اور محور لا کی سمت کوئی بھی ہوسکتی ہے لیکن محور ما کی سمت انتصابی ہے (شکل ۲۳)۔ یہ معلوم کرنے کے لیے کہ راستہ



شکل ۲۳

محور لا کو پھر کہاں قطع کرتا ہے ہم ما = ۰ رکھتے ہیں تو حاصل ہوتا ہے

$$ت = \frac{۲\,و}{ج} \;،\; لا = \frac{۲\,ع\,و}{ج} \qquad \text{........} \; (۱۴)$$

اس سے ایک مائل مستوی پر ٹپہ اور نیز پروانہ کا وقت حاصل ہوتا ہے اگر محور لا کو مستوی پر لیا جائے۔ اگر مستوی کا میلان اُفقی کے ساتھ ء ہو تو ابتدائی رفتار (ق، بالفرض)

$$ق^{2} = ع^{2} + ۲\,ع\,و\,جب\,ء + و^{2} \qquad \text{......} \; (۱۵)$$

سے حاصل ہوتی ہے۔ اس کو شکل

$$ق^{2} = (ع - و)^{2} + ۲\,ع\,و\,(۱ + جب\,ء) \qquad \text{........} \; (۱۶)$$

میں لکھا جائے تو ہم دیکھتے ہیں کہ اگر ق مستقل ہو تو ع و بڑے سے بڑا ہے

(۷) جبکہ ع = و یعنے جبکہ مرمی کو پھینکنے کی سمت اُس زاویہ کی تنصیف کرے جو مستوی کے خطِ میلان اور انتصابی کے درمیان ہے۔ اُس وقت خطِ میلان میں مکافی کا ماسکہ ہوگا اور نیز اعظم پٹہ (۱۴) اور (۱۶) سے

$$\frac{ق^2}{ج(1 + جب\ عہ)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (17)$$

حاصل ہوگا۔ اگر ہم اس کو ر سے تعبیر کریں اور

$$طہ = \frac{1}{2}\pi - عہ،\ ل = \frac{ق^2}{ج} \quad \ldots\ldots (18)$$

لکھیں تو

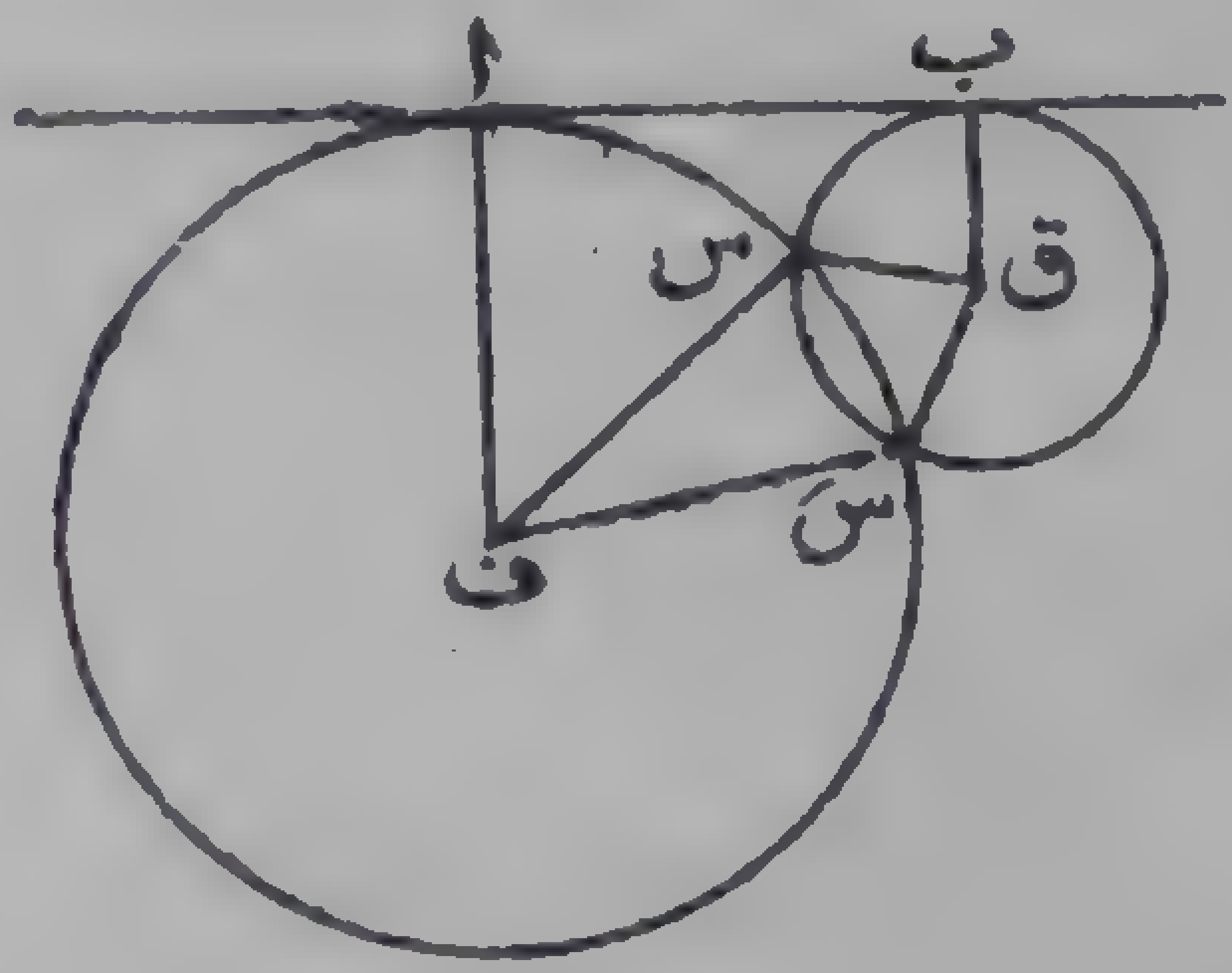
$$\frac{ل}{ر} = 1 + جم\ طہ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (19)$$

یہ ایک مکافی کی قطبی مساوات ہے جس کا ماسکہ اُس نقطہ پر ہے جہاں سے مرمی کو پھینکا گیا ہے اور حوالے کا ابتدائی خط انتصابی ہے۔ اِس سے وہ حدود متعین ہوتے ہیں جہاں تک مبداء سے مختلف سمتوں میں رسائی ہوسکتی ہے جبکہ پھینکنے کی رفتار معلوم ہو۔ چونکہ نیم وترِ خاص $\frac{ق^2}{ج}$ ہے اس لیے وہ مختلف مکافی راستوں کے مشترک مرتب کو راس پر مس کرتا ہے۔ دیکھو شکل ۲۵۔

یہ نتیجے ایک ہندسی عمل سے بھی بڑی آسانی سے حاصل ہوتے ہیں۔ اگر ایک دیے ہوئے نقطہ ف سے پھینکنے کی رفتار دی گئی ہو تو تمام مکافی راستوں کا مشترک مرتب مقرر ہوجاتا ہے۔ پس اگر ف ا کو مرتب پر عمود کھینچا جائے تو ماسکے اُس دائرہ پر واقع ہونگے جو ف کو مرکز اور ف ا کو نصف قطر مان کر کھینچا گیا ہو۔ اگر راستہ ایک دوسرے دیے ہوئے نقطہ ق میں سے بھی گذرے اور ق ب مرتب پر عمود کھینچا جائے تو ماسکہ اُس دائرہ پر بھی

واقع ہونا چاہیے جو ق کو مرکز اور ق ب کو نصف قطر مان کر کھینچا گیا ہو۔

اگر یہ دو دائرے متقاطع ہوں تو ان کے نقاطِ تقاطع س اور سَ ماسکے کے ممکن محل ہیں۔ اس صورت میں ف سے ق تک دو ممکن راستے ہیں اور ان کے متناظر ف سے پھینکنے کی سمتیں علی الترتیب زاویوں ا ف س اور ا ف سَ کی تنصیف کرتی ہیں۔



شکل ۲۴

اگر دائرے متقاطع نہ ہوں تو نقطہ ق اُس میدان سے باہر ہوگا جہاں تک ف سے پھینکا ہوا مرمی جا سکتا ہے۔

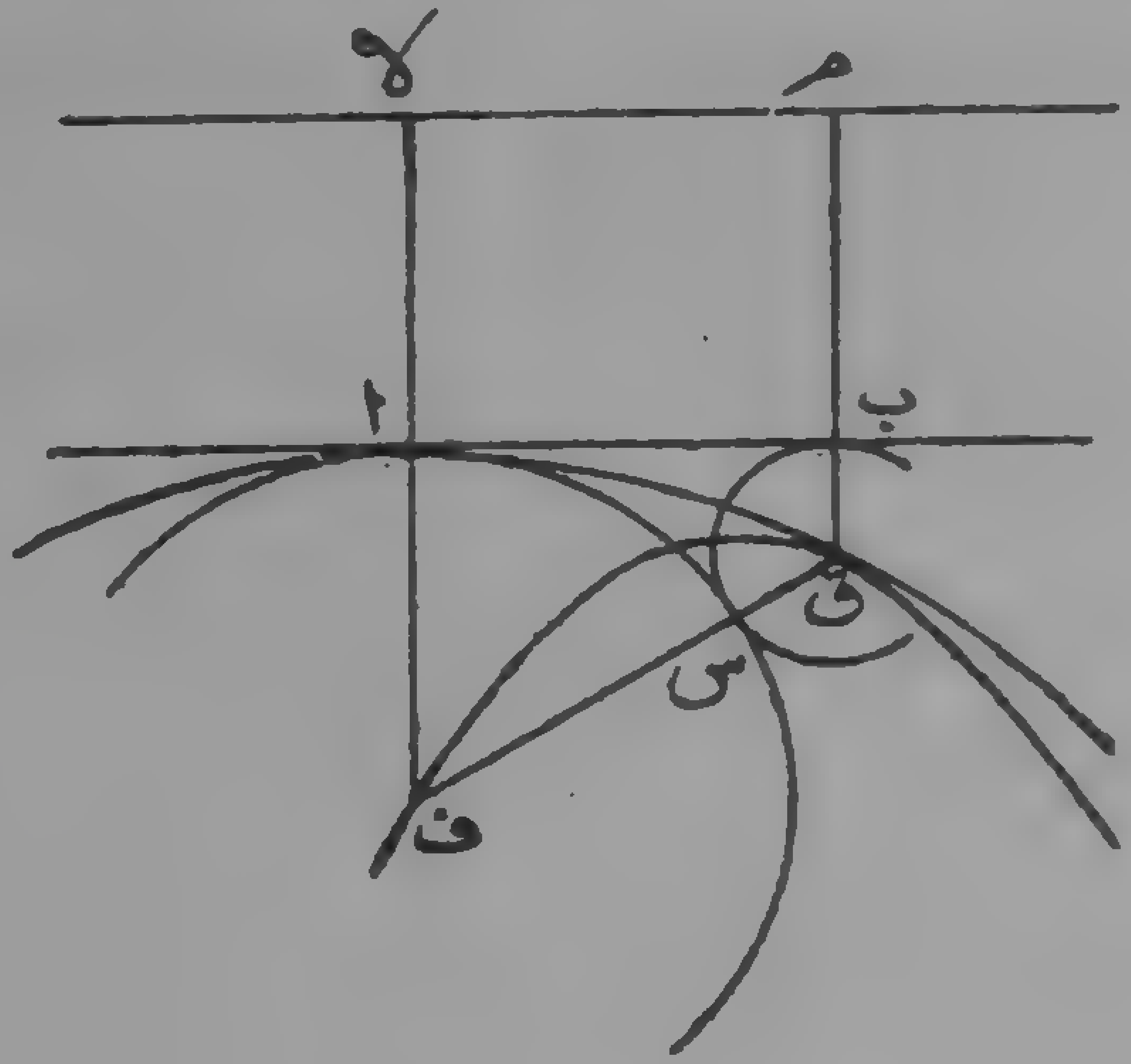
اگر دائرے ایک دوسرے کو مس کریں جیسا کہ شکل ۲۵ میں تو دو راستے منطبق ہو جاتے ہیں اور ماسکہ نقطہ تماس س پر ہوتا ہے۔ نقطہ ق اُس میدان کی عین حد پر ہے جہاں تک ف سے پھینکا ہوا مرمی جا سکتا ہے۔ یہ فی الحقیقۃ اُس لفاف پر کا ایک نقطہ ہے جو اُن مختلف مکافیوں کو لف کرتا ہے جو ف میں سے گذرتے ہیں اور جن کا مرتب دیا گیا ہے۔ اگر ہم ف ا کو ل تک خارج کریں اور ا ل = ف ا لیں اور نیز ق ب کو اتنا خارج کریں کہ وہ ل میں سے گذرنے والے اُفقی خط سے م پر ملے تو

ف ق = ف س + س ق = ف ا + ق ب = ق م ..... (۲۰)

اِس لیے لفاف ایک مکافی ہے جس کا ماسکہ ف اور راس ا ہے جیسا کہ تحلیلی طور پر اس سے پہلے معلوم کیا جا چکا ہے۔

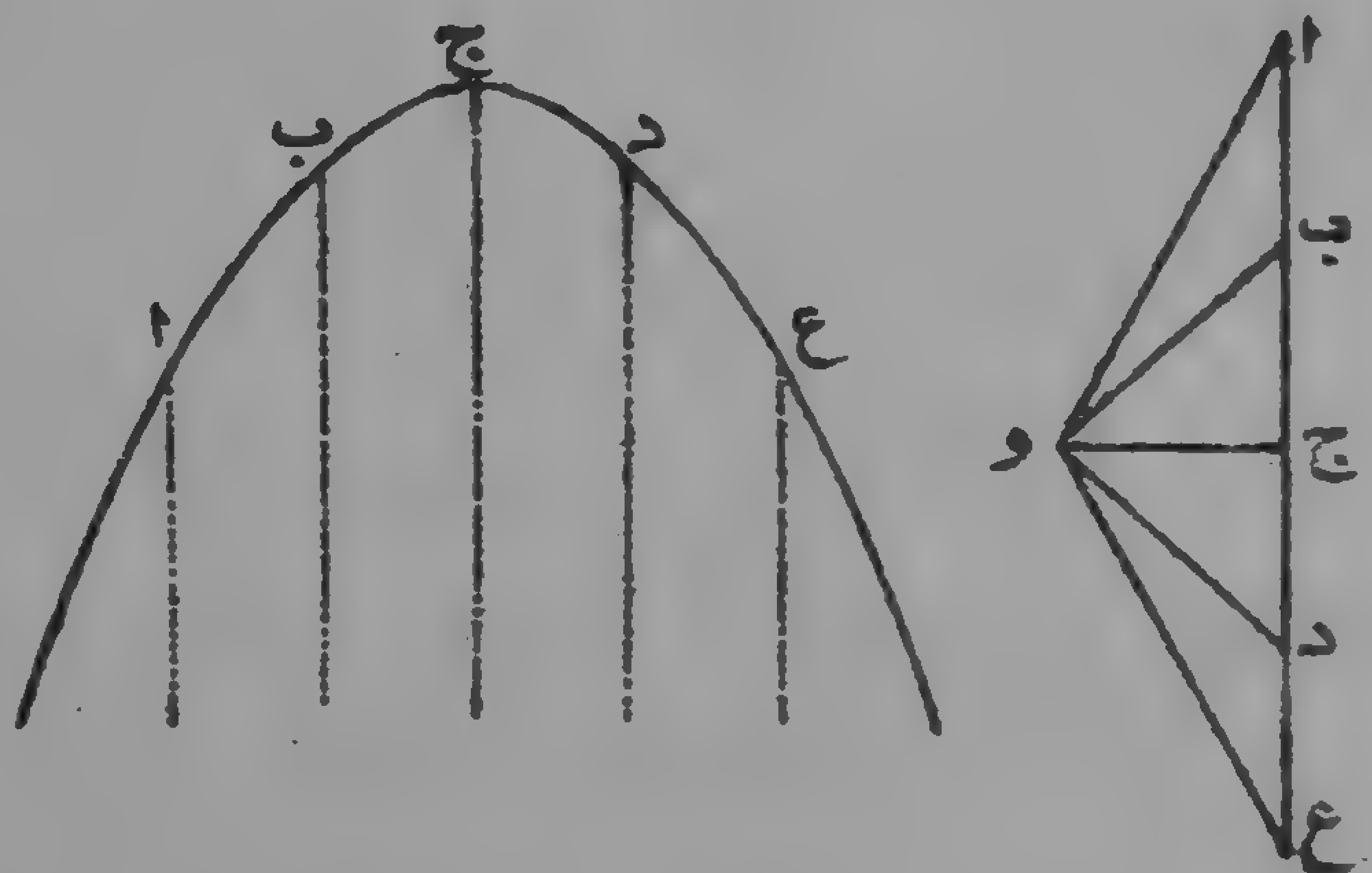
چونکہ رفتار کی تبدیلی فی اکائی وقت، نیچے وار انتصابی کی سمت (۴۵)
میں ہے اور اس کی مقدار مستقل ہے اس لیے رسم الطریق (دفعہ ۲۱)

مستقل رفتار (ج) سے مرتسم شدہ ایک خطِ مستقیم ہے - اس کو



شکل ۲۵

شکل ۲۶ میں بتایا گیا ہے جہاں رفتاروں کو متساوی الفصل لمحوں کے ایک سلسلہ کے لیے دکھایا گیا ہے (دائیں جانب)



شکل ۲۶

اگر اس سوال پر سمتیوں کی رقوم میں بحث کی جائے تو

ز = ج .... (۲۱)

جہاں ج وہ سمتی ہے جس سے رفتار کی تبدیلی فی اکائی وقت تعبیر ہوتی (۴۶)
ہے - اس لیے

و = ز = ج ت + ب .... (۲۲)

ر = $\frac{1}{2}$ ج ت^{2} + ب ت + ج .... (۲۳)

جہاں سمتیاں ب ، ج اختیاری ہیں ، وہ فی الحقیقت ر کے مبدا کے لحاظ سے ابتدائی رفتار اور ابتدائی محل کو تعبیر کرتی ہیں - مساوات (۲۲) سے رسم الطریق کا خطی ہونا ظاہر ہے -

۲۸ - ناقصی موسیقی حرکت -

فرض کرو کہ ایک ذرّہ ایک ثابت نقطہ و کی جانب ایسی قوت سے جذب ہوتا ہے جو فاصلہ کے تناسب ہے - تب کسی محل ف میں اسراع سمتی مہ × ف و سے حاصل ہوگا جہاں اکائی فاصلہ پر اسراع کا عددی ناپ مہ ہے - پس اُن محوروں کے لحاظ سے جو حرکت کے مستوی میں ہوں اور و میں سے گذرتے ہوں اسراع کے اجزائے ترکیبی - مہ لا ، - مہ ما ہونگے جہاں ف کے محدّد لا ، ما ہیں - اس لیے

$$\frac{\text{فر}^{2}\text{لا}}{\text{فرت}^{2}} = -\text{مہ لا}\ ، \quad \frac{\text{فر}^{2}\text{ما}}{\text{فرت}^{2}} = -\text{مہ ما} \quad \ldots\ldots (1)$$

اِن مساواتوں کو جُداگانہ حل کیا جاسکتا ہے - چنانچہ

مہ = ن^{2} .... (۲)

رکھنے سے حل

لا = ا جم ن ت + ب جب ن ت ،
ما = ج جم ن ت + د جب ن ت .... (۳)

حاصل ہوتا ہے جہاں ا، ب، ج، د اختیاری مستقل ہیں۔

اگر ہم ت کا مبداء وہ لمحہ قرار دیں جبکہ ذرہ محور لا کو، فرض کرو نقطہ (ل، ۰) پر عبور کرتا ہے تو

ا = ل، ج = ۰ .... (۴)

نیز اگر محور و ما اُس سمت میں کھینچا گیا ہو جو اِس لمحہ پر حرکت کی ہے تو ت = ۰ کے لیے لا = ۰، ما = وٖ (فرض کرو)، اس لیے

ب = ۰، ن د = وٖ .... (۵)

پس اِن خاص محوروں کے لحاظ سے

لا = ل جم ن ت، ما = ب جب ن ت .... (۶)

جہاں ب = وٖ / ن .... (۷)

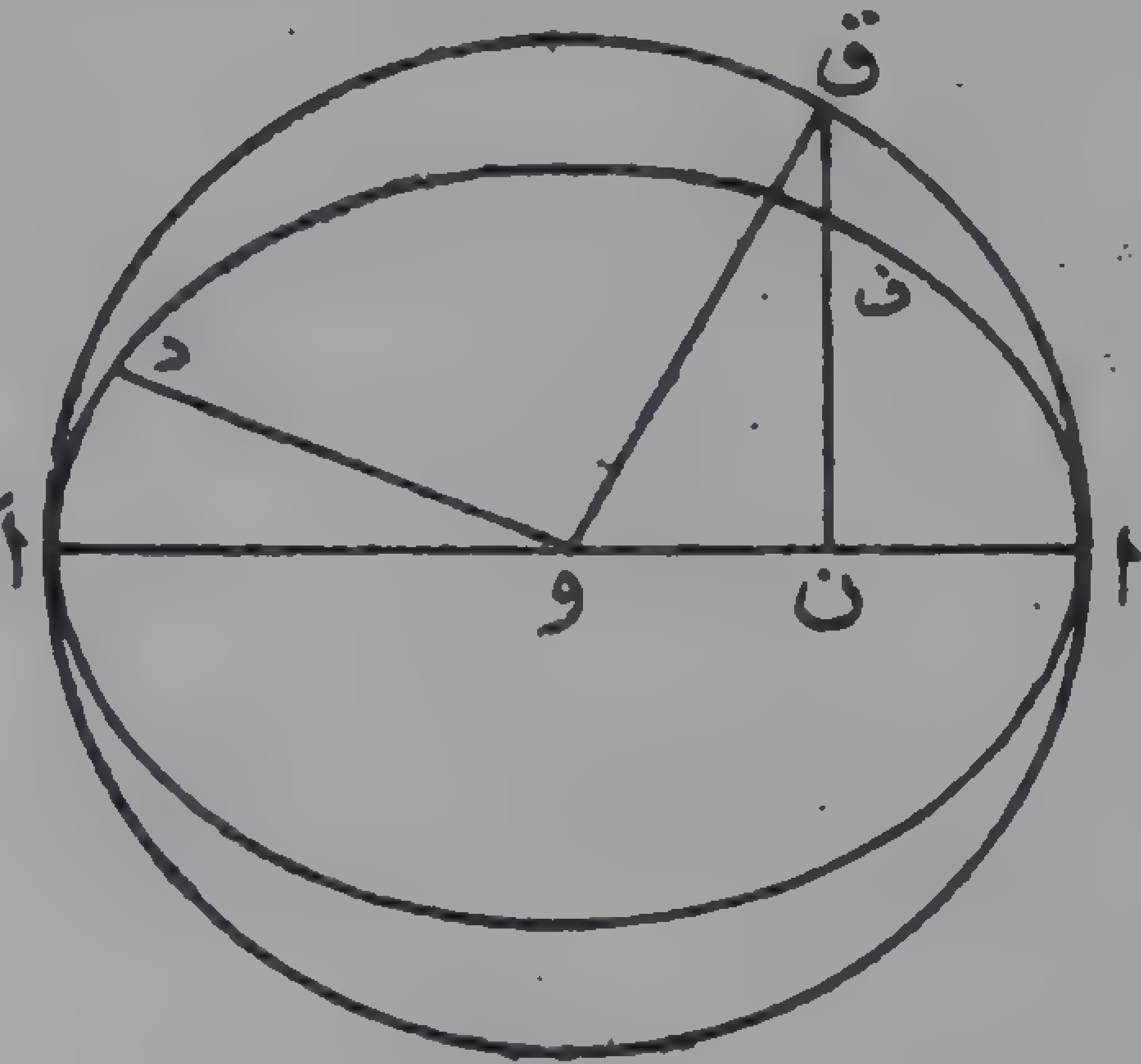
ت کو ساقط کرنے پر

لا² / ل² + ما² / ب² = ۱ .... (۸)

یہ ایک ناقص کی مساوات، مزدوج قطروں کے ایک زوج کے حوالے سے ہے۔ اس کے علاوہ چونکہ راستہ کے کسی نقطہ کو حرکت کی ابتداء کا نقطہ خیال کیا جا سکتا ہے اس لیے ضابطہ (۷) سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ کسی نقطہ ف پر رفتار اُس نیم قطر (فرض کرو و د) کے طول کے متناسب ہے جو و ف کا مزدوج ہے (مقابلہ کرو دفعہ ۱۲ مثال ۲ کے ساتھ)۔ دوسرے لفظوں میں رسم الطریق د کے طریق کے مشابہ ہے یعنے خود ناقصی مدار کے مشابہ۔

اگر مدار کے صدر محوروں کو محدّدوں کے محور قرار دیا جائے تو محدّد لا، ما قائم محدّد ہونگے اور (۶) میں زاویہ ن ت، ف کے خارج المرکز زاویہ کے مماثل ہوگا اور راستہ کے مرتسم ہونے کا قانون یہ ہوگا کہ یہ زاویہ ایک مستقل شرح سے بڑھیگا۔ نیز چونکہ وہ رقبے جو

ناقص اور اس کے امدادی دائرہ کے تناظر نصف قطر مرتسم کرتے ہیں ایک مستقل نسبت میں ہوتے ہیں اس لیے اُوپر کا بیان اس کے مماثل ہے کہ



شکل ۲۷

سمتی وتر و ف مساوی وقتوں میں مساوی رقبے عبور کرتا ہے۔

اِس قسم کی حرکت کو "ناقصی موسیقی" کہتے ہیں۔ ف کی ایک مکمل گردش کا دَور

$$ت = \frac{۲\pi}{ن} = \frac{۲\pi}{\sqrt{م}} \quad \text{.............} \quad (۹)$$

ہے اور اس لیے وہ ابتدائی حالات پر منحصر نہیں ہے۔

سمتیوں کی رقوم میں اس کا حل بہت مختصر اور جامع ہے۔ چنانچہ (۷۸)

$$ز = - ن^{۲} \times ر \quad \text{.............} \quad (۱۰)$$

اور اس لیے $ر = ا \,جم\, ن ت + ب \,جب\, ن ت$ .... (۱۱)

جہاں سمتیاں ا، ب اختیاری ہیں۔ یہ ایک ناقص کی مساوات ہے۔

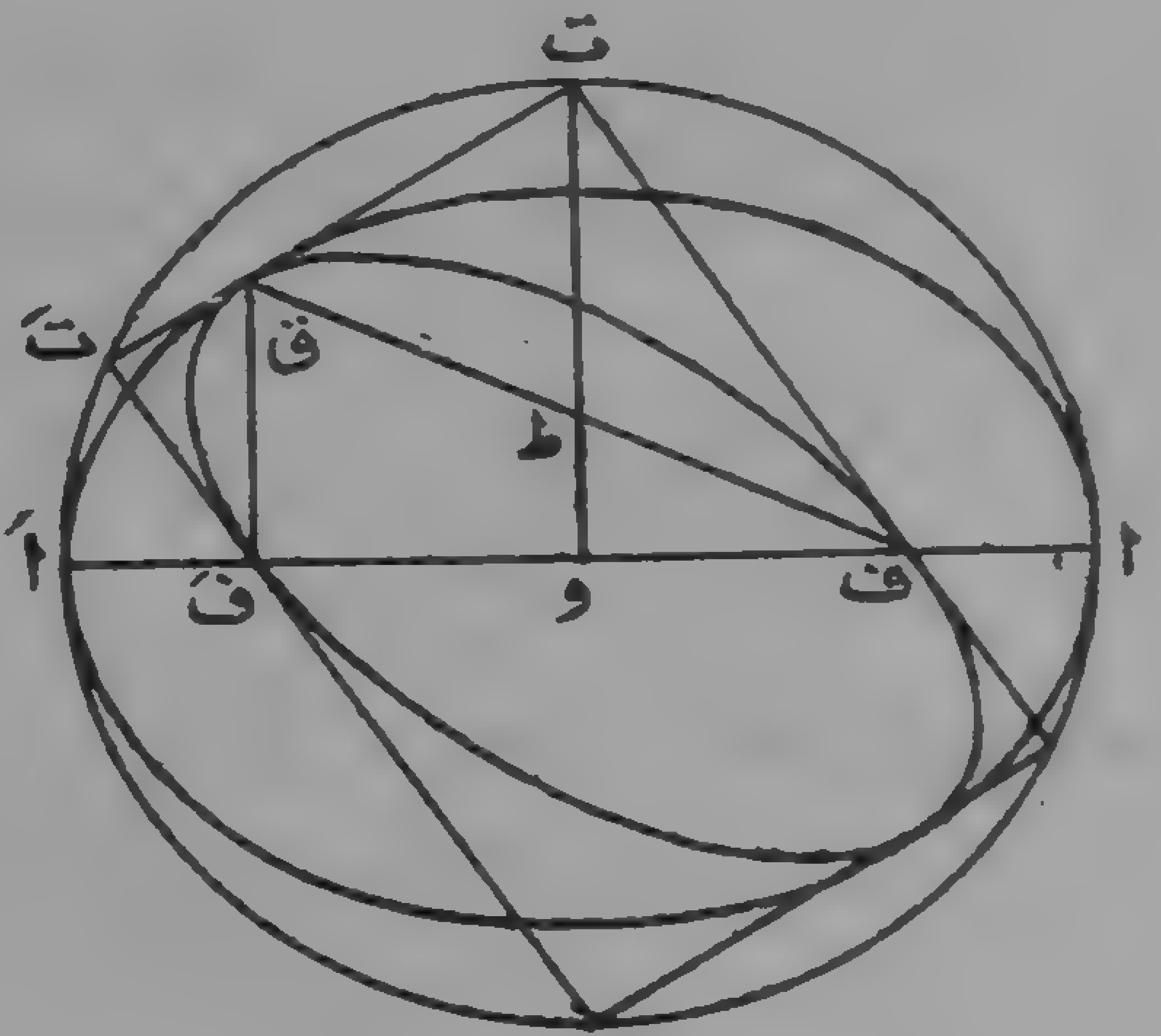
نیز لمحہ ت = ۰ پر

ر = ا، و = ز = ن ب .... (۱۲)

یہ نتیجے (۳) اور (۷) کے معادل ہیں۔

مثال: ایک دیے ہوئے نقطہ ف سے مختلف ذرّوں کو مختلف سمتوں میں ایک ہی رفتار سے پھینکا گیا ہے۔ ان کے راستوں کا لفاف معلوم کرو۔

چونکہ پھینکنے کی رفتار دی گئی ہے اس لیے نیم قطر (و د) جو وف کا مزدوج ہے طول میں متعین ہے، اور ۲ صدر نیم محوروں کے مربعوں کا مجموعہ جو و ف^2 + و د^2 کے مساوی ہے تمام مداروں کے لیے وہی ہے۔ اس لیے ان مختلف مداروں کا مرتب دائرہ (عمود وار مماسوں کے نقطہ تقاطع کا طریق) وہی ہے۔ اگر ان مداروں میں سے کسی ایک کے نقطہ ف پر کا مماس



شکل ۲۰

اس دائرہ سے ت پر ملے تو ت پر ف ت کا عمود تَ ق تَ بھی اس مدار کو مس کریگا۔ اگر نقطہ تماس ق ہو تو و ت، ف ق کی (فرض کرو ط پر) تنصیف کریگا اور اس لیے فَ ق کے متوازی ہوگا جہاں فَ وہ

نقطہ ہے جو مدار پر ف کے مقابل ہے - اس لیے

ف ق + فَ ق = ۲ ت ط + ۲ و ط = ۲ و ت = ا اَ

نیز چونکہ ف ق اور فَ ق علی الترتیب و تَ اور و ت کے متوازی ہیں وہ ت تَ سے مساوی میلان رکھتے ہیں۔ اس لیے یہ مدار اُس ناقص کو ق پر مس کرتا ہے جو ا اَ کو محور اعظم اور ف ، فَ کو ماسکے مان کر کھینچا گیا ہو۔ اس لیے یہ ناقص مطلوبہ لفاف ہے۔

(۷۹)

۲۹- کُروی رقاص - بلیک بَرن[ه] کا رقاص

اگر ایک سادہ رقاص کے اہتزاز ایک انتصابی مستوی میں مقید نہ ہوں تو ایسے رقاص کو "کروی رقاص" کہتے ہیں چنانچہ کسی ایسے کُروی رقاص کے لنگر کی حرکت پچھلے دفعہ کی تحقیق کے تحت آتی ہے بشرطیکہ انتصابی کے ساتھ ڈوری کا انتہائی میلان چھوٹا ہو۔ انتصابی حرکت کو نظر انداز کیا جاسکتا ہے جیسا کہ دفعہ ۱۱ میں کیا گیا تھا اور ڈوری کے تناؤ کو م ج کے مساوی رکھا جا سکتا ہے جہاں لٹکے ہوئے ذرّہ کی کمیت م ہے۔ اس کے لنگر کا اسراع نقطۂ تعلیق میں سے گذرنے والے انتصابی کی جانب ہے۔ یہ اسراع $\frac{ج ر}{ل}$ کے مساوی ہے۔ جہاں ر، اِس انتصابی سے فاصلہ ہے اور ل، ڈوری کا طول ہے۔ اسی لیے پچھلے دفعہ کی تحقیق کا اطلاق، $ن^{۲} = \frac{ج}{ل}$ رکھنے سے ہو جاتا ہے۔ راستہ تقریباً ایک اُفقی ناقص ہے جو دَور

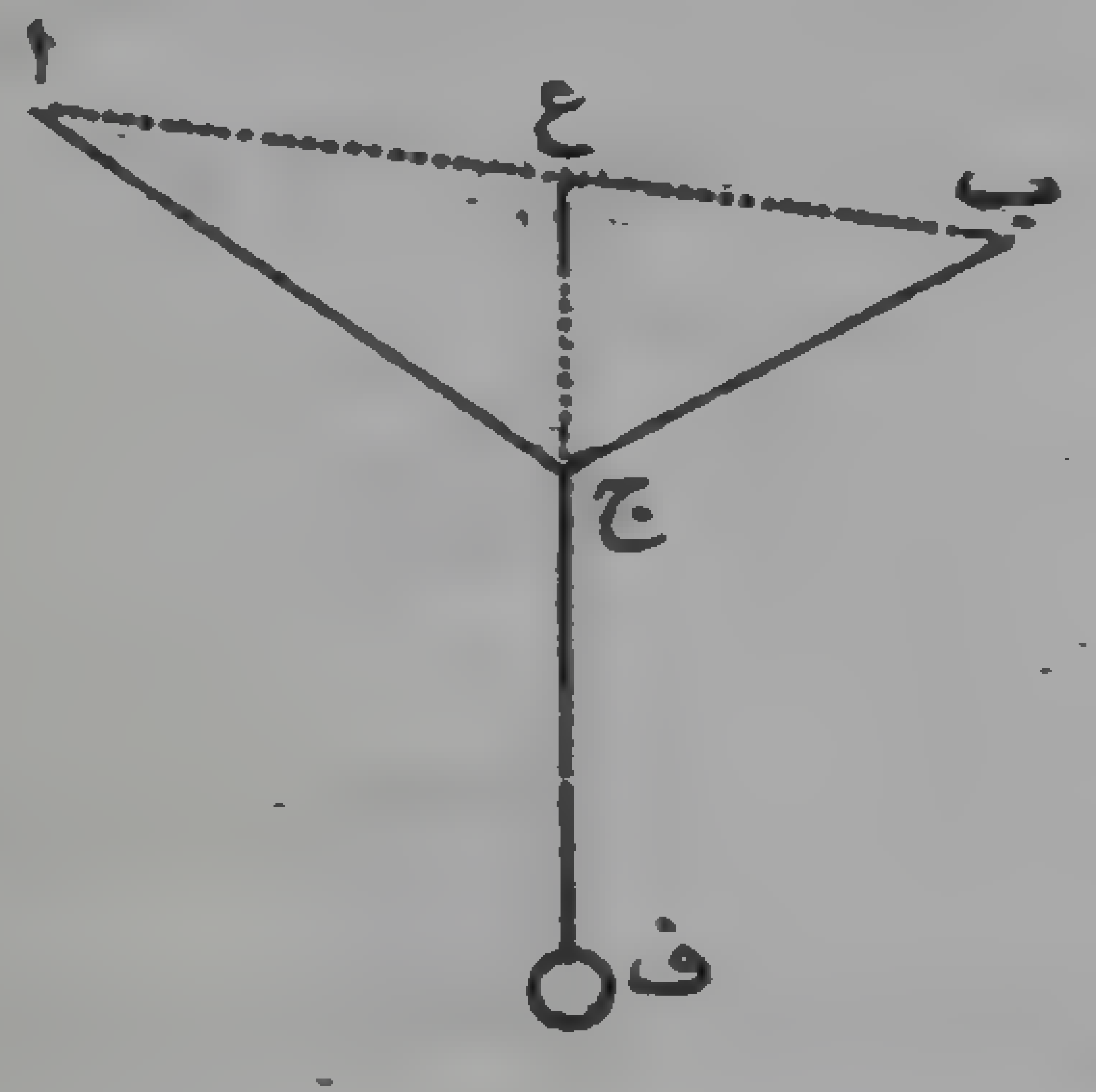
ه - Blackburn

$$ت = ۲\pi\sqrt{\frac{ل}{ج}} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (۱)$$

میں مرتسم ہوتا ہے۔

یہ مسئلہ صریحاً اُس مسئلہ کے مماثل ہے جبکہ ایک ذرّہ ایک چکنے کرُوی پیالے میں زیریں ترین نقطہ کے قریب اہتزاز کر رہا ہو، اِس صورت میں پیالے کے عماد وار تعامل کا وہی عمل ہوتا ہے جو اُوپر کی صورت میں ڈوری کا تناؤ کرتا ہے۔

بلیک برن[۱] کے رقاص میں ایک وزن ایک ڈوری ج ف کے سِرے ف پر لٹکا ہوا ہوتا ہے اور اِس ڈوری کا دوسرا سِرا ج دوسری ڈوری ا ج ب کے نقطہ ج پر بندھا ہوا ہوتا ہے اور اس دوسری ڈوری کے سِرے ا، ب ثابت ہوتے ہیں۔ اگر ہم ڈوریوں کے جمود کو نظرانداز کریں تو نقطہ ف ہمیشہ ا، ب، ج کے مستوی میں ہوگا۔



شکل ۲۹

یہ ظاہر ہے کہ اگر ذرّہ، ا ب میں سے گذرنے والے انتصابی مستوی میں چھوٹے اہتزاز کرے تو حرکت طول ج ف کے ایک سادہ رقاص کی حرکت ہوگی لیکن اگر وہ اِس مستوی کے علی القوائم حرکت کرے تو حرکت طول ع ف کے ایک رقاص کی حرکت ہوگی جہاں ع، ا ب کا وہ نقطہ ہے جو ف کے توازن کے محل کے انتصاباً اُوپر واقع ہے۔ پس اگر ان

[۱] ہیو۔ بلیک برن پروفیسر ریاضی گلاسگو (۱۸۴۹ء تا ۱۸۷۹ء)

مستویوں میں چھوٹے ہٹاؤ لا، ما سے تعبیر ہوں اور اگر ہم

$$ف^2 = \frac{ج}{ج ف}، \quad ق^2 = \frac{ج}{ع ف} \quad \ldots\ldots (۲)$$

لکھیں تو اہتزاز کے یہ دو نمونے مساواتوں

$$\frac{فز^2 لا}{فزت^2} = - ف^2 لا، \quad \frac{فز^2 ما}{فزت^2} = - ق^2 ما \quad \ldots\ldots (۳)$$

سے تعبیر ہونگے۔

نیز یہ واضح ہے کہ ایک چھوٹے ہٹاؤ کی وجہ سے جو ما کے متوازی ہو، لنگر پر لا کے متوازی استردادی قوت چھوٹی مقداروں کے پہلے رتبہ تک نہیں بدلیگی اور اس لیے مساواتوں (۳) کو درست سمجھا جاسکتا ہے جبکہ دونوں نمونوں کے ہٹاؤں کا انطباق کیا جائے۔ اس لیے لنگر کی عام سے عام چھوٹی حرکت کے لیے

$$\left.\begin{array}{l} لا = ا_1 \text{ جم } ف ت + ب_1 \text{ جب } ف ت، \\ ما = ا_2 \text{ جم } ق ت + ب_2 \text{ جب } ق ت \end{array}\right\} \ldots\ldots (۴)$$

حاصل ہوتا ہے۔

مختلف دَوروں کے دو سادہ موسیقی ارتعاشوں کو جو عمود وار سمتوں میں ہوں مرکب کرنے سے جو منحنی حاصل ہوتے ہیں وہ تجربی صوتیات میں بڑی اہمیت رکھتے ہیں، اِن منحنیوں کو لیسا جاوسس (Lissajous)[1] کے نام سے وابستہ کیا جاتا ہے کیونکہ اُس نے اِس نقطہ نظر سے اِن کا مطالعہ بڑی تفصیل سے کیا تھا۔ اگر دو دَور $\frac{۲\pi}{ف}$، $\frac{۲\pi}{ق}$ متوافق ہوں تو (۴) میں لا اور ما کی قیمتیں دونوں تکرار پائینگی

---

[1] J.A. Lissajous, *Etude optique des mouvements vibratoires*, 1873

جب کبھی ت میں اِن دَوروں کے مشترک ذو اضعاف اقل کا اضافہ ہوگا اور اس لیے یہ منحنی متداخلہ ہوتے ہیں۔ بہت سے عملی اور مناظری تدبیریں اِن منحنیوں کو مرتسم کرنے کے لیے تجویز کی گئی ہیں۔

مساواتیں (۳) اُس ذرّہ کے اہتزازوں پر بھی اطلاق پذیر ہیں جو ایک چکنے برتن میں جو کُروی شکل سے مختلف شکل کا ہو اہتزار کر رہا ہو۔ اگر ہم اُن تراشوں پر غور کریں جو زیر ترین نقطہ میں سے گذرنے والی انتصابی مستویوں سے حاصل ہوتی ہیں تو ہندسہ مجسمات سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ اِس نقطہ پر انحناء، دو معین تراشوں کے لیے جو ایک دوسرے کے علی القوائم ہوں، علی الترتیب اعظم اور اقل ہوتا ہے۔

اگر ذرّہ اِن میں سے ایک مستوی میں اہتزاز کرے تو دَور ایک ایسے سادہ رقاص کے دَور کے مساوی ہوگا جس کا طول متناظر نصف قطر انحناء کے مساوی ہو۔ اگر وہ کسی اَور طریقہ پر اہتزاز کرے تو مساواتیں (۳) اور (۴) اطلاق پذیر ہونگی بشرطیکہ ہم

$$ف^{2} = \frac{ج}{ر_{1}} ،\quad ق^{2} = \frac{ج}{ر_{2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

رکھیں جہاں $ر_1$، $ر_2$ زیر بحث نصف قطر انحناء ہیں[۱]۔

۳۰۔ توانائی کی مساوات۔

ہم یہ بیان کر چکے ہیں کہ دفعہ ۲۶ کی عام مساواتیں

$$م\,\frac{فزع}{فزت} = لا ،\quad م\,\frac{فزو}{فزت} = ما \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

[۱] بلیک برن کے رقاص میں نقطہ ف کا طریق ایک " لنگر چھلا " ہے جو ایک دائرہ کو جس کا مرکز ج اور نصف قطر ج ف ہے خط اب کے گرد گردش دینے سے تکوین پاتا ہے۔

درست رہتی ہیں خواہ محددوں کے محور قائم ہوں یا مائل لیکن اب ہم موجودہ مقصدوں کے لیے اِن کو قائم محور فرض کرینگے۔

اگر اِن مساواتوں کو علی الترتیب ع، و سے ضرب دے کر جمع کیا جائے تو

$$\text{م}\left(\text{ع}\frac{\text{فرع}}{\text{فرت}}+\text{و}\frac{\text{فرو}}{\text{فرت}}\right)=\text{لا ع}+\text{ما و}\quad\ldots\ldots(2)$$

$$\text{یا}\qquad \frac{\text{فر}}{\text{فرت}}\times\frac{1}{2}\text{م}\left(\text{ع}^2+\text{و}^2\right)=\text{لا}\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}}+\text{ما}\frac{\text{فرما}}{\text{فرت}}\quad\ldots\ldots(3)$$

اگر حاصل رفتار کو ق سے تعبیر کیا جائے تو

$$\text{ق}^2=\text{ع}^2+\text{و}^2\quad\ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

چنانچہ حاصل ضرب $\frac{1}{2}$م (ع^2 + و^2) توانائی بالحرکت ہے۔ نیز قوت (لا، ما) ایک چھوٹے ہٹاؤ (مف لا، مف ما) میں جو کام کرتی ہے وہ لا مف لا + ما مف ما ہے اور اس لیے مساوات (۳) کا بائیں جانبی رکن اُس شرح کو تعبیر کرتا ہے جس سے ذرہ پر لمحہ ت پر کام ہو رہا ہے۔ اِس لیے مساوات (۳) سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ توانائی بالحرکت ایسی شرح سے بڑھ رہی ہے جو اُس شرح کے مساوی ہے جس سے کام ہو رہا ہے۔ حسبِ دفعہ ۱۸ تکمل کرنے سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ وقت کے کسی وقفہ میں توانائی بالحرکت کا اضافہ اُس کُل کام کے مساوی ہوتا ہے جو ذرہ پر انجام پاتا ہے۔ علامتوں میں

$$\frac{1}{2}\text{م ق}_2^2-\frac{1}{2}\text{م ق}_1^2=\int_{\text{ت}_1}^{\text{ت}_2}\left(\text{لا}\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}}+\text{ما}\frac{\text{فرما}}{\text{فرت}}\right)\text{فرت}\quad\ldots(5)$$

جہاں لا اور ما کو بلا شبہ ت کے تفاعلوں کے طور پر بیان کیا گیا ہے۔ لیکن اگر قوت کا ایک مستقل میدان ہو (سکونیات دفعہ ۴۹)

یعنے ذرہ پر عمل کرنے والی قوت ایک ہی مقام پر ہمیشہ وہی ہو اور اس لیے ﻻ اور ھا ، لا اور ما کے دیے ہوئے تفاعل کمت کے غیر تابع ہوں تو اوپر کے محدود تکملہ کی بجائے تکملہ

$$\int (\text{ﻻ فرلا} + \text{ھا فرما}) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (\text{٦})$$

رکھا جا سکتا ہے جس میں یہ تسلیم کر لیا گیا ہے کہ راستہ کے تمام صغیر عنصروں
(۸۲ کے لیے جملہ ﻻ مف لا + ھا مف ما کو محسوب کر کے جمع کیا گیا ہے۔ اس
کی ایک معادل شکل

$$\int_{\text{س}_1}^{\text{س}_2} \left(\text{ﻻ} \frac{\text{فرلا}}{\text{فرس}} + \text{ھا} \frac{\text{فرما}}{\text{فرس}}\right) \text{فرس} \quad \ldots\ldots (\text{٧})$$

ہے جہاں س ، منحنی کے کسی ثابت نقطہ سے پیمائش کردہ قوس ہے۔

وہ قوت جو میدان کی قوت کو متوازن کرنے کے لیے مطلوب ہے (- ﻻ ، - ھا) ہے اس لیے جملہ

$$-\int (\text{ﻻ فرلا} + \text{ھا فرما}) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (\text{٨})$$

سے جبکہ اُس کو واجب حدود کے درمیان لیا گیا ہو کام کی وہ مقدار حاصل ہوتی ہے جو ایک بیرونی عامل کو انجام دینی ہوگی تاکہ ذرہ انتہائی سُستی کے ساتھ پہلے محل سے دوسرے محل میں آئے۔ اگر میدان کی ترکیب بالکل اختیاری ہو تو یہ مقدار بالعموم راستہ کی نوعیت پر منحصر ہوگی (سکونیات دفعہ ۴۹) اور صرف ابتدائی اور آخری محلوں پر ہی منحصر نہیں ہوگی۔ لیکن اگر وہ صرف اِن اختتامی نقطوں پر ہی منحصر ہو تو میدان کو " بقائی " یا " تحفظی " کہتے ہیں۔ فطری مظاہر میں زیادہ تر ایسے ہی بقائی میدانوں سے واسطہ رہتا ہے۔

کسی بقائی یا تحفظی میدان میں وہ کام جو بیرونی قوتیں ذرہ کو

(انتہائی سستی سے) کسی معیاری محل ا سے کسی دوسرے محل ف تک لانے میں انجام دیتی ہیں ف کے محددوں کا ایک محدود تفاعل ہوتا ہے۔ اس کو "توانائی بالقوہ" کہتے ہیں اور بالعموم حرف قہ[1] سے تعبیر کرتے ہیں۔ پس ا سے ف$_1$ تک گزرنے میں صرف میدانوں کی قوتوں نے جو کام کیا ہے وہ۔ قہ$_1$ ہے۔ اس لیے وہ کام جو کسی محل ف$_1$ سے کسی دوسرے محل ف$_2$ تک گزرنے میں یہی قوتیں انجام دیتی ہیں قہ$_1$۔قہ$_2$ ہے کیونکہ یہ فرض کیا جا سکتا ہے کہ ذرہ اول ف$_1$ سے ا تک اور پھر ا سے ف$_2$ تک گزرا ہے۔

پس ایک ایسے ذرّہ کی صورت میں جو ایک تحفظی میدان میں حرکت کر رہا ہو اور کوئی بیرونی قوتیں عمل نہ کریں ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\frac{1}{2}\,\text{م}\,\text{ق}_2^2 - \frac{1}{2}\,\text{م}\,\text{ق}_1^2 = \text{قہ}_1 - \text{قہ}_2 \quad \ldots\ldots (9)$$

یا

$$\frac{1}{2}\,\text{م}\,\text{ق}_2^2 + \text{قہ}_2 = \frac{1}{2}\,\text{م}\,\text{ق}_1^2 + \text{قہ}_1 \quad \ldots\ldots (10)$$

یعنے توانائی بالحرکت اور توانائی بالقوہ کا مجموعہ مستقل ہوتا ہے۔

(۸۳) اگر میدان کی قوتوں کے علاوہ دیگر خارجی قوتیں ہوں تو ف$_1$ سے ف$_2$ تک گزرنے میں جو کام یہ خارجی قوتیں انجام دیتی ہیں ان کو (۹) کے بائیں جانبی رکن میں جمع کرنا ہوگا اور یہ معلوم ہوگا کہ توانائی بالحرکت اور توانائی بالقوہ کا مجموعہ بقدر اُس مقدار کے بڑھ جاتا ہے جو خارجی قوتوں کے کام کے مساوی ہے۔ (دیکھو دفعہ ۱۸)۔

یہ کہنے کی ضرورت نہیں کہ ان نتیجوں پر دو بُعدی حرکت کی کوئی قید نہیں ہے۔ حرکت کی سمتی مساوات جو ایسی قیدوں سے بالکل آزاد ہے، حسب دفعہ ۲۵ (۴)

---

[1] انگریزی میں اس کو V سے تعبیر کیا جاتا ہے۔

$$\text{م}\,\ddot{\vec{\text{ز}}} = \vec{\text{ف}} \qquad \text{(11)}$$

ہے اس لیے

$$\text{م}\,\dot{\vec{\text{ز}}}\cdot\ddot{\vec{\text{ز}}} = \vec{\text{ف}}\cdot\dot{\vec{\text{ز}}} \qquad \text{(12)}$$

کیونکہ سمتیوں کے حاصل ضرب اُس نمونہ کے ہوتے ہیں جس کو "پیمانوی" کہتے ہیں (سکونیات دفعہ ۶۳)۔

اس لیے

$$\frac{1}{2}\,\text{م}\,\dot{\text{ز}}^2 = \int \vec{\text{ف}}\cdot\dot{\vec{\text{ز}}}\,\text{فرت} \qquad \text{(13)}$$

یا اگر ف، صرف ر کا تفاعل ہو تو

$$\frac{1}{2}\,\text{م}\,\dot{\text{ز}}^2 = \int \vec{\text{ف}}\cdot\text{فر}\vec{\text{ر}} \qquad \text{(14)}$$

چونکہ کسی سمتی کا پیمانوی مربع سمتی کی مطلق قیمت کا مربع ہوتا ہے اس لیے دائیں جانب رکن توانائی بالحرکت ہے۔ نیز پیمانوی حاصل ضرب ف مف ر وہ کام (سکونیات دفعہ ۶۳) ہے جو قوت ف ایک چھوٹے ہٹاؤ مف ر میں انجام دیتی ہے۔

مثال ۱۔ معمولی جاذبہ کی صورت میں اگر ما سے وہ ارتفاع تعبیر ہو جو کسی ثابت ہموار سطح کے اُوپر ہے تو ہم کہہ سکتے ہیں

$$\text{قہ} = \text{م ج ما} \qquad \text{(15)}$$

پس ایک مرمی کی آزاد حرکت میں

$$\frac{1}{2}\,\text{م ق}^2 + \text{م ج ما} = \text{مستقل} \qquad \text{(16)}$$

جو دفعہ ۲۷ کے مطابق ہے۔ وہی ضابطہ اُس حرکت پر بھی اطلاق پذیر ہے جو جاذبہ کے تحت ایک چکنے منحنی پر واقع ہو کیونکہ منحنی کا عمادی تعامل کوئی کام نہیں کرتا۔

مثال ۲۔ اگر ایک ذرہ ایک ثابت نقطہ و کی جانب قوت فہ (ر) سے جذب ہو جہاں فہ (ر) صرف فاصلہ ر کا ایک تفاعل ہے تو

$$\text{قہ} = \int_{\text{ل}}^{\text{ر}} \text{فہ (ر) قر ر} \quad \ldots\ldots\ldots (۱۷)$$

جہاں نچلی حد ل معیاری محل کے حوالے سے ہے۔
اس طرح اگر

$$\text{فہ (ر)} = \text{ک ر} \quad \ldots\ldots\ldots (۱۸)$$

تو ہم رکھ سکتے ہیں

$$\text{قہ} = \frac{1}{2}\,\text{ک ر}^{2} \quad \ldots\ldots\ldots (۱۹)$$

جس میں ایک اختیاری مستقل کو ترک کر دیا گیا ہے۔ پس اِس قوت کے تحت ایک (۸۴)
آزاد مدار میں

$$\frac{1}{2}\,\text{م ق}^{2} + \frac{1}{2}\,\text{ک ر}^{2} = \text{مستقل} \quad \ldots\ldots\ldots (۲۰)$$

ہم دفعہ ۲۸ میں دیکھ چکے ہیں کہ یہ مدار ایک ناقص ہے اور ذرہ کی رفتار

$$\text{ق} = \text{ن رَ} \quad \ldots\ldots\ldots (۲۱)$$

ہے جہاں رَ سمتی نصف قطر ر کا مزدوج نیم قطر ہے اور ن = $\left(\frac{\text{ک}}{\text{م}}\right)^{\frac{1}{2}}$۔
اس طرح ضابطہ (۱۰) کی تصدیق ہوتی ہے کیونکہ ناقص میں حاصل جمع $\text{ر}^{2} + \text{رَ}^{2}$
مستقل ہے۔

مثال ۳۔ سادہ رقاص (دفعہ ۱۱) کی صورت میں توانائی بالقوہ کو اُس کام سے محسوب کیا جا سکتا ہے جس کو افقی قوت $\frac{\text{م ج لا}}{\text{ل}}$ انصراف پیدا کرنے میں کرتی ہے۔ چنانچہ

$$\text{قہ} = \frac{1}{2}\,\text{م ج}\,\frac{\text{لا}^{2}}{\text{ل}} \quad \ldots\ldots\ldots (۲۲)$$

پھر اگر اس کام پر غور کیا جائے جو جاذبہ کے خلاف انجام پاتا ہے تو

$$\text{قہ} = \text{م ج ما} \quad (۲۳)$$

جہاں توازن کے محل کی ہموار سطح کے اُوپر ارتفاع ما سے تعبیر ہوتا ہے۔ چونکہ

$$\text{لا}^{2} = \text{ما (۲ل - ما)} \quad \ldots\ldots\ldots (۲۴)$$

اس لیے یہ ضابطے مطلوبہ تقریب کے رتبہ تک درست ہیں۔
یہ ثبوت بلاشبہ کروی رقاص پر بھی اطلاق پذیر ہے۔

۳۱۔ قوت کے بقائی میدان کے خواص۔

ایک تحفظی میدان میں ایک ذرہ پر عمل کرنے والی قوت کو توانائی بالقوہ قہ کی رقوم میں صریحاً بیان کیا جا سکتا ہے۔ اگر ہم ذرہ کو ایک چھوٹے فصل ف فَ (= مف س) میں سے کسی دی ہوئی سمت میں ہٹتا ہوا خیال کریں (دیکھو دفعہ ماسبق) تو اُس بیرونی قوت کا کام جو میدان کی قوت کو متوازن کرنے کے لیے مطلوب ہوگی۔ ق مف س ہے جہاں سمت ف فَ میں میدان کی قوت کا جزو ترکیبی ق ہے۔ اس لیے

مف قہ = ـ ق مف س .... (۱)

یا ق = ـ $\frac{\text{جف قہ}}{\text{جف س}}$ .... (۲)

جزئی تفرق کی علامت استعمال کی گئی ہے کیونکہ ممکنہ سمتوں کی لامحدود تعداد میں سے ایک میں قہ کا فضائی ڈھال لیا گیا ہے۔

بالخصوص اگر ہم ف فَ کو علی التواتر دو (قائم) محوروں کے متوازی لیں تو نقطہ (لا، ما) پر قوت کے اجزائے ترکیبی

لا = ـ $\frac{\text{جف قہ}}{\text{جف لا}}$ ، ما = ـ $\frac{\text{جف قہ}}{\text{جف ما}}$ .... (۳)

حاصل ہونگے۔

وہ خط جس پر قہ مستقل ہو، "ہم قوہ" خط[۱] کہلاتا ہے۔ اگر (۱) میں

---

[۱] تین ابعاد میں بلاشبہ ہم قوہ سطحیں حاصل ہوتی ہیں۔ جب قوت کا میدان تجاذبی مادہ کی تقسیم سے پیدا ہوتا ہے تو ایسی سطحوں کو "ہموار سطحیں" بھی کہا جاتا ہے۔

ہم عنصر مف س کو ایسے خط پر لیں تو $\frac{\text{جف قہ}}{\text{جف س}}$ = ۰، اس لیے کسی نقطہ پر

حاصل قوت اِس نقطہ میں سے گزرنے والے ہم قوہ خط پر عمود ہوتی ہے۔ نیز اگر ہم مستقل ج کے صغیر مساوی اضافوں مف ج کے ایک سلسلہ کے لیے ہم قوہ خطوط

قہ = ج ....(۴)

کھینچیں اور اگر دو متصلہ منحنیوں کے درمیان عمودی فاصلہ مف ن ہو تو حاصل قوت (ر) مساوات

ر × مف ن = - مف قہ = مف ج ......(۵)

سے حاصل ہوتی ہے۔ اس لیے قوت کی شدت مف ن کے بالعکس متناسب ہے۔ اس لیے ہم قوہ خطوں کا نظام، جو حسب صراحت بالا کھینچے گئے ہوں، اپنی نزدیکی کے درجہ سے یہ ظاہر کرتے ہیں کہ قوت کی شدت زیادہ بڑی ہے یا زیادہ چھوٹی۔

وہ خط جس کو نقطہ بہ نقطہ اس طرح کھینچا گیا ہو کہ اس کی سمت ہر جگہ حاصل قوت کی سمت ہو "قوت کا خط" کہلاتا ہے۔ قوت کے خط ہم قوہ خطوں کے علی القوائم ہوتے ہیں اگر قوت صفر یا لاتناہی نہ ہو۔ معمولی جاذبہ کی صورت میں ہم قوہ خط افقی اور قوت کے خط انتصابی ہوتے ہیں۔ مرکزی کشش کی صورت میں ہم قوہ خط ہم مرکز دائرے اور قوت کے خط نصف قطری خطوطِ مستقیم ہوتے ہیں۔

۳۲۔ توازن کے گرد اہتزاز۔ قائمیت۔

بقائی میدان میں (جس کو یہاں آسانی کے مدنظر دو بُعدی لیا گیا ہے) توازن کے ممکن محلوں کے محدّد (لا، ما) شرطوں لا = ۰، ما = ۰ یا

جف قہ / جف لا = ۰ ، جف قہ / جف ما = ۰ ....(۱)

سے متعین ہوتے ہیں پس توازن کے محلوں میں یہ خصوصیت ہوتی ہے کہ تمام صغیر ہٹاؤں کے لیے توانائی بالقوہ مقیم ہوتی ہے - یہ دفعہ ۱۳۱ (۱) سے بھی فوراً ماخوذ ہو سکتا ہے -

کسی صورت میں توازن کی نوعیت معلوم کرنے کے لیے فرض کرو کہ مبداء کو زیر بحث محل پر منتقل کیا گیا ہے - فرض کرو کہ اس کے عین قریب نقطوں پر (۸
قہ کی جو قیمت ہے اس کو لا، ما کی قوتوں میں پھیلایا گیا ہے چنانچہ

قہ = قہ۰ + عہ لا + بہ ما + ۱/۲ (الا^۲ + ۲ ھ لا ما + ب ما^۲) + ... (۲)

اب چونکہ مساوات (۱)، لا = ۰، ما = ۰ کے لیے پوری ہونی چاہیے اس لیے سروں عہ، بہ کو معدوم ہونا چاہیے، اس لیے

قہ - قہ۰ = ۱/۲ (الا^۲ + ۲ ھ لا ما + ب ما^۲) + ... (۳)

پس تیسرے اور اس سے اعلیٰ درجوں کی رقوم کو نظر انداز کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ مبداء کے عین قریب ہم قوہ خط، ہم مرکز اور مشابہ مخروطی

الا^۲ + ۲ ھ لا ما + ب ما^۲ = مستقل .... (۴)

ہیں -

اگر محددوں کے محوروں کو اس طرح منتخب کیا جائے کہ وہ ان مخروطیوں کے صدر محوروں پر منطبق ہو جائیں تو ضابطہ (۳) آسان شکل

قہ - قہ۰ = ۱/۲ (الا^۲ + ب ما^۲) + ... (۵)

اختیار کرتا ہے جس میں ا، ب بلاشبہ بدلے ہوئے ہیں - اس لیے ایک ذرّہ م کی حرکت کی مساواتیں، لا اور ما کی چھوٹی قیمتوں کے لیے، شکلوں

$$\left.\begin{aligned} \text{م}\,\frac{\text{فر}^2\,\text{لا}}{\text{فرت}^2} &= -\,\frac{\text{جف قہ}}{\text{جف لا}} = -\,\text{الا} \\ \text{م}\,\frac{\text{فر}^2\,\text{ما}}{\text{فرت}^2} &= -\,\frac{\text{جف قہ}}{\text{جف ما}} = -\,\text{ب ما} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (6)$$

میں تحویل ہوتی ہیں۔

پس اگر (۵) میں سر ا، ب دونوں مثبت ہوں تو حرکت علی القوائم سمتوں میں، علی الترتیب دَوروں

$$2\pi\sqrt{\frac{\text{م}}{\text{ا}}}\ ،\ 2\pi\sqrt{\frac{\text{م}}{\text{ب}}} \quad \ldots\ldots\ldots (7)$$

کے دو جمع شدہ موسیقی ارتعاشوں پر مشتمل ہوگی جیسا کہ بلیک برن کے رقاص کے نظریہ میں جو فی الحقیقت اُوپر کی تحقیق کی صرف ایک مخصوص صورت ہے۔ پس یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ اگر ابتدائی ہٹاؤ اور رفتاریں کافی طور پر چھوٹی ہوں تو ذرہ توازن کے محل کے گرد اہتزاز کریگا، اس لیے ایسے محل کو "قائم" محل کہا جاتا ہے۔

لیکن اگر ا یا ب منفی ہو تو متناظر تفرقی مساوات کے حل میں حقیقی قوت نما، حسب دفعہ ۱۵، شامل ہونگے اور کوئی خلل خواہ وہ کتنا ہی چھوٹا ہو بالعموم مائل بہ اضافہ ہوگا اور تقرب کی حد سے بڑھ جائیگا۔ ایسی صورت میں توازن کے محل کو "غیر قائم" کہا جاتا ہے۔

(۵) سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ ا اور ب دونوں مثبت ہونگے اگر توازن کے محل کے کافی قریب کسی محل میں قہ کی قیمت خود اِس توازن کے محل پر کی قیمت سے بڑی ہو۔ دوسرے لفظوں میں قائم توازن کے محل پر توانائی بالقوہ مطلقاً اقل ہوتی ہے۔ پس موجودہ نقطۂ نظر سے قائمیت کے لیے یہ ضروری اور کافی شرط ہے[1]۔

[1] اُن صورتوں پر یہاں بحث نہیں کی گئی ہے جہاں پھیلاؤ میں سر ا، ھ، ب سب کے سب معدوم ہو جاتے ہیں۔

یہ بغیر تحلیل کے اِس طرح بھی واضح ہے کہ اگر قہ مبداء و سے تمام سمتوں میں بڑھے تو ہم و کے گرد ایک ایسا بند گھیرا کھینچ سکتے ہیں کہ اس کے ہر نقطہ پر قہ ـ قہ کی ایک خاص مثبت قیمت ع ہو ۔ اگر اس علاقہ کے اندر جو اِس طرح محدود ہو کسی نقطہ سے ذرہ کو ایسی کُل توانائی سے جو قہ + ع سے کم ہو متحرک کیا جائے تو اس کا راستہ اِس علاقہ کے اندر مقید رہیگا ۔ کیونکہ اگر وہ احاطہ پر پہنچے تو اس کی توانائی بالقوہ قہ + ع ہو گی اور اس لیے اس کی کُل توانائی قہ + ع سے متجاوز ہو گی جو مفروضہ کے خلاف ہے[1]۔

ایسا کوئی آسان استدلال یہ ثابت کرنے کے لیے موجود نہیں ہے کہ یہ اقل شرط اِس امر کی ایک ضروری شرط ہے کہ ذرہ مبداء کے قرب و جوار میں رہ سکے ۔ لیکن اگر مزاحمت کی بیرونی قوتیں خواہ کتنی ہی خفیف موجود ہوں جو ذرہ کی کسی حرکت سے پیدا ہوئی ہوں[2] تو کُل توانائی مسلسل گھٹیگی جب تک کہ حرکت جاری ہے ۔ اس لیے اگر ذرہ کسی محل سے جہاں توانائی بالقوہ قہ سے کم ہے سکون سے حرکت کی ابتداء کرے تو کُل توانائی اور اس لیے توانائی بالقوہ بالضرور مسلسل گھٹیگی ۔ اس کا یہ مطلب ہے کہ ذرہ محل و سے زیادہ اور زیادہ تر منحرف ہوتا جائیگا اِلا آنکہ وہ توازن کے کسی نئے محل میں آکر ساکن ہو جائے ۔

مثال ۱ ۔ ایک ذرہ قوت کے مختلف مرکزوں و، و، ... کی جانب قوتوں کہ ر، کہ ر، ... سے جو اِن نقطوں سے فاصلوں ر، ر، ... کے متناسب ہیں

---

[1] یہ دلیل جو کسی تحفظی حیلی نظام پر اطلاق پذیر ہے پی ۔ ایل ۔ ڈرشلی P. Lejeune Dirichlet. 1846, کی پیش کردہ ہے ۔

[2] سکونیاتی رگڑ کو نظر انداز کیا گیا ہے ۔ اس کا اثر یہ ہوتا ہے کہ توازن کے محل کم و بیش غیر متعین ہو جاتے ہیں ۔

جذب ہوتا ہے۔

ہم لکھ سکتے ہیں

$$قہ = \frac{1}{2}\left(ک_1 ر_1^2 + ک_2 ر_2^2 + \cdots\right) \quad \ldots\ldots (8)$$

یہ معلوم ہے (سکونیات دفعہ ۱۴۷) کہ ذرہ کا صرف ایک محل ایسا ہے جس کے لیے یہ جملہ قیمت میں اقل ہوتا ہے یعنے ایسے ذرّوں کے نظام کا مرکز کمیت (ث) جن کی کمیتیں $ک_1$، $ک_2$..... کے متناسب اور جو علی الترتیب $و_1$، $و_2$... پر (۸۸)
واقع ہوں، اور یہ کہ تب قہ اقل ہوتا ہے۔

یہ اس طرح بھی واضح ہے کہ دی ہوئی تمام قوتوں کا حاصل ایک قوت ح (ک) × ر ہے جو ث کی جانب ہے جہاں ث سے ذرہ کا فاصلہ ر ہے۔ اس لیے ذرہ خواہ اس کو کسی طرح متحرک کیا جائے ث کے گرد ایک ناقص، مدت

$$2\pi \sqrt{\frac{م}{ح(ک)}}$$

میں مرتسم کریگا۔

مثال ۲ - ایک ذرہ جو جاذبہ کے تحت ہے اور کسی شکل کی ایک چکنی سطح پر رہنے کے لیے مجبور ہے ایک ایسے نقطہ پر توازن میں ہوگا جہاں مماسی مستوی افقی ہے۔ اگر وہ سطح جو اس نقطہ کے عین قریب ہے اس مستوی کے بالکل اوپر واقع ہو تو توازن قائم ہے۔ اگر بالکل نیچے ہے تو توازن غیر قائم ہے۔ اگر سطح مماسی مستوی کو عبور کرے جیسا کہ زین کی شکل کی سطح کی صورت میں ہوتا ہے تو بعض ہٹاؤں کے لیے توازن قائم ہوگا اور باقی دیگر ہٹاؤں کے لیے غیر قائم اور اس لیے بہ حیثیتِ مجموعی غیر قائم۔

اگر مماسی مستوی کے اوپر ارتفاع ی ہو تو ہم

$$قہ = م ج ی \quad \ldots\ldots\ldots (9)$$

رکھ سکتے ہیں۔ اگر مبداء زیر بحث نقطہ پر ہو اور انحناء کے دو صدر مستویوں میں افقی محدد لا، ما ہوں تو

$$\text{۲ ی} = \frac{\text{لا}^{2}}{\text{ثہ}_{1}} + \frac{\text{ما}^{2}}{\text{ثہ}_{2}} + \ldots\ldots\ldots \quad (۱۰)$$

جہاں ثہ_{1}، ثہ_{2} مثبت یا منفی ہیں بموجب اس کے کہ وہ صدر تراشیں جن سے وہ متعلق ہیں اُوپر وار مقعر یا محدب ہیں۔ دیکھو دفعہ ۲۹ (٥)۔

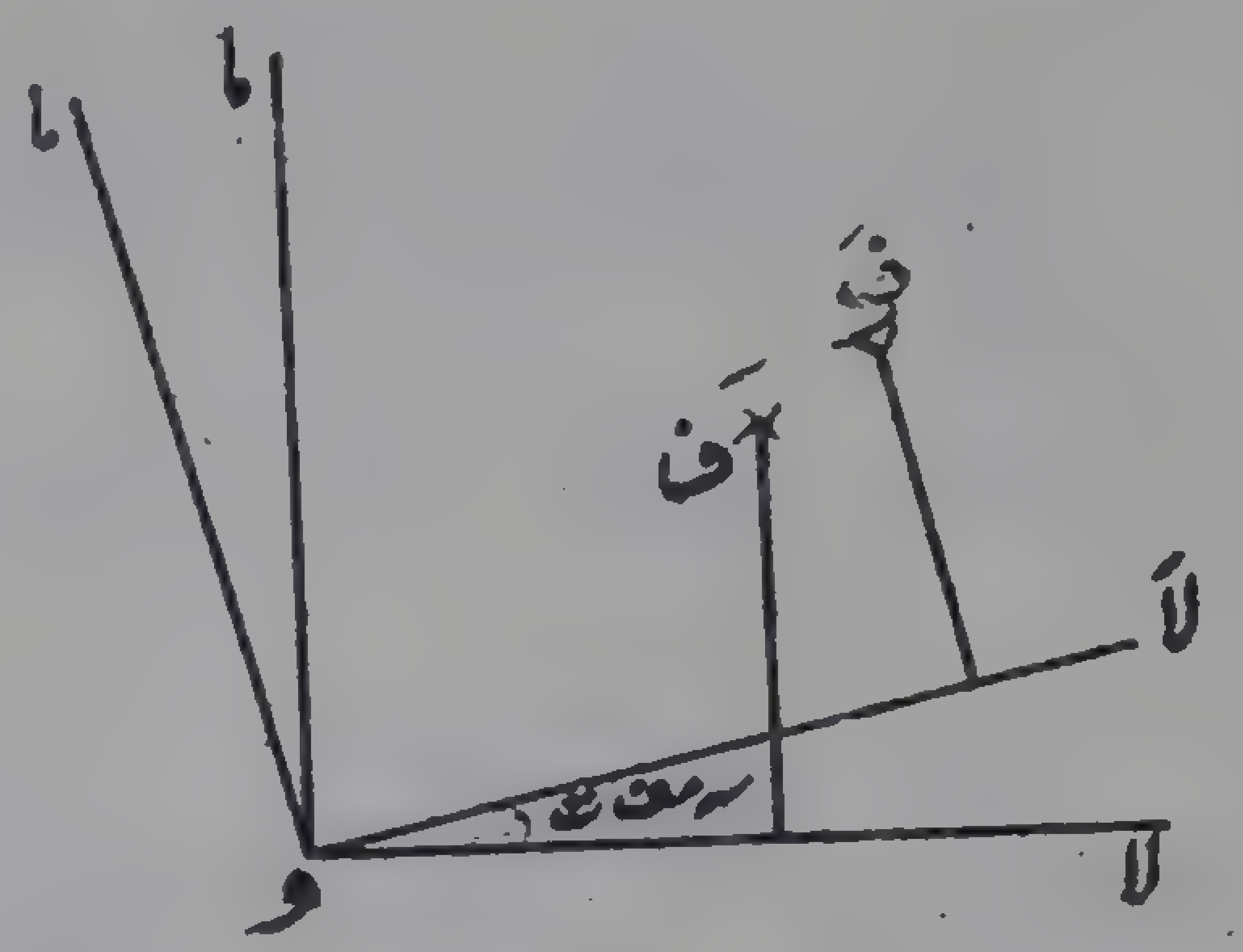
۳۲ - گردش کرنے والے محاور۔

ہم دیکھ چکے ہیں (دفعہ ۲۲) کہ حرکت کی مساواتیں جو ثابت محوروں کے حوالے سے حاصل کی گئی ہوں وہی شکل قائم رکھتی ہیں اگر محوروں کے متعلق یہ فرض کیا جائے کہ وہ کسی مستقل رفتار سے ایک خط مستقیم میں حرکت کر رہے ہیں۔ لیکن یہ صورت باقی نہیں رہتی اگر محور گردش کر رہے ہوں۔

اس کی وضاحت کے لیے فرض کرو کہ ہم اُن قائم محوروں کے حوالے سے حرکت کی مساواتیں بناتے ہیں جو مبداء کے گرد زاویائی رفتار سہ سے گردش کر رہے ہیں۔ فرض کرو کہ لمحہ ت پر محوروں کے محل و لا، و ما ہیں اور لمحہ ت + مف ت پر ان کے محل و لاَ، و ماَ ہیں چنانچہ زاویہ لا و لاَ، سہ مف ت کے مساوی ہے۔ لمحہ ت پر ایک متحرک نقطہ کا محل ف، محوروں و لا اور و ما کے لحاظ سے اس کے محددوں (لا، ما) سے مشخص ہوتا ہے، اور لمحہ ت + مف ت پر اسی نقطہ کا محل فَ، محوروں و لاَ اور و ماَ کے لحاظ سے اس کے محددوں (لا + مف لا، ما + مف ما) سے مشخص ہوتا ہے۔ اس لیے و لا اور و ما کے لحاظ سے فَ کے محدد استحالہ کے معمولی ضابطوں سے

(لا + مف لا) جم سہ مف ت - (ما + مف ما) جب سہ مف ت،

(لاَ + مف لاَ) جب سہ مف ت + (ماَ + مف ماَ) جم سہ مف ت



شکل عنا ۳

حاصل ہوتے ہیں۔ دوسرے رتبہ کی چھوٹی مقداروں کو نظرانداز کر کے اِن محدّدوں کو شکل

لا + مف لا - سہ ما مف ت، ما + مف ما + سہ لا مف ت

میں لکھا جا سکتا ہے، اس لیے ولاَ اور وماَ پر ف فَ کے ظِل بالآخر

مف لا - سہ ما مف ت، مف ما + سہ لا مف ت ...... (۱)

ہیں۔ اس لیے ولاَ، وماَ کے متوازی ف کی رفتار کے اجزائے ترکیبی علی الترتیب

$$ع = \frac{\text{فر لا}}{\text{فر ت}} - \text{سہ ما}،\quad و = \frac{\text{فر ما}}{\text{فر ت}} + \text{سہ لا} \quad .... (۲)$$

ہیں۔

اگر لمحوں ت اور ت + مف ت پر رفتار کو تعبیر کرنے والے سمتی وط، وطَ ہوں تو ولاَ، وماَ پر ططَ کے ظِل معلوم کرنے کے لیے وہی طریقہ اختیار کیا جا سکتا ہے۔ چنانچہ ولاَ، وماَ پر وطَ کے ظِلّوں کو (ع + مف ع، و + مف و) سے تعبیر کرنے سے ولاَ، وماَ پر ططَ کے ظِل

مف ع - سہ و مف ت، مف و + سہ ع مف ت ...... (۳)

حاصل ہونگے۔ جو (۱) کے مشابہ ہیں۔ اس لیے اسراع کے اجزائے ترکیبی

ع = فرع / فرت − سہ و ، ب = فرو / فرت + سہ ع .... (۴)

ہیں۔

(۹۰) اگر زاوئی رفتار سہ مستقل ہو تو (۲) سے ع ، و کی قیمتیں لے کر درج کرنے سے

ع = فر²لا / فرت² − ۲سہ فرما / فرت − سہ² لا ، ب = فر²ما / فرت² + ۲سہ فرلا / فرت − سہ² ما ...(۵)

اس لیے گردش کرنے والے محوروں کے لحاظ سے حرکیاتی مساواتیں

م (فر²لا / فرت² − ۲سہ فرما / فرت − سہ² لا) = ﻻ
م (فر²ما / فرت² + ۲سہ فرلا / فرت − سہ² ما) = ما .... (۶)

ہیں جہاں محوروں کی فوری سمتوں کے متوازی قوت کے اجزائے ترکیبی ﻻ ، ما ہیں۔

اگر ہم اِن مساواتوں کو شکل

م لاً = ﻻ + م سہ² لا + ۲م سہ ماً
م ماً = ما + م سہ² ما − ۲م سہ لاً .... (۷)

میں لکھیں تو ان کی ایک تعبیر خود واضح ہو جاتی ہے۔ اصلی قوت (ﻻ ، ما) کے علاوہ ذرہ بظاہر دوسری قوتوں کے زیرِ عمل ہے۔ اولاً اجزائے ترکیبی م سہ² لا ، م سہ² ما ہیں جو ایک ظاہری "مرکز گریز قوت" م سہ² ر کے اجزائے ترکیبی ہیں جہاں مرکز سے فاصلہ ر ہے۔ اس کے علاوہ ایک ظاہری قوت ہے جس کے اجزائے ترکیبی

۲م سہ ماً = ۲م سہ س جب سا ، − ۲م سہ لاً = ۲م سہ س جم سا

ہیں جہاں محور لا کے ساتھ ظاہری راستہ (وہ راستہ جو گردش کرنے والے محوروں کے لحاظ سے ہے) کا میلان سا ہے ۔ اس قوت کی مقدار ۲ م سہ ن ہے اور اس کی سمت ظاہری رفتار ن کی سمت سے حاصل ہوتی ہے جب کہ ایک قائمہ زاویہ میں سے اُس جہت کے خلاف گردش دی جائے جو زاوی رفتار سہ کی ہے[1]

اگر ہم مساواتوں (۷) کو علی الترتیب لاَ، ماَ سے ضرب دیں اور جمع کریں تو

م (لاَ لاً + ماَ ماً) = لا لاَ + ما ماَ + م سہ۲ (لا لاَ + ما ماَ) .... (۸)

اس لیے ت کے لحاظ سے تکمل کرنے پر

۱/۲ م (لاَ۲ + ماَ۲) = ∫(لا لاَ + ما ماَ) فرت

+ ۱/۲ م سہ۲ (لا۲ + ما۲) + ج ...... (۹)

(91) اگر قوت (لا، ما) ایسے میدان کے باعث ہو جو تبدیلی کے بغیر محدّدوں کے محوروں کے ساتھ گردش کرتا ہے تو ہم اُوپر کے تکملہ کی بجائے

∫(لا فرلا + ما فرما)

رکھ سکتے ہیں ۔ اگر قہ اُس توانائی بالقوہ کو تعبیر کرے جو اِس میدان کے باعث ہے تو

۱/۲ م (لاَ۲ + ماَ۲) + قہ - ۱/۲ م سہ۲ (لا۲ + ما۲) = مستقل .... (۱۰)

یہ وہ شکل ہے جو توانائی کی مساوات اب اختیار کرتی ہے ۔

جملہ

قہ - ۱/۲ م سہ۲ (لا۲ + ما۲) .... (۱۱)

---

[1] جی ۔ کوریلس (G.Coriolis). نے اس کو "force centrifuge composee" کہا ہے تاکہ اس میں اور "force centrifuge ordinaire" یعنی م سہ۲ ر میں امتیاز پیدا ہو جائے ۔

جس کے آخری حصہ کو مرکز گریز قوت کے لحاظ سے توانائی بالقوہ کہہ سکتے ہیں وہی حصہ لیتا ہے جو مقیم میدان میں اصلی توانائی بالقوہ کا ہے۔

مثال ۱۔ اگر ایک نقطہ ساکن ہو تو اس کی حرکت گردش کرنے والے محوروں کے لحاظ سے مساواتوں

$$\dot{\text{لا}} = \text{سہ}\,\text{ما}\,،\quad \dot{\text{ما}} = -\text{سہ}\,\text{لا} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۱۲)$$

سے حاصل ہوگی۔ اس لیے

$$\ddot{\text{لا}} = \text{سہ}\,\dot{\text{ما}} = -\text{سہ}^{2}\,\text{لا} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۱۳)$$

جس کا حل

$$\text{لا} = \text{ج}\,\text{جم}\,(\text{سہ}\,\text{ت} + \text{صہ}) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۱۴)$$

ہے۔ اب مساواتوں (۱۲) کی پہلی مساوات سے

$$\text{ما} = \frac{1}{\text{سہ}}\,\dot{\text{لا}} = -\text{ج}\,\text{جب}\,(\text{سہ}\,\text{ت} + \text{صہ}) \quad \ldots\ldots (۱۵)$$

حاصل ہوتا ہے، اس لیے

$$\text{لا}^{2} + \text{ما}^{2} = \text{ج}^{2}\,،\quad \frac{\text{ما}}{\text{لا}} = -\text{مس}\,(\text{سہ}\,\text{ت} + \text{صہ}) \quad \ldots\ldots (۱۶)$$

پس اضافی راستہ ایک دائرہ ہے جو مستقل رفتار سے اس جہت میں جو سہ کے مخالف ہے مرتسم ہوتا ہے، یہ دوسری طرح بھی واضح ہے۔

مثال ۲۔ اگر بلیک برن کا رقاص زاویٔ رفتار سہ سے ع میں سے (شکل ۲۹) گزرنے والے انتصابی کے گرد گردش کرے تو ان افقی محوروں کے لحاظ سے جو ا ب میں سے گزرنے والے انتصابی مستوی میں اور اس کے عمود وار ہیں حرکت کی مساواتیں حسب ذیل شکلوں کی ہونگی:

$$\left.\begin{aligned} \ddot{\text{لا}} - ۲\,\text{سہ}\,\dot{\text{ما}} - \text{سہ}^{2}\,\text{لا} &= -\text{ف}^{2}\,\text{لا}\,، \\ \ddot{\text{ما}} + ۲\,\text{سہ}\,\dot{\text{لا}} - \text{سہ}^{2}\,\text{ما} &= -\text{ق}^{2}\,\text{ما} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (۱۷)$$

جہاں

$$\text{ف}^{2} = \frac{\text{ج}}{\text{ج}\,\text{ف}}\,،\quad \text{ق}^{2} = \frac{\text{ج}}{\text{ع}\,\text{ف}} \quad \ldots\ldots\ldots (۱۸)$$

یہ مساواتیں

لا = ا جم (ن ت + سہ)، ما = ب جب (ن ت + صہ) ..... (۱۹)

سے پوری ہوتی ہیں بشرطیکہ

(ن^۲ + سہ^۲ − ف^۲) ا + ۲ ن سہ ب = ۰،
۲ ن سہ ا + (ن^۲ + سہ^۲ − ق^۲) ب = ۰ ..... (۲۰)

(۹۲) نسبت ا/ب کو ساقط کرنے سے حاصل ہوتا ہے

(ن^۲ + سہ^۲ − ف^۲) (ن^۲ + سہ^۲ − ق^۲) − ۴ ن^۲ سہ^۲ = ۰ ..... (۲۱)

یا ن^۴ − (ف^۲ + ق^۲ + ۲ سہ^۲) ن^۲ + (ف^۲ − سہ^۲) (ق^۲ − سہ^۲) = ۰ (۲۲)

جو ن^۲ میں ایک دو درجی مساوات ہے۔ اس کی اصلوں کے فرق کا مربع

(ف^۲ + ق^۲ + ۲ سہ^۲)^۲ − ۴ (ف^۲ − سہ^۲) (ق^۲ − سہ^۲)

= (ف^۲ − ق^۲)^۲ + ۸ سہ^۲ (ف^۲ + ق^۲) ..... (۲۳)

ہے اور چونکہ یہ مثبت ہے اس لیے دونوں اصلیں حقیقی ہیں۔ نیز اصلوں کا حاصل ضرب مثبت ہے اِلّا آنکہ سہ^۲، ف^۲ اور ق^۲ کے درمیان واقع ہو۔ چونکہ اصلوں کا مجموعہ مثبت ہے اس لیے ن^۲ کی دونوں قیمتیں بشرطیکہ سہ^۲، ف^۲ اور ق^۲ کے درمیان واقع نہ ہو مثبت ہونگی اور حسبِ ذیل نمونوں کے دو غیر تابع حل حاصل ہونگے:

لا = ا₁ جم (ن₁ ت + صہ₁)، ما = ب₁ جب (ن₁ ت + صہ₁) ... (۲۴)

اور لا = ا₂ جم (ن₂ ت + صہ₂)، ما = ب₂ جب (ن₂ ت + صہ₂) .. (۲۵)

جہاں نسبتیں ا₁/ب₁ اور ا₂/ب₂، مساواتوں (۲۰) میں سے کسی ایک میں ن^۲ کی ٹھیک قیمت درج کرنے سے حاصل ہوتی ہیں۔ چونکہ مساواتیں خطی ہیں، اِن حلوں کو جمع کیا جا سکتا ہے اور اِس طرح ایک ایسا حل حاصل ہوتا ہے جو مکمل ہے کیونکہ اس میں چار اختیاری مستقل ا₁، ا₂، صہ₁، صہ₂ شامل ہیں۔

مستثنیٰ صورت میں (جبکہ سہ^۲، ف^۲ اور ق^۲ کے درمیان واقع ہو) ن^۲ کی ایک قیمت (فرض کرو ن₁^۲) پھر بھی مثبت ہے اور حل (۲۴) پھر بھی درست ہے۔

باقی حل شکل

$$لا = ج\, و^{لت} + جَ\, وَ^{-لت}،\quad ما = د\, و^{لت} + دَ\, وَ^{-لت} \quad .... (۲۶)$$

کا ہوگا۔عمل حساب طالبِ علم پر چھوڑ دیا جاتا ہے۔

پس ہم اِس نتیجہ پر پہنچتے ہیں کہ رقاص کا انتصابی محل قائم ہے اگر گردش کا دَور ($\frac{۲\pi}{س}$)، رقاص کے آزاد دَوروں ($\frac{۲\pi}{ف}$، $\frac{۲\pi}{ق}$) کے درمیان نہ ہو ورنہ کوئی گردش نہیں ہوگی۔ البتہ اس نتیجہ میں تحلیل کنندہ قوتوں کے عمل کی وجہ سے ترمیم کرنے کی ضرورت پڑیگی (دیکھو دفعہ ۹۶)۔

مثالیں (۶)

(مرمی)

۱ ۔ "ابعاد" کے طریقہ سے ثابت کرو کہ ایک مرمی کا ٹپہ جس کا ابتدائی ارتفاع دیا گیا ہو $\frac{و^{۲}}{ج}$ کے متناسب ہے جہاں و، رمیدگی کی رفتار ہے۔

۲ ۔ ہوا کی مزاحمت کو نظر انداز کر کے ایک گولے کا اعظم ٹپہ ۲۰۰۰ گز ہے، ٹپہ کیا ہوگا اگر ابتدائی ارتفاع °۳۰ ہو۔

نیز وہ ارتفاعیں کیا ہیں کہ جن سے ایک شئے پر جو افقی فاصلہ ۱۵۰۰ گز پر ہے زد پڑے۔ [۱۷۳۲ گز؛ '۱۸ °۲۴، '۴۲ °۶۵]

۳ ۔ ایک ذرّہ کو ارتفاع طہ پر پھینکا گیا ہے جس کو میلان عہ کے ایک مستوی سے جو نقطہ رمیدگی میں سے گزرتا ہے پیمائش کیا گیا ہے۔ اگر یہ ذرّہ مستوی پر علی القوائم ضرب لگائے تو ثابت کرو کہ

$$مس\ طہ = \frac{۱}{۲}\ مم\ عہ$$

۴ ۔ ایک نقطہ و سے کچھ ذرّے ایک انتصابی مستوی میں رفتار $\sqrt{۲جک}$ سے پھینکے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ ان کے راستوں کے راسوں کا طریق ناقص (۱۲۳

$$\text{لاؔ} + \text{۴ہ ما} (\text{ما} - \text{ک}) = ۰$$

ہے۔

۵۔ اگر ایک مرمی کے راستہ کے کسی نقطہ ف پر اس کی حرکت کی سمت کو رفتار کی تبدیلی کے بغیر قدرے بدل دیا جائے تو نیا راستہ پُرانے راستے کو ف میں سے گزرنے والے ماسکی وتر کے دوسرے سرے پر قطع کریگا۔

۶۔ ایک نقطے سے کچھ ذرّے مختلف سمتوں میں مساوی رفتاروں و سے ایک ساتھ پھینکے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ ت ثانیوں کے بعد وہ ایک کُرہ کی سطح پر جس کا نصف قطر و ت ہے واقع ہونگے اور یہ کہ اِس کرہ کے مرکز کا اسراع نیچے وار ج ہے۔

۷۔ اگر ایک مرمی کا افقی ٹپہ و ر ہو اور وہ خط جو و کو ذرّہ کے کسی محل ف سے ملاتا ہے ر میں سے گزرنے والے انتصابی سے ق پر ملے تو ثابت کرو کہ نقطہ ق ایک ایسی مستقل رفتار سے نیچے اُترتا ہے جو عدداً ذرہ کی رفتار کے ابتدائی انتصابی جزو ترکیبی کے مساوی ہے۔

۸۔ ثابت کرو کہ ایک مرمی کے مکافی راستہ میں کسی لمحہ پر حرکت کی سمت شرح $\frac{\text{ع}}{\text{۲ما}}$ سے بدل رہی ہے جہاں ع افقی رفتار ہے اور ما مرتب کے نیچے گہرائی کو تعبیر کرتا ہے۔

۹۔ ایک ذرّہ کو ایک نقطہ و سے کسی سمت میں رفتار و سے پھینکا گیا ہے۔ اس کے افقی ٹپہ اور بڑے سے بڑے ارتفاع کو معلوم کرنے کے لیے حسب ذیل عمل ثابت کرو:

و ا کو اوپر وار $\frac{\text{و}^2}{\text{۲ج}}$ کے مساوی کھینچو اور و ا کو قطر مان کر ایک کرہ بناؤ۔ و میں سے ایک وتر و ف رمیدگی کی سمت میں کھینچو اور ف ن کو و میں سے گزرنے والے افقی مستوی پر عمود کھینچو۔ تب و ن ٹپہ ہے اور بڑے سے بڑا ارتفاع $\frac{۱}{۴}$ ف ن ہے۔

۱۰۔ اوپر کا عمل و میں سے گزرنے والے ایک مائل مستوی پر ٹپہ معلوم کرنے میں اختیار کرو۔

۱۱ - دو ذرّوں کو ایک ہی رفتار سے مختلف سمتوں میں پھینکا گیا ہے لیکن اس طرح کہ اِن کا افقی ٹپہ وہی ہے - ثابت کرو کہ اِن کے بڑے سے بڑے ارتفاعوں کا ہندسی اوسط ٹپہ کا ایک ربع ہے اور اِن مقداروں کا حسابی اوسط اُس اعظم افقی ٹپہ کا ایک ربع ہے جو رسیدگی کی دی ہوئی رفتار کے تناظر ہے -

۱۲ - ایک مرمی کے راستہ کے حسب ذیل خواص حرکیاتی استدلال سے حاصل کرو :

(۱) راستہ کے کسی نقطہ ف میں سے گزرنے والا انتصابی اُن تمام وتروں کی تنصیف کرتا ہے جو ف پر کے مماس کے متوازی ہیں -

(۲) فرض کرو کہ کسی دو نقطوں ق، قَ پر کے مماس ت پر متقاطع ہوتے ہیں - اگر ت میں سے گزرنے والا انتصابی منحنی سے ف پر اور وتر ق قَ سے ط پر ملے تو ق ط = ط قَ اور ت ف = ف ط -

(۳) زیرِ عماد مستقل اور $\frac{ع^۲}{ج}$ کے مساوی ہوتا ہے جہاں ع افقی رفتار ہے -

(۴) رفتار عماد کے تناسب ہوتی ہے -

(۹۴) ۱۳ - اگر ایک مرمی کے مکانی راستہ کا ایک ماسکی وتر ا ب ہو تو ا سے ب تک گزرنے میں جو وقت لگتا ہے وہ اُس وقت کے مساوی ہوتا ہے جو ایک ذرہ سکون سے انتصاباً نیچے وار ا ب کے مساوی فاصلہ میں سے گرنے میں لیتا ہے -

۱۴ - اگر ایک مرمی کے راستہ پر نقطہ ت سے دو مماس ت ف، ت ق کھینچے جائیں تو ثابت کرو کہ ف اور ق پر کی رفتاروں میں نسبت $\frac{ت ف}{ت ق}$ ہے،

۱۵ - اگر ایک مرمی کے راستہ کے کسی دو نقطوں ف اور ق پر کی رفتاریں سمتوں و ا، و ب سے تعبیر ہوں اور ا ب کا وسطی نقطہ ج ہو تو ثابت کرو کہ ف اور ق کے درمیان اوسط رفتار و ج سے تعبیر ہوتی ہے -

ثابت کرو کہ اگر ف ق ایک ماسکی وتر ہو تو ف اور ق کے درمیان توانائی بالحرکت کا اوسط مربع، ف اور ق پر کی توانائی بالحرکتوں کے مجموعہ کا ایک ثلث ہے -

۱۶۔ دو ذرّے ایک ہی نقطہ سے ایک ہی لمحہ پر مساوی رفتاروں و سے ارتفاعوں عہ اور عہَ پر پھینکے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ جس نقطہ پر ان کے راستے متقاطع ہوتے ہیں اُس میں سے ان کے گزرنے کے اوقات کے درمیان فرق

$$\frac{\text{۲ و}}{\text{ج}} \times \frac{\text{جب}\ \frac{1}{2}(\text{عہ} - \text{عہَ})}{\text{جم}\ \frac{1}{2}(\text{عہ} + \text{عہَ})}$$

ہے۔

۱۷۔ ایک ذرّہ کو اِس طرح پھینکا گیا ہے کہ اس کا ٹپہ ایک افقی مستوی پر جو نقطہ رمیدگی میں سے گزرتا ہے ر ہے اور بلند سے بلند ارتفاع جو ذرّہ حاصل کرتا ہے ف ہے۔ ثابت کرو کہ رمیدگی کی اُسی رفتار کے ساتھ اعظم ٹپہ (افقی)

$$\text{۲ ف} + \frac{1}{8}\,\frac{\text{ر}^2}{\text{ف}}$$

ہے۔

۱۸۔ ایک قلعہ ایک چٹان کے کنارہ پر جس کا ارتفاع ف ہے واقع ہے۔ ثابت کرو کہ وہ بڑے سے بڑا افقی فاصلہ جہاں تک قلعہ کی ایک توپ کی زد ایک جہاز پر پڑ سکتی ہے $\text{۲}\sqrt{\text{ک}(\text{ک} + \text{ف})}$ ہے اور وہ بڑے سے بڑا افقی فاصلہ جہاں تک جہاز کی ایک توپ کی زد قلعہ پر پڑ سکتی ہے $\text{۲}\sqrt{\text{ک}(\text{ک} - \text{ف})}$ ہے جبکہ ہر صورت میں نالی سے گولے کے نکلنے کی رفتار $\sqrt{\text{۲ ج ک}}$ ہو۔

۱۹۔ ایک ذرّہ کو رفتار $\sqrt{\text{۲ ج ک}}$ کے ساتھ ایک نقطہ سے میلان ہ کے ایک مستوی کے اُوپر ارتفاع ف پر پھینکا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ مستوی کے اُوپر اور نیچے وار اعظم ٹپوں میں بقدر

$$\text{۲ قطعہ}\sqrt{\text{ک}(\text{ف} + \text{ک قط}^2\text{عہ})} - \text{۲ ک قط}^2\text{عہ}$$

کا اضافہ ہوتا ہے۔

نتیجہ کی انتہائی شکلیں معلوم کرو جب کہ نسبت $\frac{\text{ف}}{\text{ک}}$ چھوٹی ہو اور بتاؤ کہ اِس کی پیش بینی کس طرح کی جا سکتی تھی۔

۲۰۔ ایک ذرہ کو میلان عہ کے ایک مستوی پر ایک دیے ہوئے نقطہ سے ایک دی ہوئی رفتار سے پھینکا جاتا ہے۔ ثابت کرو کہ وہ رقبہ جو ٹپہ کے اندر ہے ایک ناقص سے محدود ہے جس کا خروج المرکز جب عہ اور ہ ماسکہ ہے۔

۲۱۔ اگر ایک مرمی کی پرواز میں کسی منزل پر اس کی رفتار ایک پتلے تختہ میں سے چھید کر نکل جانے کی وجہ سے گھٹ جائے تو ایک نقشہ سے بتاؤ کہ اس کا راستہ کس طرح بدلتا ہے۔
راستہ کی شکل پر ہوا کی مسلسل مزاحمت کے اثر کو عام طور پر سمجھاؤ۔

مثالیں (۷)

(ناقصی موسیقی حرکت، وغیرہ)

(۹۵)

۱۔ اگر ایک متحرک نقطہ کے محدّد

$$\text{لا} = \text{ل}\ \text{جم}\,(\text{ن ت} + \text{عہ})\text{،}\quad \text{ما} = \text{ب}\ \text{جم}\,(\text{ن ت} + \text{بہ})$$

ہوں تو راستہ کی مساوات

$$\frac{\text{لا}^2}{\text{ل}^2} - \frac{2\,\text{لا}\,\text{ما}}{\text{ل}\,\text{ب}}\,\text{جم}\,(\text{عہ} - \text{بہ}) + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = \text{جب}^2\,(\text{عہ} - \text{بہ})$$

ہے۔

۲۔ ایک ذرہ کو ایک دیے ہوئے نقطہ سے ایک دی ہوئی سمت میں ایک دی ہوئی رفتار کے ساتھ ایک مرکزی تجاذبی قوت کے تحت جو فاصلہ کے متناسب ہے پھینکا گیا ہے۔ مدار کے صدر محور معلوم کرنے کے لیے ہندسی عمل بیان کرو۔

۳۔ ثابت کرو کہ ناقصی موسیقی حرکت میں اوسط توانائی بالحرکت اور اوسط توانائی بالقوہ مساوی ہوتی ہیں۔

۴۔ ایک ذرہ مرکز ج کی جانب اسراع مہ × ج ف کے تحت ایک ناقص مرتسم کر رہا ہے۔

ثابت کرو کہ وہ شرح جس سے حرکت کی سمت بدل رہی ہے

$$\frac{\text{ا ب} \times \overline{\text{مہ}}^{\,۲}}{\text{ج د}^{۲}}$$

ہے جہاں ا، ب نیم محور ہیں اور ج د وہ نیم قطر ہے جو ج ف کا مزدوج ہے۔

۵ ۔ ایک ڈنڈے کے سِرے (جو مستقل زاویٔ رفتار سے گردش کرتا ہے) دو علی القوائم متقاطع خطوطِ مستقیم پر حرکت کرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ ڈنڈے پر کے کسی دوسرے نقطہ کی حرکت ناقصی موسیقی حرکت ہے۔

٦ ۔ ایک پتر مستقل زاویٔ رفتار سے خود اپنے مستوی میں گردش کرتا ہے اور اس پر کے دو دیئے ہوئے نقطے دو ثابت خطوطِ مستقیم پر حرکت کرنے کے لیے مجبور ہیں ثابت کرو کہ پترے پر کے کسی دوسرے نقطہ کی حرکت ناقصی (یا خطی) موسیقی حرکت ہے۔

۷ ۔ ثابت کرو کہ ناقصی موسیقی حرکت میں توانائی بالحرکت کا زمانی اوسط توانائی بالحرکت کی بڑی سے بڑی اور چھوٹی سی چھوٹی قیمتوں کے اوسط حسابی کے مساوی ہوتا ہے۔

۸ ۔ دو نقطوں کی حرکتیں ایک ہی مرکز کے گرد ایک ہی دَور کی ناقصی موسیقی حرکتیں (جن کا ایک ہی مستوی میں ہونا ضروری نہیں ہے) ہیں۔ ثابت کرو کہ ان کی اضافی حرکت ناقصی موسیقی ہے۔

۹ ۔ ایک ذرّہ ایک دفاعی قوت کے تحت جو ایک ثابت نقطہ سے فاصلہ کے تناسب ہے حرکت کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ مدار ایک قطع زائد کی ایک شاخ ہے اور یہ کہ کسی نقطہ پر کی رفتار مزدوج نیم قطر کے تناسب ہے۔

۱۰ ۔ نیز ثابت کرو کہ اگر قطع زائد قائم الزاویہ ہو تو زاویہ ط جو سمتی نیم قطر اور قاطع محور کے درمیان ہے وقت ت کے ساتھ جس کی پیمائش راس سے کی گئی ہے حسبِ ذیل رشتہ رکھتا ہے:

$$\text{جب}\,۲\,\text{ط} = \text{مسز}\,۲\,\text{ن ت}$$

۱۱ ۔ ایک ذرّہ کششی یا دفاعی قوت کے متعدد مرکزوں کے زیرِ عمل ہے

اور ان میں سے ہر قوت فاصلہ کے متناسب ہے۔ مدار کی نوعیت اور دَور (جبکہ مدار بند ہو) معلوم کرو۔

کس صورت میں مدار ایک قطع مکافی ہے؟

۱۲۔ ایک ذرہ مرکز کی جانب ایک اسراع کے تحت ایک ناقص مرتسم کر رہا ہے۔ اس پر مرکز کی سمت میں یا اس کے مخالف کسی لمحہ پر ایک ضرب پڑتی ہے۔ ثابت کرو کہ وہ پرانے مدار کے مساوی رقبہ کا ایک نیا ناقص مرتسم کرنے لگیگا۔

۱۳۔ اگر کروی رقاص میں انتصابی کے ساتھ ڈوری کے انتہائی میلان عہ، بہ چھوٹے ہوں تو ثابت کرو کہ کل توانائی

$$\frac{1}{2}\,\text{م ج ل}\,(\text{عہ}^2 + \text{بہ}^2)$$

ہے جہاں ڈوری کا طول ل اور لنگر کی کمیت م ہے۔

۱۴۔ اگر بلیک برن کے رقاص میں ایک دَور دوسرے کا دُگنا ہو تو ثابت کرو کہ راستہ کی ایک ممکن شکل ایک قطع مکافی کی ایسی قوس ہے جو پیچھے وار اور آگے وار مرتسم ہوتی ہے۔

نیز راستہ کی اس شکل کی مساوات معلوم کرو جس کے تشاکل کے دو محور ہیں۔

$$\left[\frac{\text{ی}^2}{\text{ب}^2} = \frac{4\,\text{لا}^2}{\text{ا}^2}\left(1 - \frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2}\right)\right]$$

۱۵۔ دفعہ ۳۲ کی اضافی حرکت کی مساواتوں کو یہ ثابت کرنے کے لیے استعمال کرو کہ اگر ایک ذرہ ایک مرکزی اسراع سہ^2 ر کے تحت ہو تو زاویئی رفتار سہ سے گردش کرنے والے محوروں کے لحاظ سے اس کا راستہ ایک دائرہ ہوگا جو متقل زاویئی رفتار ۲سہ سے مرتسم ہوگا۔

مثالیں (۸)

۱۔ ایک ذرہ ایک مستوی میں ایک تجاذبی قوت کے تحت حرکت کرتا ہے جو ہمیشہ ایک ثابت خطِ مستقیم پر عمود اور اِس خط سے فاصلہ کے متناسب ہے۔

ثابت کرو کہ اس کا راستہ جیبوں کا ایک منحنی ہے۔

۲۔ ایک ذرہ ایک قوت کے تحت ہے جس کی سمت مستقل ہے۔ ثابت کرو کہ اگر میدان بقائی ہو تو یہ قوت کسی مستوی پر جو اس سمت کے عمود وار ہو یکساں ہونی چاہیے۔

اگر محور ما قوت کی سمت کے متوازی ہو تو ثابت کرو کہ راستہ کی تفرقی مساوات کی شکل

$$\text{ج}^{2}\,\frac{\text{فر}^{2}\,\text{ما}}{\text{فر}\,\text{لا}^{2}} = \text{فہ}\,(\text{ما})$$

ہے جہاں فہ (ما) اسراع ہے۔

۳۔ اگر فہ (ب) = ۰ تو ثابت کرو کہ خطی راستہ ما = ب قائم یا غیر قائم ہے بموجب اس کے کہ فہَ (ب) منفی ہو یا مثبت۔ اِس جانچ کو توانائی کی رقوم میں بیان کرو۔

۴۔ اگر مثال ۲ میں فہ (ما) = $\frac{\text{مہ}}{\text{ما}^{3}}$ تو ثابت کرو کہ راستہ ایک مخروطی ہے۔

۵۔ اُس قوت کا قانون معلوم کرو جو کہ منقارب کے متوازی ہو (97)
جس کے تحت ایک قائم زائد مرتسم ہو سکے۔

۶۔ نصف قطر ا کے ایک دائرہ کے محیط کے گرد قوت کے ن (۲۷) مرکزوں کو جو معکوس مربع کے قانون کی بموجب جذب کرتے ہیں تشاکلاً ترتیب دیا گیا ہے اور ہر ایک کے لیے اکائی فاصلہ پر قوت مہ ہے۔ ثابت کرو کہ ایک ذرہ کی توانائی بالقوہ جو دائرہ کے مستوی میں مرکز سے چھوٹے فاصلہ ر پر ہے تقریبی طور پر

$$\text{قہ} = \text{قہ}_{\circ} - \frac{\text{ن}\,\text{مہ}}{4\,\text{ا}^{3}}\,\text{ر}^{2}$$

سے حاصل ہوتی ہے۔

اگر ذرہ دائرہ کے محور پر مرکز سے چھوٹے فاصلہ ی پر ہو تو توانائی بالقوہ

$$\text{قہ} = \text{قہ}_{\circ} + \frac{\text{ن مہ}}{\text{۲ و ۳}}\,\text{ی}^{۲}$$

ہو گی۔

۷۔ اگر قوت کے ایک مستقل مستوی میدان میں کسی نقطہ پر قوت کے اجزائے ترکیبی لا ، ما محددوں لا، ما کے دیے ہوئے تفاعل ہوں تو وہ کام جو ایک ایسے ذرہ پر جو ایک قائم عنصر مف لا مف ما کا گھیرا اثبت جہت میں مرتسم کرتا ہے انجام پاتا ہے حسب ذیل ہے :

$$\left(\frac{\text{جف ما}}{\text{جف لا}} - \frac{\text{جف لا}}{\text{جف ما}} \right) \text{مف لا مف ما}$$

۸۔ ایک ذرہ ایک قوت کے تحت ہے جو ایک خطِ مستقیم اب پر عمود ہے اور اب سے فاصلہ کے مربع کے بالعکس متناسب ہے۔ ثابت کرو کہ اگر اُس کو ایک ایسی رفتار سے پھینکا جائے جو لاتناہی سے سکون سے گرنے کی وجہ سے پیدا شدہ رفتار کے مساوی ہو تو اس کا راستہ ایک خطِ تدویر ہو گا۔

۹۔ ایک ذرہ تجاذبی قوت کے متعدد مرکزوں کے زیر اثر حرکت کرتا ہے اور ہر صورت میں قوت فاصلہ کے متناسب ہے۔ ثابت کرو کہ اس کی حرکت ناقصی موسیقی ہو گی۔

۱۰۔ محور لا، ما مستقل زاویٔ رفتار سہ سے گردش کر رہے ہیں اور ایک ذرہ کی رفتاریں ان محوروں کے متوازی علی الترتیب

$$\frac{\text{و}^{۲} - \text{ب}^{۲}}{\text{و}^{۲} + \text{ب}^{۲}}\ \text{سہ ما} \quad \text{اور} \quad \frac{\text{و}^{۲} - \text{ب}^{۲}}{\text{و}^{۲} + \text{ب}^{۲}}\ \text{سہ لا}$$

ہیں۔ ثابت کرو کہ اِن محوروں کے لحاظ سے ذرہ کی حرکت ناقصی موسیقی ہے۔ دَور معلوم کرو۔

۱۱۔ ثابت کرو کہ قوت کے ایک میدان کی صورت میں جو محوروں کے ساتھ یکساں طور پر گردش کرتا ہے مساواتوں (۶) دفعہ ۳۳ کا تکملہ

$$\frac{۱}{۲}(\dot{\text{لا}}^{۲} + \dot{\text{ما}}^{۲}) - \frac{۱}{۲}\text{سہ}^{۲}(\text{لا}^{۲} + \text{ما}^{۲}) + \text{قہ} = \text{مستقل}$$

ہے جہاں میدان کی وجہ سے توانائی بالقوہ (فی اکائی کمیّت) قہ ہے۔

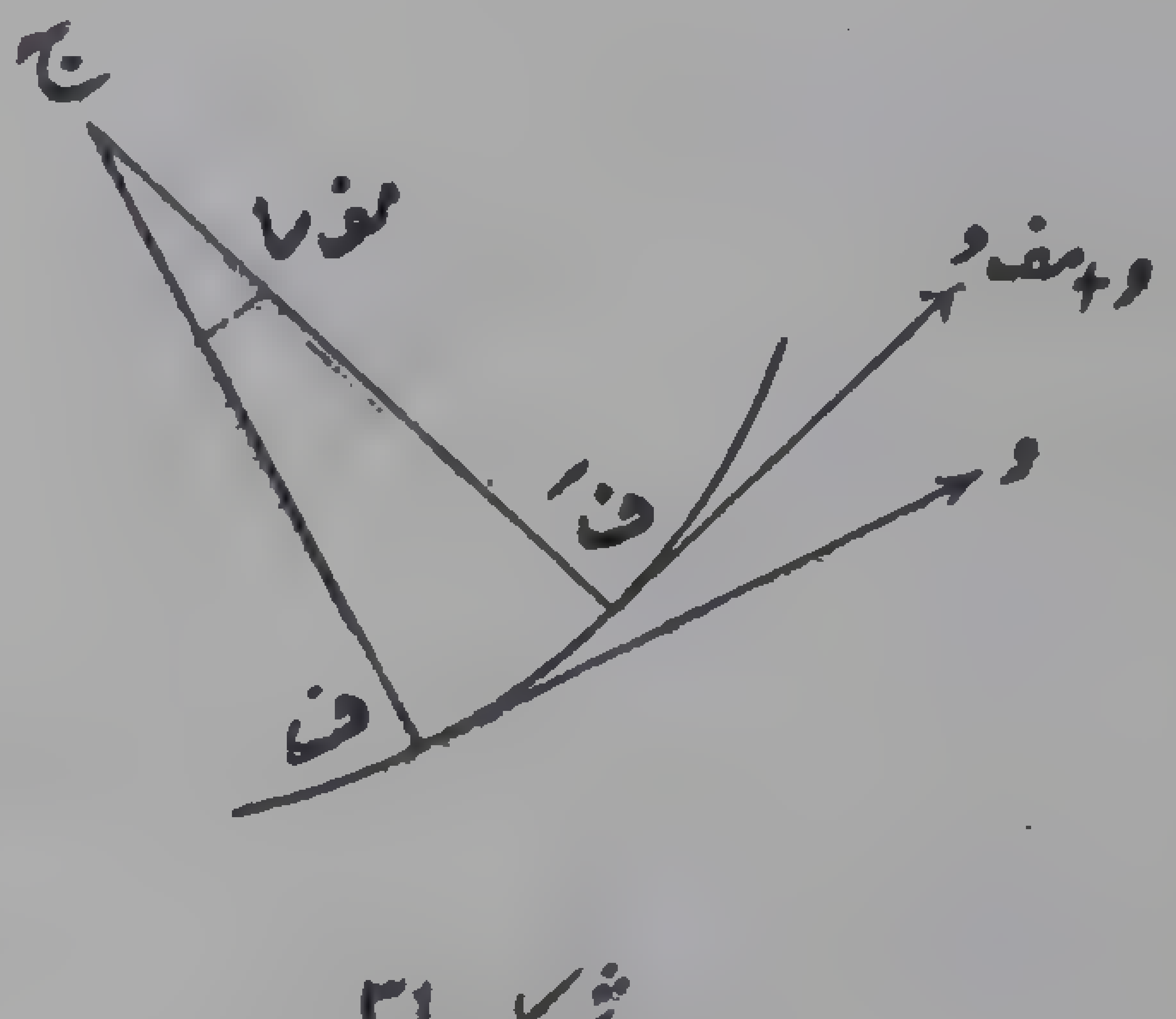
پانچواں باب

مماسی اور عمادی اسراعِ مقید حرکت

۴۴۔ مماسی اور عمادی اسراع ۔

کسی متحرک ذرّہ کے اسراع کو مماس اور عماد کی سمتوں میں تحلیل کرنا اکثر موجب سہولت ہوتا ہے کیونکہ وہ راستے کے لازمی اجزاء ہیں اور محدّدوں کے کسی اختیاری نظام پر اِن کا انحصار نہیں ہوتا۔ بالخصوص اُس صورت میں جبکہ راستہ مجوزہ ہو جیسا کہ اس ذرّہ کی صورت میں ہوتا ہے جو ایک دیے ہوئے منحنی پر حرکت کرنے کے لیے مجبور ہو۔

فرض کرو کہ لمحوں ت، ت + مف ت پر نقطہ کے محل علی الترتیب ف، فَ ہیں اور فرض کرو کہ ف، فَ پر کے عماد نقطہ ج پر ملتے ہیں اور ایک دوسرے سے زاویہ مف سا بناتے ہیں۔ فرض کرو کہ ف اور فَ پر کی رفتاریں و اور و + مف و سے تعبیر کی گئی ہیں۔ اگر منحنی کی قوس س ہو جس کو حسبِ معمول



شکل ۳۱

منحنی پر کے کسی ثابت نقطہ سے پیمائش کیا گیا ہے تو دفعہ ۲۰ (۲) کی رو سے

$$و = \frac{فرس}{فرت} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (۱)$$

وقفہ مف ت میں وہ رفتار جو ف پر کے مماس کے متوازی ہے و سے (و + مف و) جم مف سا تک بدلتی ہے اور اس لیے اضافہ (چھوٹی مقداروں کے پہلے رتبہ تک)

$$(و + مف و) \, جم \, مف سا - و \quad یا \quad مف و$$

ہے کیونکہ جم مف سا اور اکائی میں صرف دوسرے رتبہ کی چھوٹی مقدار کا فرق ہے پس ف پر کے مماس کے متوازی اوسط اسراع $\frac{مف و}{مف ت}$ یا انتہا میں

$$\frac{فرو}{فرت} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (۲)$$

ہے۔

(۹۹) نیز وہ رفتار جو ف پر کے عماد کے متوازی ہے صفر سے [(و + مف و) جب مف سا] تک بدلتی ہے یا (چھوٹی مقداروں کے پہلے رتبہ تک) و مف سا تک۔ پس ف پر کے عماد کی سمت میں اوسط اسراع $\frac{و \, مف سا}{مف ت}$ ہے یا انتہا میں

$$و \frac{فرسا}{فرت} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (۳)$$

اِن اجزا ترکیبی کے لیے بعض دوسرے جملے بھی اہم ہیں چنانچہ مماسی اسراع کے لیے (۱) سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{فرو}{فرت} = \frac{فر^{۲}س}{فرت^{۲}} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (۴)$$

نیز

$$\frac{فرو}{فرت} = \frac{فرو}{فرس} \frac{فرس}{فرت} = و \frac{فرو}{فرس} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (۵)$$

اگر و کو اب س کا ایک تفاعل سمجھا جائے۔
عمادی اسراع کے لیے حاصل ہوتا ہے

$$ و \frac{فرسا}{فزت} = و \frac{فرسا}{فرس} \frac{فرس}{فزت} = \frac{و^2}{نہ} \quad ......(6) $$

اگر نہ ($= \frac{فرس}{فرسا}$) نصف قطر انحناء ہو۔

اوپر کے نتیجے رسم الطریق پر غور کرنے سے بھی حاصل ہوتے ہیں۔ چنانچہ شکل ۱۸ صفحہ ۸۹ میں سمتیں و ط اور و طَ علی الترتیب رفتاروں و اور و + مف و کو تعبیر کرتے ہیں اور زاویہ طِ و طَ مف سا کے مساوی ہے۔ رفتار ط طَ جو وقفہ مف ت میں پیدا ہوتی ہے و ط پر اور اس کے عمود وار دو اجزائے ترکیبی میں تحلیل کی جاسکتی ہے یعنے راستہ کے نقطہ ف پر کے مماس اور عماد کی سمتوں میں۔ اول الذکر جزو ترکیبی انتہا میں مف و کے مساوی ہے اور ثانی الذکر و مف سا کے مساوی۔ مف ت سے تقسیم کرنے پر انتہا میں ضابطے (۲) اور (۳) حاصل ہوتے ہیں۔

اس ثبوت کا ایک فائدہ یہ ہے کہ اس کی توسیع آسانی کے ساتھ اُس صورت پر کیجا سکتی ہے جس کا تعلق تین ابعاد میں حرکت سے ہے جس میں راستہ اور رسم الطریق دونوں پیچدار منحنی ہوتے ہیں۔ ف اور فَ پر راستے کے مماس بالعموم ایک دوسرے سے نہیں ملتے لیکن مستوی ط و طَ جو ان کے متوازی ہے ایک معین انتہائی محل رکھتا ہے یعنے وہ اُس مستوی کے متوازی ہوتا ہے جس کو راستہ کے نقطہ ف پر "لثمی مستوی" کہا جاتا ہے۔ اس لیے حاصل اسراع اس لثمی مستوی میں ہوتا ہے اور اس کے اجزائے ترکیبی مماس اور "صدر عماد" (منحنی کا وہ عماد جو اِس مستوی میں کھینچا گیا ہو) کی سمتوں میں پھر بھی ضابطوں (۲) اور (۳) سے حاصل ہوتے ہیں بشرطیکہ مف سا سے وہ زاویہ تعبیر ہو جو راستہ (۱۰۰)
کے دو متصلہ مماسوں کے درمیان میلان کو ظاہر کرتا ہے۔ اِس صورت میں جملہ $\frac{فرسا}{فرس}$ اُس جملہ کے مترادف ہوتا ہے جس کو ہندسہ مجسمات میں ف پر کا

"صدر انحناء" کہتے ہیں اور جس کو بالعموم $\frac{1}{\text{ع}}$ سے تعبیر کرتے ہیں - اس لیے عمادی اسراع کی شکل (۶) بھی اطلاق پذیر ہے۔

سمتیوں کی ترقیم میں اگر مماس اور عماد کی سمتوں میں دو اکائی سمتی علی الترتیب ت، ن سے تعبیر ہوں تو رفتار و

$$\text{و} = \text{و لت} \quad ....(۷)$$

تب اسراع کے لیے حاصل ہوتا ہے

$$\text{ف} = \text{وَ لت} + \text{و لتَ} \quad ....(۸)$$

اب لت اور لت + مف ت کے درمیان زاویہ مف سا ہے اور چونکہ یہ سمتی اکائی طول کے ہیں اس لیے مف لت بالآخر ان دونوں کے علی القوائم ہے اور اس لیے (صدر) عماد کے متوازی ہے نیز اس کا طول مف سا ہے۔ پس مف لت = لن مف سا اور

$$\text{ف} = \text{وَ لت} + \text{و سان لن} \quad ....(۹)$$

اِس طرح اسراع، ایک مماسی جزو ترکیبی وَ اور ایک عمادی جزو ترکیبی و سانَ کے ہندسی مجموعہ کے طور پر بیان ہوتا ہے۔

مثال ۱ - نصف قطر ا کے ایک دائری مدار کی صورت میں ہم س = اسا لکھ سکتے ہیں، اس لیے

$$\text{و} = \text{ا}\frac{\text{فرسا}}{\text{فرت}} = \text{اسہ} \quad ....(۱۰)$$

اگر سہ $\left(= \frac{\text{فرسا}}{\text{فرت}}\right)$ اُس نصف قطر کی زاویٔ رفتار ہو جو متحرک نقطہ میں سے گزرتا ہے۔ اس لیے مماسی اسراع

$$\frac{\text{فرو}}{\text{فرت}} = \text{ا}\frac{\text{فر}^{2}\text{سا}}{\text{فرت}^{2}} = \text{ا}\frac{\text{فرسہ}}{\text{فرت}} \quad ....(۱۱)$$

اور عمادی اسراع

$$\text{و}\ \frac{\text{فرسا}}{\text{فرت}} = \text{ا سہ}^{۲} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ (۱۲)$$

ہے۔

مثال ۲۔ ضابطہ (۶) کو راستہ کا انحناء معلوم کرنے کے لیے استعمال کیا جا سکتا ہے۔ جبکہ رفتار اور اسراع معلوم ہوں۔

مثلاً برتدویری حرکت (دفعہ ۲۳) کی صورت میں جب متحرک نقطہ ف (شکل ۲۰) مرکز سے بڑے سے بڑے فاصلہ پر ہوتا ہے تو اندرواراسراع جو ق کے اسراع اور (ق کے لحاظ سے) ف کے اسراع سے بنا ہے (۱۲) کی رو سے $\text{ن}^{۲}\text{ا} + \text{نَ}^{۲}\text{اَ}$ ہے۔ اسی طرح رفتار $\text{ن ا} + \text{نَ اَ}$ ہے۔ اس لیے انحناء

$$\frac{۱}{\text{ن}} = \frac{\text{ن}^{۲}\text{ا} + \text{نَ}^{۲}\text{اَ}}{(\text{ن ا} + \text{نَ اَ})^{۲}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ (۱۳)$$

ہے۔

وہ انحناء جبکہ متحرک نقطہ مرکز سے قریب ترین ہوتا ہے ا کی علامت (صورت اَ > ا میں) بدلنے سے معلوم ہوتا ہے چنانچہ وہ (۱۰۱)

$$\frac{۱}{\text{ن}} = \frac{\text{نَ}^{۲}\text{اَ} - \text{ن}^{۲}\text{ا}}{(\text{نَ اَ} - \text{ن ا})^{۲}} \quad \ldots\ldots\ldots\ (۱۴)$$

ہے۔ یہ منفی ہوگا اگر $\text{نَ}^{۲}\text{اَ} > \text{ن}^{۲}\text{ا}$۔

اس کا اطلاق سورج (و) کے لحاظ سے چاند (ف) کے مدار پر کرنے میں ہم تقریباً ن = ۱۳ نَ، اَ = ۴۰۰ ا رکھ سکتے ہیں۔ اس سے نہ مثبت حاصل ہوتا ہے چنانچہ چاند کا مدار حقیقت میں ہر جگہ سورج کی جانب مقعر ہے۔

لیکن اگر ہم یہ فرض کریں کہ زمین (و) کے لحاظ سے سورج (قَ) کی حرکت کا حوالہ علامتوں نَ، اَ سے دیا گیا ہے اور سورج کے لحاظ سے ایک سفلی سیارہ (ف) کی حرکت کا حوالہ ن، ا سے تو

$$\text{نَ}^{۲}\text{اَ} - \text{ن}^{۲}\text{ا} = \text{ن}^{۲}\text{ا}^{۳}\left(\frac{۱}{\text{اَ}^{۲}} - \frac{۱}{\text{ا}^{۲}}\right) \quad \ldots\ldots\ (۱۵)$$

کیونکہ کیپلر Kepler کے تیسرے کلیہ کی رو سے (دفعہ ۸۰) $ن^{2} ا^{3} = ن'^{2} ا'^{3}$ - چونکہ $ا' > ا$ اس لیے یہ جز منفی ہے، زمین کے لحاظ سے سیارہ کے مدار میں فی الحقیقت حلقے ہوتے ہیں، یہ مدار اُس پہلے بر تدویری کی مانند ہوتا ہے جو شکل ۲۱ء صفحہ ۹۷ میں دکھایا گیا ہے - علوی سیارہ کی صورت بھی اس میں شامل ہے اگر ہم یہ خیال کریں کہ ف سیارہ کو اور ق سورج کو تعبیر کرتے ہیں -

۳۵ - حرکیاتی مساواتیں -

اگر ایک ذرہ م پر عمل کرنے والی قوت کو ہر لمحہ پر مماس اور عماد کی سمتوں میں تحلیل کیا جائے اور اِن اجزائے ترکیبی کو علی الترتیب صا اور ضا سے تعبیر کیا جائے تو

$$م\,و\,\frac{فرو}{فرس} = صا،\quad \frac{م\,و^{2}}{ح} = ضا \quad\ldots\ldots\ldots (1)$$

پہلی مساوات سے فوراً توانائی کی مساوات حاصل ہوتی ہے چنانچہ س کے لحاظ سے تکمل کرنے سے

$$\frac{1}{2}م\,و_{ا}^{2} - \frac{1}{2}م\,و_{ب}^{2} = \int_{س_{ب}}^{س} صا\,فرس \quad\ldots\ldots\ldots (2)$$

بائیں جانب کا تکملہ اُس کُل کام کو تعبیر کرتا ہے جو ذرہ پر ہوا، کیونکہ ایک صغیر ہٹاؤ میں مماسی جز و ترکیبی کا کام صا فس ہے اور عمادی جز و ترکیبی کا کام معدوم ہوتا ہے -

تین ابعاد میں حرکت کی ایک تیسری مساوات مطلوب ہوتی ہے، اُس مساوات سے یہ بیان ہوتا ہے کہ وہ حاصل قوت جو لمثمی مستوی کے عماد کی سمت میں ہے معدوم ہوتی ہے - مساوات (۲) بلاشبہ درست رہیگی -

اگر صا = ۰ - یعنے اگر حاصل قوت ہمیشہ عماد کی سمت میں ہو تو $\frac{فرو}{فرت} = ۰$.

اور اس لیے رفتار مستقل ہے ۔ یہ اُس ذرّہ کی صورت میں ہوتا ہے جو ایک چکنے منحنی پر اس منحنی کے ردِعمل کے تحت متحرک ہو اور اس پر کوئی دوسری قوت عمل نہ کرے تب مساواتوں (۱) میں سے پہلی مساوات سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ تعامل، انحناء $\frac{۱}{ نہ}$ کے متناسب ہے ۔

مثال ۱ ۔ وہ شرط معلوم کرو کہ ایک ذرّہ م جو طول ل کی ایک ڈوری کے ذریعہ ایک ثابت نقطہ سے بندھا ہوا ہے ایک افقی دائرہ مرتسم کر سکے ۔

اگر انتصابی کے ساتھ ڈوری کا مستقل میلان طہ، دائرہ میں ضروری زاویائی رفتار سہ، اور ڈوری کا تناؤ ت ہو تو چونکہ بموجب فرض کوئی انتصابی حرکت نہیں ہے اس لیے

$$ت جم طہ = م ج \qquad .... (۳)$$

نیز دائرہ کے نصف قطر کی سمت میں تحلیل کرنے سے

$$م سہ^۲ ل جب طہ = ت جب طہ، یا م سہ^۲ ل = ت \qquad ...... (۴)$$

اس لیے

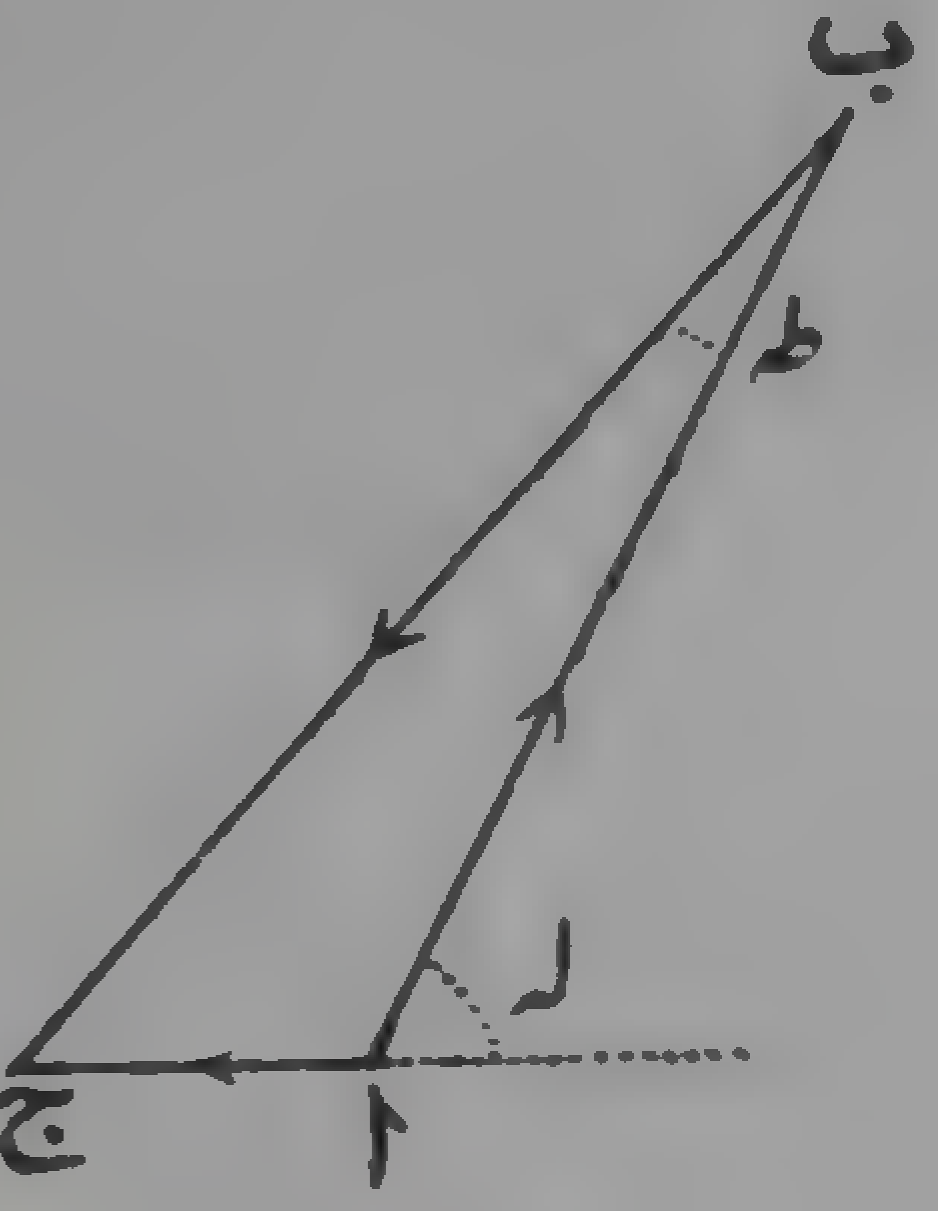
$$سہ^۲ = \frac{ج}{ل جم طہ} \qquad .... (۵)$$

اس لیے ایک گردش کا دور $\frac{۲\pi}{سہ}$ وہی ہے جو طول ل جم طہ کے ایک سادہ رقاص کے چھوٹے اہتزاز کا ہوتا ہے ۔ اگر طہ چھوٹا ہو تو یہ عملاً ل کے مساوی ہے ۔ تب ایک انتصابی مستوی پر ذرّہ کا ظل، طول ل کے ایک سادہ رقاص کے لنگر کی مانند حرکت کریگا ۔

مثال ۲ ۔ کسی مقام پر خط شاقول کا انحراف بوجہ گردش زمین معلوم کرنا ۔

جب خط شاقول ظاہری (یا اضافی) توازن میں ہو تو ڈوری کے تناؤ ت اور لٹکی ہوئی کمیت م کے اصلی جاذبہ کا حاصل، زمین کے محور کی جانب قوت م سہ^۲ ر ہونا چاہئے جہاں زمین کی زاویائی رفتار سہ ہے اور م سے جو یومی دائرہ مرتسم ہوتا ہے اُس کا نصف قطر ر ہے ۔ ہم جاذبہ کے اصلی اسراع کو جَ سے اور ظاہری اسراع کو ج سے تعبیر کرتے ہیں، اس لیے ت = م ج ۔

شکل (۳۲) میں اب، تناؤم ج کو، ب ج اصلی جاذبہ م جَ کو، اور اج حاصل م سہ² ر کو تعبیر کرتا ہے۔ اس لیے اگر مقام کا ہیئتی طور پر دریافت کردہ عرض بلد له ہو یعنے وہ زاویہ جو خط شاقول استواء کے مستوی سے بناتا ہے تو



شکل ۳۲

$$\frac{\text{جب ط}}{\text{جب (له - ط)}} = \frac{\text{اج}}{\text{اب}} = \frac{\text{سہ}^2\text{ر}}{\text{ج}} \ldots (۶)$$

عددی معطیات سے یہ معلوم ہوگا کہ بائیں جانب کی کسر ہمیشہ بہت چھوٹی ہوتی ہے۔ اس لیے ط ہمیشہ ایک چھوٹا زاویہ ہوتا ہے اور

$$\text{جب ط} = \frac{\text{سہ}^2\text{ر جب له}}{\text{ج}} \quad \text{تقریباً}$$

نیز ہم ر = اٗ جم له لکھ سکتے ہیں جہاں اٗ زمین کا نصف قطر ہے اور اِس اندراج سے کوئی اہم خطا واقع نہیں ہوگی۔ چنانچہ ۱۰۳

$$\text{جب ط} = \frac{\text{سہ}^2\text{ا}}{\text{ج}}\text{ جب له جم له} \ldots\ldots\ldots (۷)$$

نیز

$$\frac{\text{ج}}{\text{جَ}} = \frac{\text{اب}}{\text{ب ج}} = \frac{\text{جب (له - ط)}}{\text{جب له}} = \text{جم ط} - \frac{\text{سہ}^2\text{ا}}{\text{ج}}\text{ جم}^2\text{ له}$$

یا

$$\text{ج} = \text{جَ}\left(۱ - \frac{\text{سہ}^2\text{ا}}{\text{ج}}\text{ جم}^2\text{ له}\right) \ldots\ldots\ldots (۸)$$

کافی تقرب تک۔

سینٹی میٹر اور ثانیہ کی رقوم میں

$$\frac{۲\pi}{\text{سہ}} = ۸۶۱۶۴ ،\quad \text{ا} = ۶٫۳۸ \times ۱۰^۸ ،\quad \text{ج} = ۹۸۱$$

اس لیے $\frac{س^2 ل}{ج} = ۰۰۳۴۶..۰ = \frac{1}{۲۸۹}$

ط کی اعظم قیمت اس وقت حاصل ہوتی ہے جب کہ ل = ۴۵° اور وہ تقریباً ۶″ ہے۔
اگر اصلی جاذبہ کی قیمت جَ زمین کی سطح پر سب جگہ وہی ہوتی تو ضابطہ (۸) سے ظاہری جاذبہ کا تغیر عرضِ بلد کے تغیر کے تناظر حاصل ہوتا۔ لیکن واقعہ یہ ہے کہ جَ خود متغیر ہے کیونکہ زمین کی سطح اور اس کے اندر مساوی کثافت کے طبقات ٹھیک ٹھیک کروی نہیں ہیں[1]۔ اس لیے کشش مقدار اور سمت دونوں میں اُس کشش سے مختلف ہوتی ہے جو ایک تشاکل کروی جسم کی ہوا کرتی ہے۔

۳۶۔ ایک چکنے منحنی پر حرکت۔

ایک ذرہ م ایک چکنے منحنی پر ایک انتصابی مستوی میں جاذبہ کے تحت حرکت کرتا ہے۔ اس صورت میں قوتیں

$$صا = -م ج جب سا \quad ضا = -م ج جم سا + ر \qquad \text{.........} (۱)$$

ہیں جہاں سہ وہ میلان ہے جو مماس (جس کو اُس سمت میں کھینچا گیا ہے جس میں س بڑھ رہا ہے) اور افقی کے درمیان ہے اور ر وہ دباؤ ہے جو منحنی سے عائد ہوتا ہے، اِس دباؤ کو مثبت شمار کیا جاتا ہے جب کہ وہ مرکزِ انحناء کی جانب عمل کرے اس لیے حرکت کی مساواتیں

$$\left.\begin{aligned} م و \frac{فرو}{فرس} &= -م ج جب سا \\ \frac{م و^2}{نہ} &= -م ج جم سا + ر \end{aligned}\right\} \qquad \text{..........} (۲)$$

ہیں۔

---

[1] کروی تشاکل سے انحراف ابتداءً گردش کی وجہ سے ہوا ہے۔

اگر لا اور ما کے محوروں کو علی الترتیب افقی اور انتصابی لیا جائے اور محور ما کی مثبت سمت اُوپر دار ہو تو



شکل ۳۳

$$\text{جم سا} = \frac{\text{فرلا}}{\text{فرس}}\text{، جب سا} = \frac{\text{فرما}}{\text{فرس}} \quad \ldots\ldots (۳)$$

اور اس لیے

$$\text{م و} \frac{\text{فرو}}{\text{فرس}} = -\text{م ج} \frac{\text{فرما}}{\text{فرس}} \quad \ldots (۴)$$

پس $\frac{۱}{۲}\text{م و}^۲ + \text{م ج ما} = \text{مستقل} \quad \ldots\ldots (۵)$

یہ نتیجہ توانائی کے اصول سے فوراً ماخوذ ہو سکتا تھا کیونکہ چکنے منحنی کا تعامل کوئی کام نہیں کرتا ۔ اِس ضابطہ کو شکل

$$\text{و}^۲ = \text{ج} - ۲\text{ج ما} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (۶)$$

میں آسانی سے استعمال کیا جا سکتا ہے ۔ جب اختیاری مستقل متعین ہو جاتا ہے تو (۲) کی دوسری مساوات سے دباؤ ر معلوم ہوتا ہے ۔

مثال ۱ ۔ فرض کرو کہ منحنی ایک مکافی ہے جس کا محور انتصابی اور تقعر اُوپر وال ہے، جیسا کہ ہم جانتے ہیں ۔ یہ منحنی آزادانہ مرتسم ہو سکتا ہے اگر ذرّہ کو مناسب طریقہ پر متحرک کیا جائے ۔ اب اگر وَ اِس آزاد حرکت کے حوالے سے ہو تو (۲) سے

$$\frac{\text{م و}'^۲}{\text{نہ}} = -\text{م ج جم سا} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (۷)$$

اس لیے مقید حرکت میں رفتار و ہو تو

$$\text{ر} = \frac{\text{م}(\text{و}^۲ - \text{و}'^۲)}{\text{نہ}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (۸)$$

لیکن (۶) سے　$\text{و}'^۲ = \text{ج}' - ۲\text{ج ما} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۹)$

اس لیے　$\text{ر} = \frac{\text{م}(\text{ج} - \text{ج}')}{\text{نہ}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۱۰)$

یعنی عمادی دباؤ انحنا کے متناسب ہے۔

اِس نتیجہ کی توسیع آسانی کے ساتھ اُس صورت پر کی جا سکتی ہے جس میں ذرّہ مختلف دی ہوئی قوتوں کے زیرِ عمل ایک ایسے چکنے منحنی پر حرکت کر رہا ہو جس کی شکل ایسی ہو کہ وہ اُن ہی قوتوں کے تحت آزادانہ مرتسم ہو سکے اگر ذرّہ کو مناسب طریقہ پر متحرک کیا جائے۔

مثال ۲۔ ایک ذرّہ ایک افقی متدیر اسطوانہ کے محیط سے ایک ڈوری کے ذریعہ جو اسطوانہ کے گرد لپیٹی ہوئی ہے مماساً لٹکتا ہے۔

اگر اسطوانہ کا نصف قطر ا اور ڈوری کے آزاد انتصابی حصّہ کا طول ل ہو تو توانائی بالقوہ جب کہ ڈوری زاویہ طہ میں سے منحرف ہو

$$\text{قہ} = \text{م ج} \left\{ \text{ا جب طہ} - (\text{ل} + \text{ا طہ}) \text{ جم طہ} \right\} + \text{م ج ل} \quad \ldots\ldots (۱۱)$$

ہے اگر یہ فرض کیا جائے کہ قہ کی صفر قیمت، طہ = ۰ کے متناظر ہے۔ اس لیے توانائی کی مساوات

$$\tfrac{۱}{۲}\text{م و}^{۲} + \text{م ج} \left\{ \text{ا جب طہ} - (\text{ل} + \text{ا طہ}) \text{جم طہ} \right\} + \text{م ج ل} = \tfrac{۱}{۲}\text{م و}_{۰}^{۲} \quad \ldots\ldots (۱۲)$$

(۱۰۵) ہے جہاں و۰ سے ذرّہ کی وہ رفتار تعبیر ہوتی ہے جب کہ وہ زیرترین محل میں سے گزرا تھا۔ طہ کی چھوٹی قیمتوں کے لیے یہ مساوات

$$\text{و}^{۲} = \text{و}_{۰}^{۲} - \text{ج} \left(\text{ل طہ}^{۲} + \tfrac{۲}{۳} \text{ ا طہ}^{۳} \right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۱۳)$$

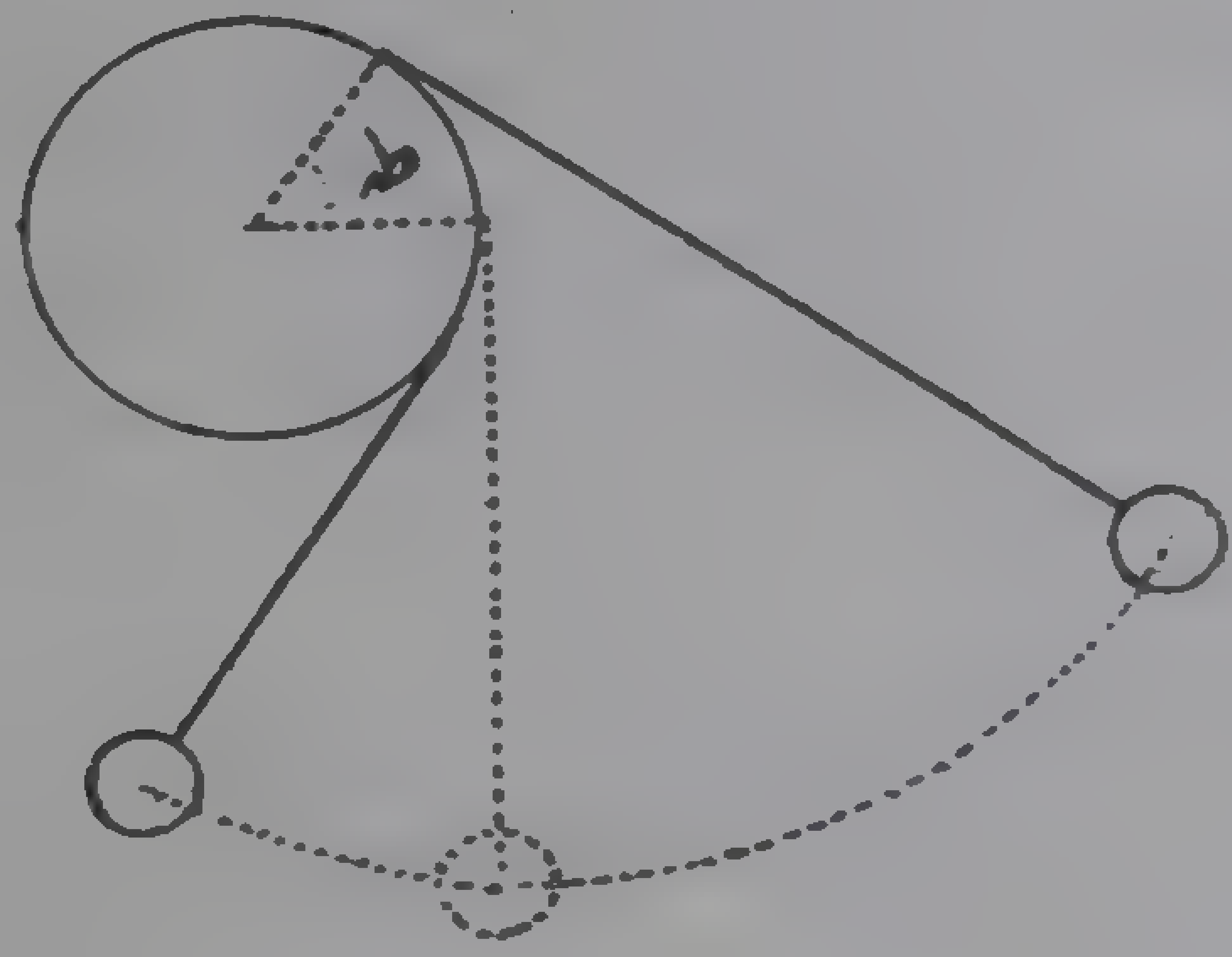
میں تحویل ہوتی ہے جس میں رتبہ طہ^۴ کی رقمیں نظر انداز کی گئی ہیں۔

سکون کے محل معلوم کرنے کے لیے ہم و = ۰ رکھتے ہیں۔ ڈوری کے انتہائی میلانوں کو چھوٹا فرض کرو اور دائری رقاص کے ساتھ مقابلہ کرنے کے لیے

$$\text{ن}^{۲} = \frac{\text{ج}}{\text{ل}} \text{،} \quad \text{و}_{۰} = \text{ن ل ع} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۱۴)$$

لکھو تو اُوپر کی مساوات

$$\text{طہ}^{۲} + \tfrac{۲}{۳} \frac{\text{ا}}{\text{ل}} \text{طہ}^{۳} = \text{ع}^{۲} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۱۵)$$



شکل ۳۴

ہو جاتی ہے جس کو تقرب سے حل کیا جاسکتا ہے ۔ چنانچہ پہلے تقرب کے لیے ط = ± ع حاصل ہوتا ہے اور دوسرے تقرب کے لیے

$$ط^۲ = ع^۲ \mp \frac{۲}{۳} \frac{ا}{ل} ع^۳ \quad \text{..................(۱۶)}$$

اس لیے

$$ط = \pm ع \left(۱ \mp \frac{۱}{۳} \frac{اع}{ل} \right) \quad \text{..................(۱۷)}$$

اس لیے اہتزاز متشاکل نہیں ہیں بلکہ محل

$$ط = - \frac{۱}{۳} \frac{اع^۲}{ل} \quad \text{..................(۱۸)}$$

کی ہر جانب مساوی فاصلوں تک جاتے ہیں ۔

۳۷ ۔ دائری رقاص ۔

فرض کرو کہ رقاص کا طول ل اور کسی لمحہ پر انتصابی کے ساتھ میلان ط ہے ۔ دفعہ ۳۴ کی رُو سے مماسی اسراع ل $\frac{فر^۲ ط}{فرت^۲}$ ہے، اس لیے

$$\text{ل}\ \frac{\text{فز}^{2}\,\text{ط}}{\text{فزت}^{2}} = -\text{ج جب ط} \qquad \ldots\ldots\ldots (1)$$

یا
$$\frac{\text{فز}^{2}\,\text{ط}}{\text{فزت}^{2}} + \text{ن}^{2}\ \text{جب ط} = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots (2)$$ (۱۰۶)

اگر
$$\text{ن}^{2} = \frac{\text{ج}}{\text{ل}} \qquad \ldots\ldots\ldots (3)$$

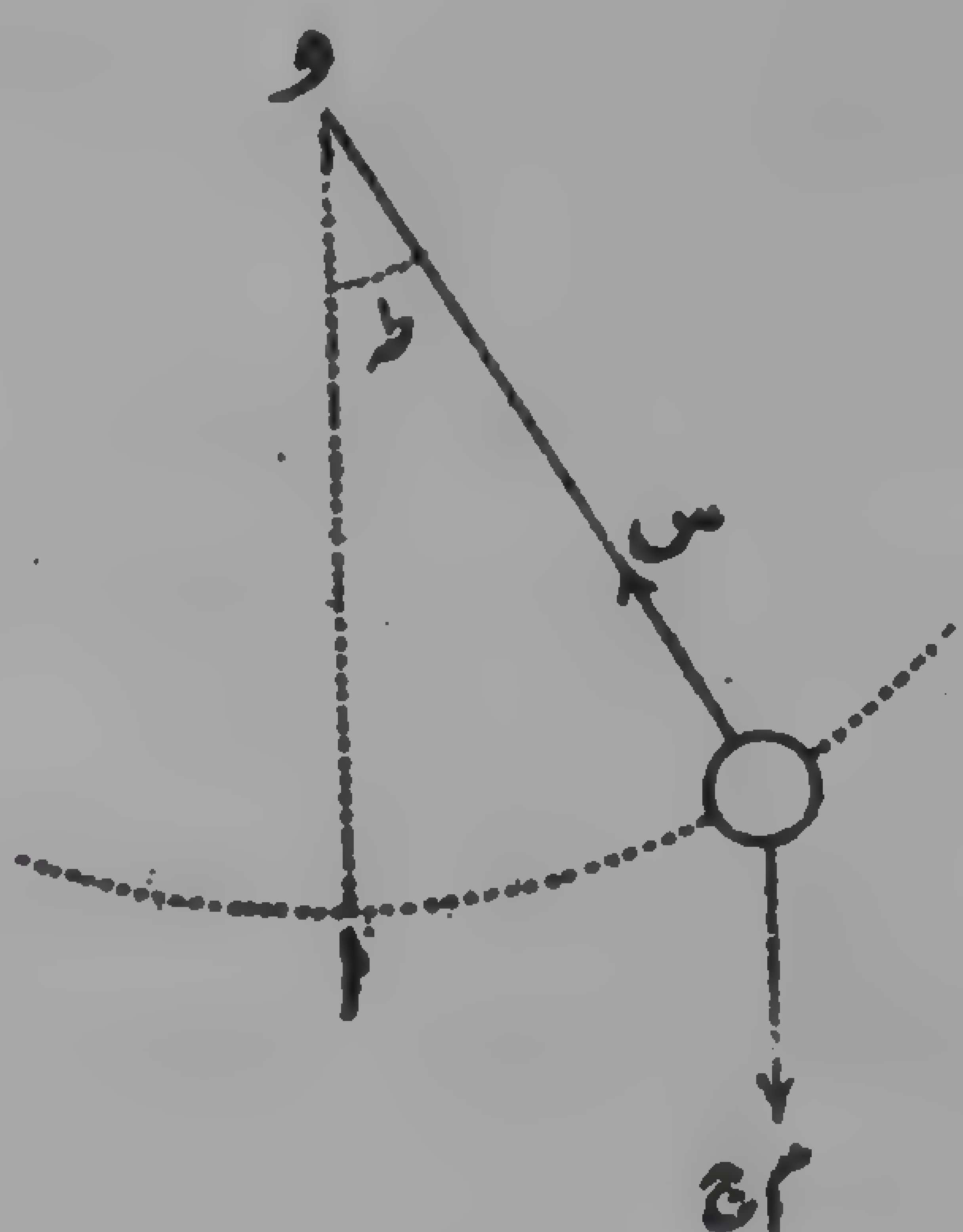
اگر زاویہ ط ہمیشہ چھوٹا ہو تو ہم جب ط کی بجائے تقریبی طور پر ط رکھ سکتے ہیں اور ایسی ترمیم کے بعد مساوات (۲) کا حل

$$\text{ط} = \text{عہ جم}\ (\text{ن ت} + \text{صہ}) \qquad \ldots\ldots\ldots (4)$$

ہے جہاں عہ اور صہ اختیاری ہیں۔ اس لیے ایک کامل اہتزازہ کا دورہ

$$\text{ت} = \frac{2\pi}{\text{ن}} = 2\pi\sqrt{\frac{\text{ل}}{\text{ج}}} \qquad \ldots\ldots\ldots (5)$$

ہے جو دفعہ ۱۱ کے مطابق ہے۔



شکل ۳۵

لیکن اب ہمیں انتصابی کے ہر جانب ایک محدود زاویہ عہ میں سے اہتزاز کی صورت پر غور کرنا ہے۔ توانائی کی مساوات {دفعہ ۳۶ (۵)} سے

$$\text{ل}\left(\frac{\text{فرطہ}}{\text{فرت}}\right)^{2} = \text{۲ ج جم طہ} + \text{ج} \quad \ldots\ldots (6)$$

حاصل ہوتا ہے اور یہ (۱) سے بھی ظاہر ہے اگر ہم $\frac{\text{فرطہ}}{\text{فرت}}$ سے ضرب دیں اور ت کے لحاظ سے تکمل کریں۔

اگر یہ مان لیا جائے کہ طہ = عہ کے لیے $\frac{\text{فرطہ}}{\text{فرت}} = 0$ تو ج = -۲ ج جم عہ

اور

$$\left(\frac{\text{فرطہ}}{\text{فرت}}\right)^{2} = \text{۲ ن}^{2}\,(\text{جم طہ} - \text{جم عہ})$$

$$= \text{۴ ن}^{2}\,(\text{جب}^{2}\,\tfrac{1}{2}\,\text{عہ} - \text{جب}^{2}\,\tfrac{1}{2}\,\text{طہ}) \quad \ldots\ldots (7)$$

پس طہ کی مثبت سمت میں رقاص کے اس اہتزاز پر غور کرنے سے جو انتصابی (۱۰۷)
سے پرے ہو حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{ن فرت}}{\text{فرطہ}} = \frac{1}{\sqrt{\text{جب}^{2}\,\tfrac{1}{2}\,\text{عہ} - \text{جب}^{2}\,\tfrac{1}{2}\,\text{طہ}}\;\text{۲}} \quad \ldots\ldots (8)$$

محدود شکل میں تکمل کے لیے ناقصی تفاعلوں کو استعمال کرنا ہوگا۔ اس کو ان تفاعلوں کی معیاری شکل میں عمل میں لانے کے لیے ہم ایک ایسے نئے متغیر فہ کو داخل کرتے ہیں کہ

$$\text{جب}\,\tfrac{1}{2}\,\text{طہ} = \text{جب}\,\tfrac{1}{2}\,\text{عہ جب فہ} \quad \ldots\ldots (9)$$

اس لیے انتصابی سے پرے اہتزاز میں فہ صفر سے $\tfrac{1}{2}\pi$ تک بڑھتا ہے۔ تب

$$\frac{\text{ن فرت}}{\text{فرطہ}} = \frac{1}{\text{۲ جب}\,\tfrac{1}{2}\,\text{عہ جم فہ}} \quad \ldots\ldots (10)$$

اور (۹) کو تفرق کرنے سے

$$\frac{\text{فرطہ}}{\text{فرفہ}} = \frac{\text{۲ جب}\,\tfrac{1}{2}\,\text{عہ جم فہ}}{\text{جم}\,\tfrac{1}{2}\,\text{طہ}} \quad \ldots\ldots (11)$$

اس لیے $\dfrac{\text{ن فرت}}{\text{فرفہ}} = \dfrac{\text{ن فرت}}{\text{فرطہ}}\,\dfrac{\text{فرطہ}}{\text{فرفہ}} = \dfrac{1}{\text{جم}\,\frac{1}{2}\text{طہ}}$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\text{جب}^{2}\,\frac{1}{2}\text{عہ}\,\text{جب}^{2}\,\text{فہ}}} \qquad \text{(۱۲)}\ \ldots\ldots$$

اس لیے توس طہ میں سے جھولنے کا وقت ت،

$$\text{ن ت} = \int_{\text{ب}}^{\text{فہ}} \frac{\text{فرفہ}}{\sqrt{1-\text{جب}^{2}\,\frac{1}{2}\text{عہ}\,\text{جب}^{2}\,\text{فہ}}} \qquad \text{(۱۳)}\ \ldots\ldots$$

سے حاصل ہوتا ہے جہاں اوپر کی حد، ضابطہ (۹) کے ذریعہ طہ سے متعلق ہے۔ ناقصی تکملوں کی ترقیم میں (سکونیات دفعہ ۱۲۷)

$$\text{ن ت} = \text{فا}\left(\text{جب}\,\tfrac{1}{2}\text{عہ}،\ \text{فہ}\right) \qquad \text{(۱۴)}\ \ldots\ldots$$

ایک کامل اہتزاز کا وقت معلوم کرنے کے لیے ہمیں $\text{فہ} = \frac{1}{2}\pi$ رکھنا چاہیے اس طرح ت کی جو قیمت حاصل ہو اس کو ۴ سے ضرب دینا چاہیے۔ چنانچہ دور

$$\text{ت} = \frac{4}{\text{ن}} \int_{\text{ب}}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\text{فرفہ}}{\sqrt{1-\text{جب}^{2}\,\frac{1}{2}\text{عہ}\,\text{جب}^{2}\,\text{فہ}}}$$

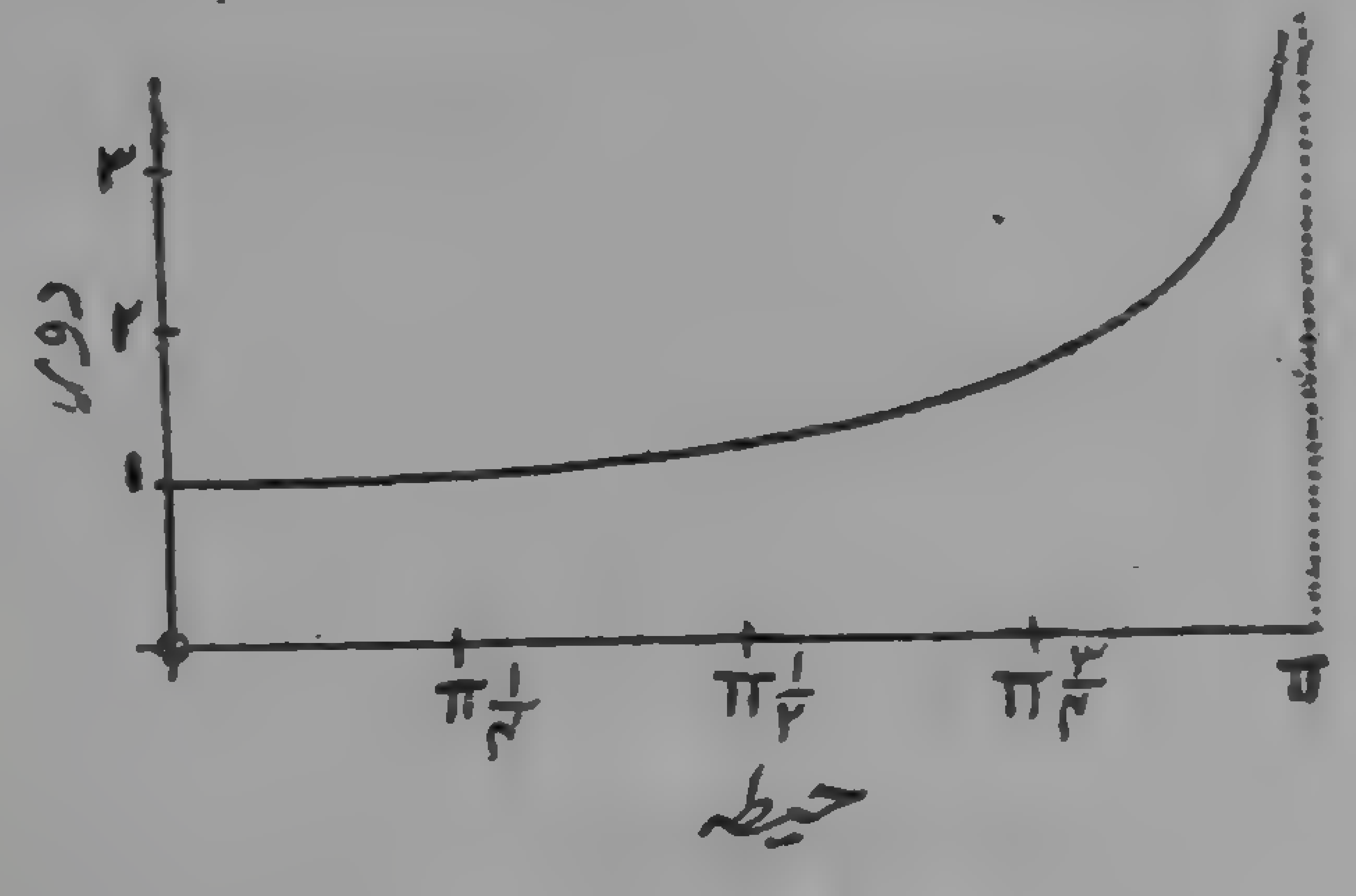
$$= \frac{4}{\text{ن}}\,\text{فا}_{1}\left(\text{جب}\,\tfrac{1}{2}\text{عہ}\right) \qquad \text{(۱۵)}\ \ldots\ldots$$

ہے جہاں مقیاس جب $\frac{1}{2}$ عہ کے لیے پہلی قسم کا کامل ناقصی تکملہ فا_{1} سے تعبیر ہوتا ہے۔ وہ نسبت جو اس دور کو ایک لا انتہا چھوٹی توس میں دور کے ساتھ ہے

$$\frac{2}{\pi}\,\text{فا}_{1}\left(\text{جب}\,\tfrac{1}{2}\text{عہ}\right) \qquad \text{(۱۶)}\ \ldots\ldots$$

ہے۔ اس کو حسب ذیل جدول میں عہ کی قیمتوں کے ایک سلسلہ کے لیے ناقصی (۱۰۸)
تکملوں کی جدولوں کی مدد سے دیا گیا ہے۔ نتیجہ کو ترسیماً شکل ۳۶ میں دکھایا گیا ہے

ع	$\frac{۲}{\pi}$ فا (جب $\frac{۱}{۲}$ ع)	ع	$\frac{۲}{\pi}$ فا (جب $\frac{۱}{۲}$ ع)
°۰	۱٫۰۰۰۰۰۰	°۲۰	۱٫۰۰۷۶۶۹
°۱	۱٫۰۰۰۰۱۹	°۳۰	۱٫۰۱۷۴۰۹
°۲	۱٫۰۰۰۰۷۶	°۴۵	۱٫۰۳۹۹۷۳
°۳	۱٫۰۰۰۱۷۰	°۶۰	۱٫۰۷۳۱۸۲
°۴	۱٫۰۰۰۳۰۵	°۹۰	۱٫۱۸۰۳۴۰
°۵	۱٫۰۰۰۴۷۶	°۱۲۰	۱٫۳۷۲۸۸۰
°۱۰	۱٫۰۰۰۹۰۷	°۱۵۰	۱٫۷۶۲۲۰۴
		°۱۸۰	∞



شکل ۳۶

دَور کے لیے جملہ ایک لاتمناہی سلسلہ کی شکل میں بھی حاصل کیا جا سکتا ہے۔ چنانچہ

$$\text{ت} = \frac{۴}{\text{ن}} \int_{۰}^{\frac{۱}{۲}\pi} \left(۱ - \text{جب}^{۲} \tfrac{۱}{۲}\text{ع}\ \text{جب}^{۲}\text{فہ}\right)^{-\frac{۱}{۲}} \text{دفہ}$$

$$= \frac{4}{\text{ن}} \int^{\frac{1}{2}\pi} \left(1 + \frac{1}{2}\,\text{جب}^2\, \frac{1}{2}\,\text{عہ}\,\text{جب}^2\,\text{فہ} + \frac{1\times 3}{2\times 4}\,\text{جب}^4\, \frac{1}{2}\,\text{عہ}\,\text{جب}^4\,\text{فہ} + \cdots\right) \text{فرفہ}$$

$$= \frac{2\pi}{\text{ن}} \left(1 + \frac{1^2}{2^2}\,\text{جب}^2\, \frac{1}{2}\,\text{عہ} + \frac{1^2\times 3^2}{2^2\times 4^2}\,\text{جب}^4\, \frac{1}{2}\,\text{عہ} + \cdots\right) \ldots (۱۷)$$ [ﻟﮧ]

اگر عہ چھوٹا ہو تو رقمیں قیمت میں بسرعت گھٹتی جاتی ہیں۔ پہلا تقرب ت (۱۰۹)

$= \frac{2\pi}{\text{ن}}$ یا $2\pi\sqrt{\frac{\text{ل}}{\text{ج}}}$ ہے، اور دوسرا تقرب

$$\text{ت} = 2\pi\sqrt{\frac{\text{ل}}{\text{ج}}}\left(1 + \frac{1}{4}\,\text{جب}^2\, \frac{1}{2}\,\text{عہ}\right) \ldots\ldots (۱۸)$$

ہے۔ تصحیح کی مقدار ایک ہزار میں ایک حصہ ہوتی ہے جب کہ $\text{جب}^2\, \frac{1}{2}\,\text{عہ} = ۰۰۴$ء یا $\text{جب}\,\frac{1}{2}\,\text{عہ} = ۰۶۳۲$ء یا $\text{عہ} = 7^\circ\, 12'$ تقریباً

ایک صورت ہے جس میں مساوات (۸) کو معمولی تفاعلوں کی رقوم میں ایک محدود شکل میں تکمل کیا جا سکتا ہے، یہ صورت اس وقت واقع ہوتی ہے جب کہ $\text{عہ} = \pi$ یعنے جب کہ رقاص غیر قائم توازن کے محل میں عین جھولتا ہے۔ تب

$$\text{ن}\,\frac{\text{فرت}}{\text{فرطہ}} = \frac{1}{2\,\text{جم}\,\frac{1}{2}\,\text{طہ}} \ldots\ldots\ldots\ldots (۱۹)$$

اس لیے

$$\text{ن}\,\text{ت} = \text{لوک}\,\text{مس}\left(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{4}\,\text{طہ}\right) \ldots\ldots\ldots (۲۰)$$

جہاں کسی مستقل کو جمع کرنے کی ضرورت نہیں اگر طہ = ۰ کے لیے ت = ۰۔ کسی محل میں لنگر کو سہارنے والی ڈوری (یا ہلکے ڈنڈے) کے تناؤ

ﻟﮧ ضابطہ $\int^{\frac{1}{2}\pi} \text{جب}^{2\text{س}}\,\text{فہ}\,\text{فرفہ} = \frac{1\times 3\times 5\times \ldots (2\text{س} - 1)}{2\times 4\times 6\times \ldots \times 2\text{س}} \times \frac{\pi}{2}$

کی رو سے۔

(فرض کرو س) کو معلوم کرنے کے لیے عمادی اسراع پر غور کرو تو

$$\text{م ل}\left(\frac{\text{فرطہ}}{\text{فرت}}\right)^{۲} = \text{س} - \text{م ج جم طہ} \quad \ldots\ldots\ldots (۲۱)$$

(۶) سے اندراج کرنے پر یہ معلوم ہوگا کہ

$$\text{س} = \text{م}\,(\text{۳ ج جم طہ} + \text{ج}) \quad \ldots\ldots\ldots (۲۲)$$

اگر رقاص ساکن ہو جائے جب کہ طہ = عہ تو ج = -۲ ج جم عہ اور

$$\text{س} = \text{م ج}\,(\text{۳ جم طہ} - \text{۲ جم عہ}) \quad \ldots\ldots\ldots (۲۳)$$

اگر طہ = ۰ کے لیے رقاص کی زاویائی رفتار سہ ہو تو (۶) سے

$$\text{سہ}^{۲}\,\text{ل} = \text{۲ ج} + \text{ج} \quad \ldots\ldots\ldots (۲۴)$$

اس لیے

$$\left(\frac{\text{فرطہ}}{\text{فرت}}\right)^{۲} = \text{سہ}^{۲} - \text{۲ ن}^{۲}\,(\text{۱} - \text{جم طہ})$$

$$= \text{سہ}^{۲} - \text{۴ ن}^{۲}\,\text{جب}^{۲}\,\tfrac{۱}{۲}\,\text{طہ} \quad \ldots\ldots\ldots (۲۵)$$

اگر رقاص کامل گردش کرتا ہے تو اس کو مثبت ہونا چاہیے جب کہ طہ = π اور اس کے لیے $\text{سہ}^{۲} > \text{۴ ن}^{۲}$ کی ضرورت ہے۔ اس لیے

$$\text{ک} = \frac{\text{۲ن}}{\text{سہ}} \quad \ldots\ldots\ldots (۲۶)$$

رکھنے سے

$$\frac{\text{سہ فرت}}{\text{فرطہ}} = \frac{۱}{\sqrt{\text{۱} - \text{ک}^{۲}\,\text{جب}^{۲}\,\tfrac{۱}{۲}\,\text{طہ}}} \quad \ldots\ldots\ldots (۲۷)$$

یا

$$\text{سہ ت} = ۲\int_{۰}^{\frac{۱}{۲}\text{طہ}} \frac{\text{فرفہ}}{\sqrt{\text{۱} - \text{ک}^{۲}\,\text{جب}^{۲}\,\text{فہ}}} = \text{۲ فا}\,(\text{ک}، \tfrac{۱}{۲}\,\text{طہ}) \quad \ldots\ldots\ldots (۲۸)$$

۱۱۰ اس سے زیریں ترین نقطہ سے کسی محل تک (جس کی حد طہ = π تک ہے) جھولنے کا وقت حاصل ہوتا ہے۔ اس لیے بلند ترین محل پر پہنچنے کا وقت

$$\frac{۲}{\text{سہ}}\,\text{فا}\left(\frac{\text{۲ن}}{\text{سہ}}\right) \quad \ldots\ldots\ldots (۲۹)$$

ہے۔

س = ۳ م ج جم طہ - ۲ م ج + م س² ل .... (۳۰)

سے حاصل ہوتا ہے۔ طہ = π کے لیے یہ مثبت ہوگا اگر

س² > ۵ج / ل .... (۳۱)

اِس دفعہ کے مسئلہ کا ایک دلچسپ تغیر اُس صورت میں پیش ہوتا ہے جس میں ایک ذرّہ ایک چکنے دائرہ پر ایک ایسے مستوی میں حرکت کرتا ہے جو افقی کے ساتھ کوئی دیا ہوا زاویہ بناتا ہے۔ تب ذرّہ کے جاذبہ کو ایک جزو م ج جب بہ میں جو مستوی پر کے ایک خط میلان اعظم کی سمت میں ہو اور ایک جزو م ج جب بہ میں جو سطح مستوی کے عماد کی سمت میں ہو تحلیل کیا جا سکتا ہے۔ اس لیے ذرّہ کی دائرہ میں یہ حرکت گزشتہ تحلیل کی ضمن میں آجاتی ہے بشرطیکہ ج کی بجائے ج جب بہ کو رکھا جائے۔ بالخصوص اگر دائرہ کا نصف قطر ا ہو تو ایک چھوٹے اہتزاز کا دَور

۲π √(ا / ج جب بہ) .... (۳۳)

ہوگا جو طول

ل = ا / جب بہ .... (۳۴)

کے رقاص کے دَور کے مساوی ہے۔ بہ کو بہت چھوٹا بنا کر متناظر رقاص کے طول کو بہت بڑا بنایا جا سکتا ہے۔ یہ "افقی رقاص" کا نظریہ ہے جس کو زلزلہ پیما آلوں میں یا جاذبہ کے قمری خلل کی پیمائش کے لیے استعمال کیا جاتا ہے۔ عمل میں رقاص نسبتاً ایک بہت بھاری کمیت پر جس کو ایک ڈنڈے سے لگایا جاتا ہے مشتمل ہوتا ہے اور ڈنڈا ایک محور کے گرد جو انتصابی سے ایک چھوٹا زاویہ (بہ) بناتا ہے گردش کرنے میں آزاد ہوتا ہے۔ (ملاحظہ ہو دفعہ ۶۷ شکل ۶۲)

۳۸۔ تدویری رقاص۔

ایک چکنے منحنی پر ایک انتصابی مستوی میں جاذبہ کے تحت کسی حرکت کی صورت میں مماس کی سمت میں تحلیل کرنے پر حاصل ہوتا ہے:

$$\frac{\text{ف}^2\text{س}}{\text{فت}^2} = -\text{ج جب سا} \quad \dots\dots\dots\dots (1)$$

(۱۱۱) جہاں افقی کے ساتھ منحنی کا میلان سا سے تعبیر کیا گیا ہے اور قوس س ہے جس کو ہم توازن کے محل سے جہاں سا = ۰ پیمائش شدہ سمجھینگے۔
چھوٹے میلانوں کے لیے ہم

$$\text{جب سا} = \text{سا} = \frac{\text{س}}{\text{غ}} \quad \dots\dots\dots\dots (2)$$

لکھ سکتے ہیں جہاں توازن کے محل پر نصف قطر انحناء غ ہے جس کو مثبت شمار کیا گیا ہے جب کہ تقعر اوپر وار ہو۔ پس ایک چھوٹے اہتزاز میں

$$\frac{\text{ف}^2\text{س}}{\text{فت}^2} = -\frac{\text{ج}}{\text{غ}}\text{س} \quad \dots\dots\dots (3)$$

یہ مساوات وہی ہے جو طول غ کے ایک رقاص کے لیے حاصل ہوئی تھی۔
اگر (۱) میں جب سا صحیح طور پر س کے متناسب ہو اور اس لیے

$$\text{س} = \text{ک جب سا} \quad \dots\dots\dots\dots (4)$$

حاصل ہو تو

$$\frac{\text{ف}^2\text{س}}{\text{فت}^2} + \frac{\text{ج}}{\text{ک}}\text{س} = 0 \quad \dots\dots\dots\dots (5)$$

حاصل ہونا چاہیے۔ اس لیے س کے تغیر ٹھیک طور پر سادہ موسیقی قانون کی متابعت کرینگے اور دور

$$2\pi\sqrt{\frac{\text{ک}}{\text{ج}}} \quad \dots\dots\dots\dots\dots (6)$$

تمام حیطوں کے لیے خواہ وہ چھوٹے ہوں یا بڑے وہی ہوگا۔ ایسی صورت میں اہتزازوں کو "ہم وقت" (Isochronous) کہتے ہیں۔

منحنی کی نوعیت معلوم کرنے کے لیے جس کی ذاتی مساوات شکل (۳ھ) کی ہے ہم محور لا اور ما لیتے ہیں جو علی الترتیب افقی اور انتصابی ہیں اور ما کی مثبت سمت اوپر وار ہے۔ تب

$$\left.\begin{aligned} \frac{\text{فرلا}}{\text{فرسا}} &= \frac{\text{فرلا}}{\text{فرس}}\,\frac{\text{فرس}}{\text{فرسا}} = \text{ک جم}^{2}\,\text{سا} = \frac{1}{2}\,\text{ک}\,(1+\text{جم ۲سا}) \\ \frac{\text{فرما}}{\text{فرسا}} &= \frac{\text{فرما}}{\text{فرس}}\,\frac{\text{فرس}}{\text{فرسا}} = \text{ک جب سا جم سا} = \frac{1}{2}\,\text{ک جب ۲سا} \end{aligned}\right\}\ldots(7)$$

اس لیے سا کے لحاظ سے تکمل کرنے پر

$$\left.\begin{aligned} \text{لا} &= \frac{1}{4}\,\text{ک}\,(\text{۲سا} + \text{جب ۲سا}) \\ \text{ما} &= \frac{1}{4}\,\text{ک}\,(1 - \text{جم ۲سا}) \end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots(8)$$

بشرطیکہ اُن مستقلوں کو جن کو جمع کرنا ہوگا اس طرح مقرر کیا گیا ہو کہ
(۱۱۲) سا = ۰ کے لیے لا = ۰، ما = ۰۔ یہ مساواتیں اُن معمولی ضابطوں پر منطبق ہوتی ہیں جو ایک خطِ تدویر کے لیے ہیں یعنے[1]

$$\text{لا} = \text{ا}\,(\text{طہ} + \text{جب طہ}),\quad \text{ما} = \text{ا}\,(1 - \text{جم طہ}) \ldots\ldots\ldots(9)$$

جہاں ا، لڑھکتے ہوئے دائرہ کا نصف قطر ہے اور طہ وہ زاویہ ہے جس میں سے وہ مرکزی محل سے گھوم چکا ہے۔

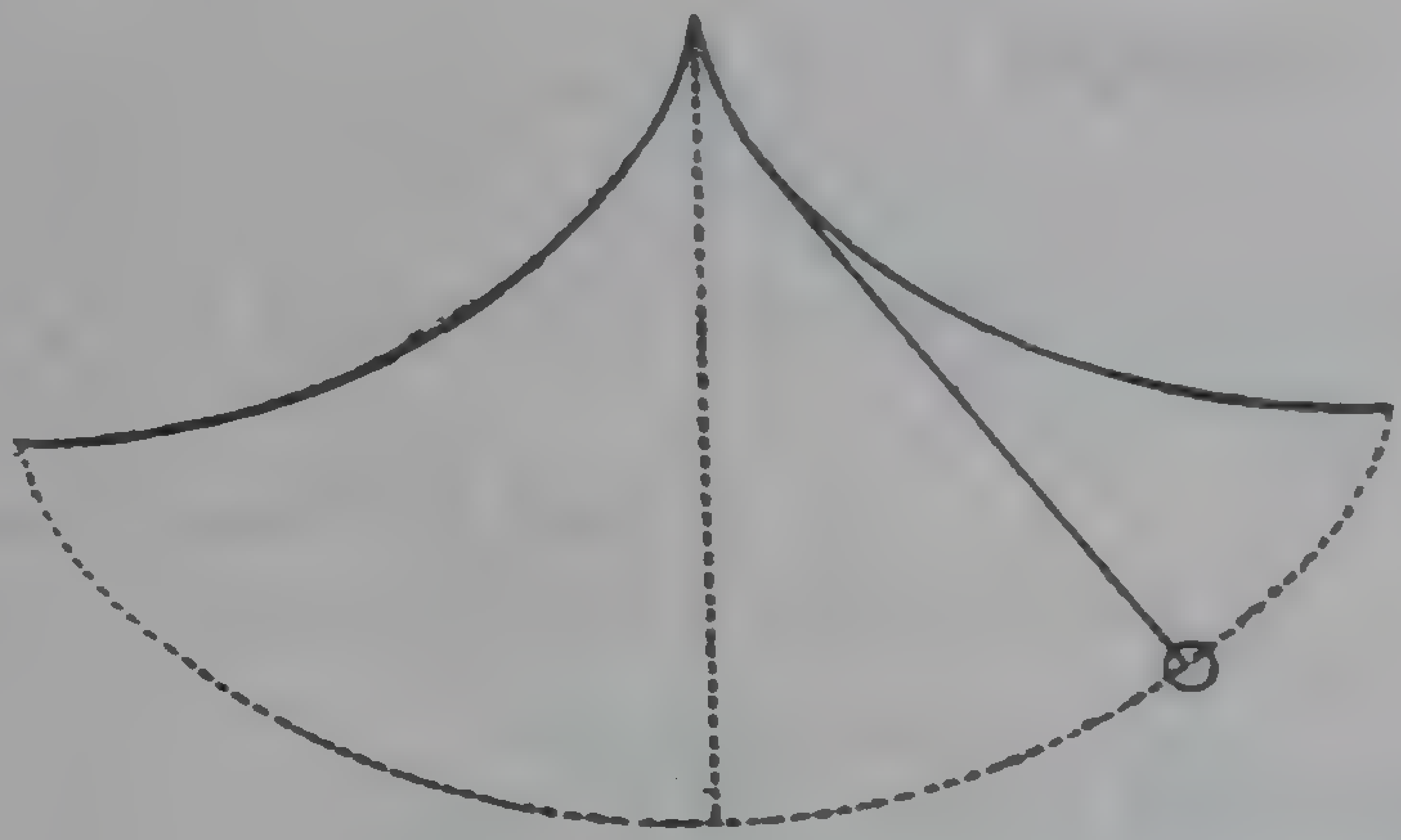
یہ معلوم ہے[2] کہ خطِ تدویر کا بر پیچہ ایک مساوی خطِ تدویر ہوتا ہے جس کے قرن اصلی منحنی کے راسوں کے متناظر ہوتے ہیں اور اس کے بالعکس

---

[1] مصنف کا صغاری احصاء، دفعہ ۱۳۶۔ خط تدویر کی خاصیت کو Christian Huygens (۱۶۲۹ء تا ۱۶۹۵ء) نے منکشف کیا تھا۔ صاحب موصوف رقاص گھڑی کے موجد تھے۔ ان کی خاص حرکیاتی تصنیف "Horologium Oscillatorium پیرس ۱۶۷۳ء" ہے۔

[2] مصنف کا صغاری احصاء، دفعہ ۱۵۹۔

پس ایک رقاص کا لنگر ایک خط تدویر میں صحیح طور پر حرکت کریگا اگر اُس کو مناسب طول کی ڈوری سے لٹکایا گیا ہو جو دو تدویری قوسوں پر جیسا کہ شکل میں دکھایا گیا ہے خود کو لپیٹے۔ معمولی حیطوں کے اہتزازوں کے لیے اِن قوسوں کو قرن کی ہر جانب ایک چھوٹے فاصلہ سے زیادہ پھیلنے کی ضرورت نہیں ہوتی۔



شکل ۳۷

یہ ترکیب ہیجنس (Huygens) کی مجوزہ ہے اور اس سے وہ ذرائع بہم پہنچتے ہیں جن سے ایک گھڑی میں باوجود حیطہ کے تغیرات کے شرح کا استقلال قائم رہتا ہے۔ لیکن بعد میں گھڑی کی ساخت کے مجوزوں نے ایک مختلف ترکیب استعمال کی۔ ان کی کوششیں یہ رہیں کہ چلاؤ قوت کو (جس کا کام یہ ہے کہ توانائی کے نقصانوں کو جو رگڑ اور دوسری مزاحمتوں سے پیدا ہوں پُر کرے) احتیاط سے منضبط کر کے حیطہ کا استقلال حاصل کیا جائے۔

۳۹- چکنے منحنی پر اہتزاز - محدود حیطہ

اب ہم دفعہ ۳۸ کی عام مساوات (۱) کی طرف جو کسی شکل کے چکنے منحنی پر

ایک ذرّہ کے اہتزازوں سے متعلق ہے رجوع ہوتے ہیں۔ کافی چھوٹے حیطوں کے لیے دفعہ ۳۸ کا تقرب (۲) اختیار کیا جا سکتا ہے۔ چونکہ اس سوال میں اُن طریقوں کی اچھی طرح وضاحت ہو جاتی ہے جو حرکیات میں اکثر کارآمد ہیں اس لیے اس کے لیے کچھ حصہ وقف کیا جا سکتا ہے۔

توازن کے محل کی ہموار سطح کے اوپر ذرّہ کا ارتفاع، س کی چھوٹی قیمتوں کے لیے، شکل

$$\text{ما} = \frac{1}{2}\,\text{ب}\,\text{س}^{2} + \frac{1}{6}\,\text{ب}'\,\text{س}^{3} + \frac{1}{24}\,\text{ب}''\,\text{س}^{4} + \cdots \qquad (1)$$

میں بیان کردہ فرض کیا جا سکتا ہے جس میں پھیلاؤ کی پہلی دو رقمیں غائب ہیں کیونکہ س = ۰ کے لیے ما = ۰ اور $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر س}} = 0$۔ سروں کے معنے تفرق سے معلوم ہو سکتے ہیں۔ چنانچہ

$$\text{جب سا} = \text{ب}\,\text{س} + \frac{1}{2}\,\text{ب}'\,\text{س}^{2} + \frac{1}{6}\,\text{ب}''\,\text{س}^{3} + \cdots \qquad (2)$$

$$\text{جم سا}\,\frac{\text{فر سا}}{\text{فر س}} = \text{ب} + \text{ب}'\,\text{س} + \frac{1}{2}\,\text{ب}''\,\text{س}^{2} + \cdots \qquad (3)$$

$$\text{جم سا}\,\frac{\text{فر}^{2}\text{سا}}{\text{فر س}^{2}} - \text{جب سا}\left(\frac{\text{فر سا}}{\text{فر س}}\right)^{2} = \text{ب}' + \text{ب}''\,\text{س} + \cdots \qquad (4)$$

$$\text{جم سا}\,\frac{\text{فر}^{3}\text{سا}}{\text{فر س}^{3}} - 3\,\text{جب سا}\,\frac{\text{فر سا}}{\text{فر س}}\,\frac{\text{فر}^{2}\text{سا}}{\text{فر س}^{2}} - \text{جم سا}\left(\frac{\text{فر سا}}{\text{فر س}}\right)^{3} = \text{ب}'' + \cdots \qquad (5)$$

ان ضابطوں میں سا = ۰، س = ۰ رکھنے سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ ب، مبداء پر کے انحناء (عنہ^{-1}) کو تعبیر کرتا ہے اور

$$\text{ب}' = \frac{\text{فر}(\text{عنہ})^{-1}}{\text{فر س}}\,،\quad \text{ب}'' = \frac{\text{فر}^{2}(\text{عنہ})^{-1}}{\text{فر س}^{2}} - \text{ب}^{3} \qquad (6)$$

جن میں تفرقی سروں کی وہ قیمتیں مُراد ہیں جو مبداء پر حاصل ہوتی ہیں۔

اب حرکت کی مساوات $\left\{\text{دفعہ ۳۸ (۱)}\right\}$ شکل

فز²س / فزت² = - ج (ب س + ½ بَ س² + ⅙ بً س³ + ...) .... (۷)

اختیار کرتی ہے جس کو متواتر تقرب سے حل کرنا ہوگا۔

س² کو نظرانداز کرنے سے حل

س = بہ جم (ن ت + صہ) .... (۸)

حاصل ہوتا ہے بشرطیکہ

ن² = ج ب .... (۹)　۱۱۴)

یہ بلاشبہ ہمارے پچھلے نتیجہ کے مماثل ہے۔

دوسرے تقرب کے لیے ہم مساوات کو شکل

فز²س / فزت² + ن² س = - ½ ج بَ س² = - ½ ج بَ بہ² جم² (ن ت + صہ)

= - ¼ ج بَ بہ² {۱ + جم۲ (ن ت + صہ)} .... (۱۰)

لکھتے ہیں۔ اس میں دوسرے رتبہ کی چھوٹی رقم میں س کی تقریبی قیمت درج کرنے سے جو غلطی داخل ہوئی ہے وہ رتبہ س³ کی ہے۔ (۱۰) کا حل جو پہلے تقرب کے مطابق ہے

س = بہ جم (ن ت + صہ) - ج بَ بہ² / ۴ ن² + ج بَ بہ² / ۱۲ ن² جم۲ (ن ت + صہ) .... (۱۱)

ہے جس کی تصدیق تفرق سے فوراً ہو جاتی ہے۔ اگرچہ حرکت اب صحیح طور پر سادہ موسیقی نہیں ہے لیکن ایک ہی محل میں سے ایک ہی جہت میں گزرنے کے دو متواتر وقتوں کے درمیان وقفہ ۲π / ن تقرب کے اِس رتبہ تک غیر متغیر ہے۔

انتہائی محل علی الترتیب ن ت + صہ = ۰ اور ن ت + صہ = π رکھنے سے حاصل ہوتے ہیں اور اس لیے

س۱ = بہ - ج بَ بہ² / ۶ ن² ، س۲ = - بہ - ج بَ بہ² / ۶ ن² .... (۱۲)

ہیں، اِن کا اوسط حسابی

$$\text{س} = -\frac{\text{ج بَ بہ}^2}{6\,\text{ن}^2} = -\frac{\text{بَ بہ}^2}{6\,\text{ب}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (13)$$

۷-

دفعہ ۳۶ مثال ۲ کی صورت پر اِس تحقیق کا اطلاق کرنے کے لیے ہمیں

$$\text{ب} = \frac{1}{\text{ل}}\text{،}\quad \text{بَ} = -\frac{1}{\text{ل}^2}$$

رکھنا چاہیے جس کو آسانی کے ساتھ ثابت کیا جا سکتا ہے۔ تب ضابطے (۱۲) دفعہ ۳۶ کے ضابطوں (۱۷) کے مطابق ثابت کیے جا سکتے ہیں۔

جب ہم تیسرے تقرب کی ابتدا کرتے ہیں تو ایک نئی بات پیش ہوتی ہے۔ یہ کافی واضح اور اعمال حساب کچھ مختصر ہونگے اگر ہم یہ مان لیں کہ منحنی توازن کے محل کے لحاظ سے متشاکل ہے اور اس لیے بَ = ۰۔ تب حل طلب مساوات

$$\frac{\text{فر}^2\text{س}}{\text{فرت}^2} + \text{ن}^2\text{س} = -\frac{1}{6}\,\text{ج بً س}^3 \quad \ldots\ldots\ldots (14)$$

ہے۔ دوسرے رکن میں س کی قیمت (۸) سے لے کر درج کرنے سے (۱۱۵)

$$\frac{\text{فر}^2\text{س}}{\text{فرت}^2} + \text{ن}^2\text{س} = -\frac{1}{24}\,\text{ج بً بہ}^3 \left\{ 3\,\text{جم}\,(\text{ن ت} + \text{صہ}) + \text{جم}\,3\,(\text{ن ت} + \text{صہ}) \right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (15)$$

اگر ہم اس کو معمولی طریقہ سے تکمل کرتے ہیں تو نتیجہ میں ایک رقم

$$-\frac{\text{ج بً بہ}^3}{16\,\text{ن}}\,\text{ت جب}\,(\text{ن ت} + \text{صہ})$$

ظہور پذیر ہوتی ہے جیسا کہ دفعہ ۱۲ (۱۱) میں۔ اب یہ معلوم ہوتا ہے کہ جزو ضربیات کے مسلسل اضافہ کی وجہ سے جو حل اس طرح حاصل ہوگا وہ جلد یا بدیر اُس مفروضہ کے مطابق نہیں رہیگا جو س کے چھوٹا ہونے کے متعلق اختیار کیا گیا ہے۔ دائری رقاص کی مخصوص صورت سے بلاشبہ اسی کی توقع تھی۔ ہم دیکھ چکے ہیں کہ حیطہ کے ساتھ دَور کے

[illegible]

$$\frac{[illegible]}{[illegible]}$$

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible] (b)

[illegible]

[illegible]

$$[illegible] = [illegible] \left(1 + \frac{[illegible]}{[illegible]}\right) \qquad ([illegible])$$

[illegible]

$$[illegible] = \frac{[illegible]}{1}, \quad [illegible] = -\frac{[illegible]}{1} \qquad ([illegible])$$

[illegible]

اضافہ کی وجہ سے ایسا رقاص اُس رقاص کی بہ نسبت جو مساوی طول کا ہو لیکن جو ایک لاانتہا چھوٹی قوس میں اہتزاز کر رہا ہو زیادہ بے قاعدہ ہوتا جائیگا۔

اِس امر سے یہ واضح ہوتا ہے کہ ہمیں پہلے تقرب کو

$$\text{س} = \text{بہ جم}\,(\text{نہ ت} + \text{صہ}) \quad \cdots\cdots (16)$$

لینا چاہیے جہاں نہ، ن سے قدرے مختلف ہے اور اس اختلاف کی حد معلوم کرنا ہے۔ پس جہاں ن (۱۵) کی بائیں جانب واقع ہوتا ہے اس کی بجائے نہ درج کرنا چاہیے۔ اب اگر ہم

$$\text{س} = \text{بہ جم}\,(\text{نہ ت} + \text{صہ}) + \text{ج جم}\,3\,(\text{نہ ت} + \text{صہ}) \quad \cdots\cdots (17)$$

فرض کریں تو اندراج کرنے پر معلوم ہوگا کہ مساوات جس میں یہ ترمیم کر دی گئی ہو پوری ہوگی اگر

$$(\text{ن}^2 - \text{نہ}^2)\,\text{بہ} = -\tfrac{1}{8}\,\text{ج بً بہ}^3،\quad (\text{ن}^2 - 9\,\text{نہ}^2)\,\text{ج} = -\tfrac{1}{24}\,\text{ج بً بہ}^3 \quad \cdots\cdots (18)$$

یعنے اگر

$$\text{نہ}^2 = \text{ن}^2 + \tfrac{1}{8}\,\text{ج بً بہ}^2 \quad \cdots\cdots (19)$$

اور

$$\text{ج} = \frac{\text{ج بً بہ}^3}{192\,\text{ن}^2} \quad \cdots\cdots (20)$$

تقریباً۔ اول الذکر کو

$$\text{نہ}^2 = \text{ن}^2\left(1 + \frac{\text{بً بہ}^2}{8\,\text{ب}}\right) \quad \cdots\cdots (21)$$

(116) لکھا جا سکتا ہے اور اس لیے تبدیل شدہ دَور تقریباً

$$\text{ت} = \frac{2\pi}{\text{نہ}} = \frac{2\pi}{\text{ن}}\left(1 - \frac{\text{بً بہ}^2}{16\,\text{ب}}\right) \quad \cdots\cdots (22)$$

ہے[1]

[1] اس تحقیقات کو قدرے تبدیلی کے ساتھ لارڈ ریلے کی کتاب "Theory of Sound" (کیمبرج ۱۸۹۴ء) دفعہ ۶۷ سے لیا گیا ہے۔

۴ ۔ نصف قطر ا کا ایک پہیہ زمین پر لڑھک رہا ہے ۔ ثابت کرو کہ ایک نقطہ کے افقی اور انتصابی اسراع جو کور پر زیر ترین نقطہ سے زاوی فاصلہ ط پر ہیں علی الترتیب

$$ا\,(۱ - \text{جم}\,ط)\,\frac{\text{فرسہ}}{\text{فرت}} + ا\,\text{سہ}^{۲}\,\text{جب}\,ط ،$$

اور

$$ا\,\text{جب}\,ط\,\frac{\text{فرسہ}}{\text{فرت}} + ا\,\text{سہ}^{۲}\,\text{جم}\,ط$$

ہیں جہاں سہ زاوی رفتار ہے ۔

۵ ۔ ضابطہ $\frac{و^{۲}}{ع}$ کو جو عمادی اسراع کے لیے ہے ایک مکافی کے راس پر نصف قطر انحناء معلوم کرنے کے لیے استعمال کرو ۔

نیز ناقص کے کسی ایک راس پر نصف قطر انحناء معلوم کرنے کے لیے ۔

۶ ۔ ایک نقطہ ف ایک مستوی پترے کے لحاظ سے ایک منحنی مستقل رفتار (۱۱۷)
و کے ساتھ مرتسم کرتا ہے ۔ اگر پترے کی رفتار ع ہو جو مقدار اور سمت میں مستقل ہے تو ف کے مطلق راستہ کا نصف قطر انحناء

$$غہ\,\frac{(ع^{۲} + ۲\,ع\,و\,\text{جم}\,ط + و^{۲})^{\frac{۳}{۲}}}{(ع\,\text{جم}\,ط + و)\,و^{۲}}$$

ہے جہاں پترے پر نصف قطر انحناء غہ ہے اور ع اور و کی سمتوں کے درمیان زاویہ ط ہے ۔

۷ ۔ ایک سادہ رقاص کو اس طرح چلایا گیا ہے کہ وہ ایک انتصابی مستوی میں کامل گردشیں کرتا ہے ۔ اگر بڑی سے بڑی اور چھوٹی سے چھوٹی زاوی رفتاریں $\text{سہ}_{۱}$، $\text{سہ}_{۲}$ ہوں تو ثابت کرو کہ وہ زاوی رفتار جب کہ رقاص انتصابی سے زاویہ ط بناتا ہے

$$\sqrt{\text{سہ}_{۱}^{۲}\,\text{جم}^{۲}\,\tfrac{۱}{۲}ط + \text{سہ}_{۲}^{۲}\,\text{جب}^{۲}\,\tfrac{۱}{۲}ط}$$

ہے اور ڈوری کا تناؤ

$$ت_۱ جم^۲ \frac{۱}{۲} ط + ت_۲ جب^۲ \frac{۱}{۲} ط$$

ہے جہاں بڑے سے بڑے اور کم سے کم تناؤ ت۱ اور ت۲ ہیں۔

۸ - ایک ذرہ ایک چکنے مکافی پر جس کا محور انتصابی ہے اہتزاز کرتا ہے اور مکافی کے وترخاص کے سروں پر ساکن ہوتا ہے۔ منحنی پر ذرہ کا دباؤ معلوم کرو جب کہ وہ اس کے زیر ترین نقطہ میں سے گزر رہا ہو۔ [۲ م ج]

۹ - ۱۰ پونڈ کی ایک کمیت کو ایک ہلکے ڈنڈے کے سرے پر لگایا گیا ہے اور ڈنڈا دوسرے سرے کے گرد جو ثابت ہے آزادانہ حرکت کر سکتا ہے۔ اس کمیت کو اس کے غیر قائم توازن کے محل سے ابھی متحرک کیا گیا ہے۔ معلوم کرو کہ انتصابی سے کس میلان پر ڈنڈے میں مجموعی دباؤ معدوم ہوتا ہے۔

نیز ڈنڈے میں مجموعی دباؤ یا تناؤ (تجاذبی ناپ میں) معلوم کرو جب کہ (۱) وہ افقی ہو، (۲) وہ اپنے زیر ترین محل میں سے گزر رہا ہو۔

[۴۸° ، ۲۰ پونڈ، ۵۰ پونڈ]

۱۰ - ایک ذرہ ایک چکنے مکافی پر جس کا محور انتصابی اور راس اوپر وار ہے جاذبہ کے تحت حرکت کرنے میں مجبور رہے۔ ثابت کرو کہ منحنی پر دباؤ

$$\frac{م (ع^۲ - ج ل)}{غ}$$

ہے جہاں راس پر کی رفتار ع، نیم وترخاص ل اور نصف قطر انحناء غ ہے۔

۱۱ - اگر ایک ذرہ دی ہوئی قوتوں کے زیر عمل ایک دیے ہوئے منحنی کو آزادانہ مرتسم کرے تو ثابت کرو کہ ایک زنجیر جس کی شکل اس منحنی کی شکل ہو (فی اکائی کمیت) ان ہی قوتوں (لیکن سمت مخالف میں) کے تحت توازن میں ہو سکتی ہے بشرطیکہ زنجیر کی خطی کثافت ذرہ کی رفتار کے بالعکس متناسب ہو۔

ایک مرحلی کی صورت لے کر اس کی توضیح کرو۔

۱۲ - اگر ایک ہوائی (Rocket) کی مزاحمت اور چلاؤ قوت میں ایسا

رشتہ ہو کہ رفتار مستقل ہے تو ثابت کرو کہ راستہ "یکساں طاقت کا زنجیرہ (مقلوب) ہے۔

(۱۱۸) ۱۳- ایک قرص کو ایک انتصابی محور کے گرد یکساں گردش سہ کی حالت میں رکھا گیا ہے۔ قرص کی نچلی سطح کے ایک نقطہ سے جو محور سے فاصلہ ا (> ل) پر ہے طول ل کا ایک سادہ رقاص لٹکایا گیا ہے۔ اگر جب^۲ بہ = ا/ل تو ثابت کرو کہ اضافی توازن میں انتصابی سے رقاص کا میلان طہ مساوات

$$\text{جم طہ} + \text{جب}^3 \text{ بہ مم طہ} = \frac{\text{ج}}{\text{سہ}^2 \text{ ل}}$$

سے حاصل ہوتا ہے۔

اگر سہ^۲ > ج/ل قط^۲ بہ تو ثابت کرو کہ ± ½π کے درمیان اِس مساوات کے تین حل ہیں جن میں سے دو منفی ہیں ایک بہ سے عدداً بڑا اور دوسرا عدداً چھوٹا۔ شکل سے اس کی توضیح کرو۔

۱۴- ایک کمیت م کو ایک ثابت نقطہ و سے طول ل کی ایک ڈوری کے ذریعہ لٹکایا گیا ہے اور کمیت مَ طول لَ کی ایک ڈوری کے ذریعہ کمیت م سے بندھی ہے۔ اگر ڈوریاں ہمیشہ ایک انتصابی مستوی میں جو مستقل زاوئی رفتار سہ سے گردش کرتی ہے واقع ہوں اور انتصابی سے علی الترتیب مستقل زاوئے طہ، طہَ بنائیں تو ثابت کرو کہ حسب ذیل شرطیں پوری ہونی چاہییں:

$$\frac{\text{سہ}^2 \text{ ل}}{\text{ج}} = (\text{۱} + \text{مہ}) \text{ قط طہ} - \text{مہ قم طہ مس طہَ}$$

$$\frac{\text{سہ}^2 \text{ ل}}{\text{ج}} \text{ جب طہ} + \frac{\text{سہ}^2 \text{ لَ}}{\text{ج}} \text{ جب طہَ} = \text{مس طہَ}$$

جہاں مہ = مَ/م

۱۵- وہ صورت لے کر جس میں طہ، طہَ دونوں چھوٹے ہوں ثابت کرو کہ اِس مسئلہ کے دو راست حل ہیں اور یہ کہ سہ^۲ کی متناظر قیمتیں مساوات

$$\text{س}^{4} - (1+\text{م})\,\text{ج}\left(\frac{1}{\text{ل}'}+\frac{1}{\text{ل}}\right)\text{س}^{2} + (1+\text{م})\frac{\text{ج}^{2}}{\text{ل}\,\text{ل}'} = 0$$

سے حاصل ہوتی ہیں۔

مثالیں (۱۰)

(رقاص ۔ خط تدویر)

۱۔ اگر زمین کی گردش کو روک دیا جائے تو کیا ثانیوں کا رقاص جو استواء پر ہو پہلے کی بہ نسبت زیادہ تیز یا زیادہ سست ہو جائیگا؟ اضافہ یا کمی فی یوم کیا ہوگی۔

۲۔ ایک رقاص ثانئے ضرب کرتا ہے جبکہ وہ ایک لا انتہا چھوٹی قوس میں ارتعاش کررہا ہو۔ وہ کتنی ضربیں فی یوم کھودیگا اگر وہ انتصابی کی ہر جانب ۵° کے ایک زاویہ میں سے اہتزاز کرے۔ [۳ ء ۴۱]

۳۔ طول ل کا ایک رقاص ایک انتصابی مستوی میں کامل گردشیں کررہا ہے اور کم سے کم رفتار $\sqrt{2\,\text{ج}\,\text{ل}}$ کے مقابلہ میں بڑی ہے۔ ثابت کرو کہ وہ وقت جو رقاص زیر ترین محل سے زاویہ ط مرتسم کرنے میں لیتا ہے مساوات

$$\text{س}\,\text{ت} = \text{ط} - \frac{\text{ج}}{\text{س}^{2}\,\text{ل}}\,\text{جب}\,\text{ط}$$

سے تقریباً حاصل ہوتا ہے جہاں س وہ زاویئی رفتار ہے جب کہ ڈوری افقی ہے۔

۴۔ اگر ایک سادہ رقاص غیر قائم توازن کے محل پر عین پہنچے تو ثابت کرو کہ (۱۱۹)
زیر ترین نقطہ سے زاویہ ط اور وقت ت حسب ذیل رشتوں میں مربوط ہیں:

$$\text{مس}\,\tfrac{1}{2}\text{ط} = \text{جبز}\,\text{ن}\,\text{ت}\,,\quad \text{جم}\,\tfrac{1}{2}\text{ط} = \text{قطز}\,\text{ن}\,\text{ت}\,,$$

$$\text{جب}\,\tfrac{1}{2}\text{ط} = \text{مسز}\,\text{ن}\,\text{ت}\,,\quad \text{مس}\,\tfrac{1}{4}\text{ط} = \text{مسز}\,\tfrac{1}{2}\,\text{ن}\,\text{ت}$$

جہاں $\text{ن} = \sqrt{\frac{\text{ج}}{\text{ل}}}$

۵ - اگر ایک رقاص جس کے چھوٹے اہتزاز کا دَور ۲ ثانیے ہے ابھی ایک کامل گردش کرے تو ذیریترین محل سے ۹۰° میں سے حرکت کرنے کا وقت معلوم کرو۔
[۲۸ ء ثانیہ]

۶ - ایک سادہ رقاص انتصابی کی ہر جانب زاویہ عہ میں سے اہتزاز کرتا ہے۔ رسم الطریق کی قطبی مساوات معلوم کرو اور صورتوں عہ < $\frac{1}{2}$ π، عہ = $\frac{1}{2}$ π، π > عہ > $\frac{1}{2}$ π میں منحنی کی شکلوں کا خاکہ بناؤ۔

۷ - ایک ذرّہ ایک چکنے خط تدویر پر ایک قرن پر سکون سے ابتداء کرکے، اہتزاز کرتا ہے، خط تدویر کا محور انتصابی اور راس نیچے وار ہے حسب ذیل خواص ثابت کرو:

(۱) مکون دائرہ کی زاویئی رفتار مستقل ہے۔

(۲) رسم الطریق مساوی دائروں کے ایک زوج پر جو ایک دوسرے کو مس کرتے ہیں مشتمل ہے۔

(۳) حاصل اسراع مستقل ہے اور ج کے مساوی ہے اور وہ مکون دائرہ کے نصف قطر کی سمت میں ہے۔

(۴) منحنی پر دباؤ ۲ م ج جم سا ہے جہاں افقی کے ساتھ مماس کا میلان سا ہے۔

۸ - ثابت کرو کہ تدویری رقاص میں رسم الطریق ایک مخروطی کا مقلوب (بلحاظ اس کے مرکز کے) ہے جہاں یہ مخروطی ایک ناقص یا ایک زائد ہے بموجب اس کے کہ اعظم رفتار، $\sqrt{ج ل}$ سے بڑی یا چھوٹی ہو جہاں ل رقاص کا طول ہے۔

۹ - ایک ذرّہ ایک چکنے مقلوب خط تدویر کے راس پر غیر قائم توازن میں ساکن ہے۔ ثابت کرو کہ اگر اس کو قدرے ہٹا دیا جائے تو وہ منحنی کو مکون دائرہ کے مرکز کے ہموار پر چھوڑ دیگا۔

۱۰ - ایک ذرّہ ایک چکنے منحنی پر جاذبہ کے تحت حرکت کر رہا ہے اور اس کی رفتار بلند ترین نقطہ سے فاصلہ (قوس پر پیمایش کردہ) کے متناسب ہے۔ ثابت کرو کہ یہ منحنی ایک خط تدویر ہے۔

۱۱ - ایک ذرہ ایک انتصابی مستوی میں جاذبہ کے تحت ایک چکنا منحنی مرتسم کرتا ہے۔ اگر وہ فاصلہ جو قوس پر وقت ت میں طے ہوتا ہے ا جبز ن ت ہو تو منحنی کی شکل اور ابتدائی حالات معلوم کرو۔

۱۲ - ایک ذرّہ ایک چکنے منحنی پر حیطہ ب کے چھوٹے اہتزاز زیرترین نقطہ کے گرد کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ زیرترین نقطہ سے اُن نقطوں کے فاصلے جہاں سے ذرّہ لوٹتا ہے تقریباً

$$\pm \text{ب} + \frac{\text{ب}^{2}}{\text{٦عہ}}\,\frac{\text{فرعہ}}{\text{فرس}}$$

ہیں جہاں زیرترین نقطہ پر نصف قطر انحنا عہ ہے۔

۱۳ - ایک ذرہ زنجیرہ

س = ا مس سا

کے راس کے گرد اہتزاز کرتا ہے جہاں راس زیرترین نقطہ ہے اور اہتزاز کا حیطہ ب چھوٹا ہے۔ ثابت کرو کہ دَور تقریباً

$$٢\pi\sqrt{\frac{\text{ا}}{\text{ج}}}\times\left(١+\frac{٣\,\text{ب}^{2}}{١٦\,\text{ا}^{2}}\right)$$

ہے۔

۱۴ - مکافی

$$\text{ما} = \frac{\text{لا}^{2}}{٤\,\text{ا}}$$

کے زیرترین نقطہ کے گرد (جہاں محور ما انتصابی ہے) حیطہ ب کے ایک چھوٹے اہتزاز کا دَور تقریباً

$$٢\pi\sqrt{\frac{٢\,\text{ا}}{\text{ج}}}\times\left(١+\frac{\text{ب}^{2}}{١٦\,\text{ا}^{2}}\right)$$

ہوتا ہے۔

(۱۲۱)

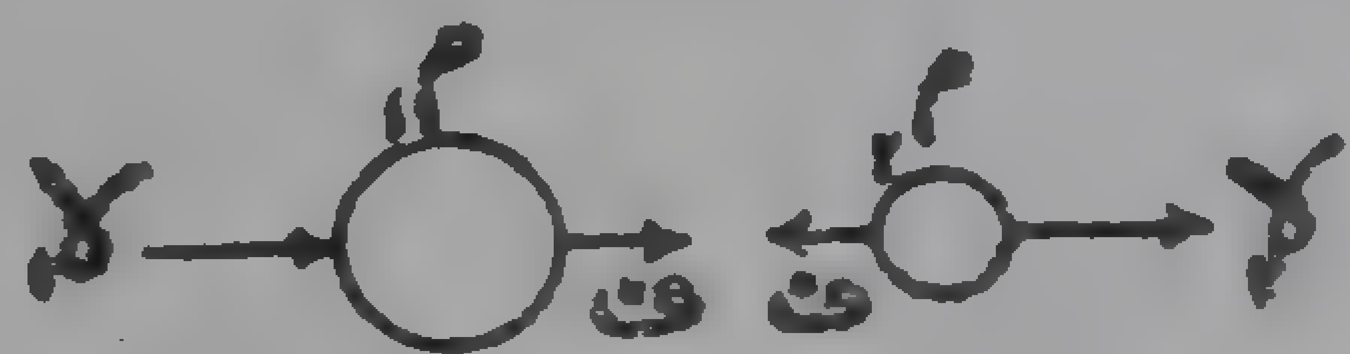
چھٹا باب

ذرّوں کے ایک زوج کی حرکت

۴۰۔ معیارِ حرکت کا تحفظ۔

منفرد ذرّوں کے کسی نظام کے عام نظریہ پر بحث کرنے سے پیشتر مناسب ہوگا کہ ہم اول صرف دو ذرّوں کی صورت پر جداگانہ غور کریں۔ اس سے یہ فائدہ ہوگا کہ ہم متعدد دلچسپ سوالوں کو بغیر کسی پیچیدہ ترقیم کے حل کر سکینگے۔

فرض کرو کہ ہم دو ایسے جسموں کی صورت سے ابتداء کرتے ہیں جو ایک ہی خطِ مستقیم میں حرکت کر رہے ہیں۔ اگر ہم نیوٹن کے تیسرے قانون کی بموجب یہ مان لیں کہ اِن ذرّوں کے درمیان باہمی عمل مساوی اور مخالف ہیں



شکل ۳۸

تو حرکت کی مساواتوں کی شکلیں

$$\text{م}_1 \frac{\text{ذ}^2 \text{ج}_1}{\text{ذ ت}^2} = \text{لا}_1 + \text{ف} ، \quad \text{م}_2 \frac{\text{ذ}^2 \text{ج}_2}{\text{ذ ت}^2} = \text{لا}_2 - \text{ف} \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

ہیں جہاں لا_1 اور لا_2 وہ قوتیں ہیں جو ذرّوں پر نظام کے باہر سے عمل کر رہی ہیں اور قوتیں ± ف باہمی عمل ہیں۔ جمع کرنے سے

$$\frac{\text{فر}}{\text{فرت}}\left(\text{م}_1\text{ع}_1+\text{م}_2\text{ع}_2\right)=\text{لا}_1+\text{لا}_2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (\text{۲})$$

اس سے یہ ثابت ہوتا ہے کہ کُل معیار حرکت $\text{م}_1\text{ع}_1+\text{م}_2\text{ع}_2$ ایک ایسی شرح سے بڑھتا ہے جو کُل **بیرونی** قوت کے مساوی ہے اور اُس پر باہمی عمل کا کوئی اثر نہیں ہے۔

(۱۲۲) اِس نتیجہ کو دوسری شکل میں بیان کیا جاسکتا ہے۔ اگر اِن دو ذرّوں کے محدد لا_1، لا_2 ہوں تو

$$\text{م}_1\text{ع}_1+\text{م}_2\text{ع}_2=\text{م}_1\frac{\text{فر}\,\text{لا}_1}{\text{فرت}}+\text{م}_2\frac{\text{فر}\,\text{لا}_2}{\text{فرت}}=\frac{\text{فر}}{\text{فرت}}\left(\text{م}_1\text{لا}_1+\text{م}_2\text{لا}_2\right)$$

$$=\frac{\text{فر}}{\text{فرت}}\left(\text{م}_1+\text{م}_2\right)\overline{\text{لا}}=\left(\text{م}_1+\text{م}_2\right)\overline{\text{ع}} \quad \cdots\cdots (\text{۳})$$

جہاں علامتیں $\overline{\text{لا}}$ اور $\overline{\text{ع}}$ ٗمرکز کمیت کے محل اور اُس کی رفتار کو تعبیر کرتی ہیں [سکونیات دفعہ ۶۶]۔ اس لیے نظام کا کُل معیار حرکت وہی ہے گویا کہ کُل کمیت، مرکز کمیت پر مجتمع ہے اور اُس کی رفتار اِس نقطہ کی رفتار ہے پس مساوات (۲) کو

$$\left(\text{م}_1+\text{م}_2\right)\frac{\text{فر}\,\overline{\text{ع}}}{\text{فرت}}=\text{لا}_1+\text{لا}_2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (\text{۴})$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اِس سے یہ بیان ہوتا ہے کہ مرکز کمیت ٹھیک اِس طرح حرکت کرتا ہے گویا کہ کُل کمیت وہاں مرتکز ہے اور اُس پر کُل بیرونی قوت عمل کرتی ہے۔ مخصوص صورت میں اگر کوئی بیرونی قوتیں نہ ہوں تو مرکز کمیت کی رفتار مستقل ہوگی۔ اگر وہ ابتداً ساکن ہے تو وہ ساکن رہیگا خواہ ذرّوں کے درمیان باہمی عمل کی نوعیت کچھ ہی ہو۔

اِن نتیجوں کی توسیع آسانی سے کی جاسکتی ہے تاکہ وہ دو یا تین ابعاد میں

حرکت کی صورت پر اطلاق پذیر ہو جاتی ہیں ۔ چنانچہ دو ابعاد کے لیے

$$\left.\begin{aligned} \text{م}_1 \frac{\text{فرع}_1}{\text{فرت}} = \text{لا}_1 + \text{ف} \text{ ، } \text{م}_1 \frac{\text{فرو}_1}{\text{فرت}} = \text{ما}_1 + \text{ق} \\ \text{م}_2 \frac{\text{فرع}_2}{\text{فرت}} = \text{لا}_2 - \text{ف} \text{ ، } \text{م}_2 \frac{\text{فرو}_2}{\text{فرت}} = \text{ما}_2 - \text{ق} \end{aligned}\right\} \text{ .... (۵)}$$

جہاں ذرّوں کی رفتاریں علی الترتیب (ع₁ ، و₁) ، (ع₂ ، و₂) ہیں اور ان پر عمل کرنے والی بیرونی قوتیں (لا₁ ، ما₁) ، (لا₂ ، ما₂) ہیں اور قوتیں (ف ، ق) ، (– ف ، – ق) باہمی عمل کو تعبیر کرتی ہیں ۔

ان مساواتوں سے پچھلے طریقہ کے مطابق مساواتیں

$$(\text{م}_1+\text{م}_2) \frac{\text{فر}\bar{\text{ع}}}{\text{فرت}} = \text{لا}_1 + \text{لا}_2 \text{ ، } (\text{م}_1+\text{م}_2) \frac{\text{فر}\bar{\text{و}}}{\text{فرت}} = \text{ما}_1 + \text{ما}_2 \text{ ...... (۶)}$$

ماخوذ ہوتی ہیں جہاں ($\bar{\text{ع}}$ ، $\bar{\text{و}}$) مرکز کمیت کی رفتار ہے ۔ اس کی تعبیر حسب سابق یہ ہے کہ مرکز کمیت اس طرح حرکت کرتا ہے گویا کہ وہ ایک مادّی ذرّہ ہے جس میں کل کمیت مجتمع ہے اور جو تمام بیرونی قوتوں کے زیر عمل ہے ۔ مثلاً اگر کوئی بیرونی قوتیں نہ ہوں تو مرکز کمیت مستقل رفتار سے ایک خط مستقیم مرتسم کریگا ۔ نیز اگر (۱۲۳
دو ذرّوں کو جو باہم ایک ڈوری سے (امتداد پذیر یا نا امتداد پذیر) ملے ہوئے ہوں کسی طرح جاذبہ کے تحت پھینکا جائے تو ان کا مرکز کمیت ایک مکافی کو مرتسم کریگا ۔

۱۴ ۔ فوری دھکّے ۔ تصادم

ریاضیاتی مقاصد میں وہ قوت جو ایک قلیل عرصہ میں (جو نا قابل قدر ہو) عمل کرکے معیار حرکت میں ایک محدود تبدیلی پیدا کرتی ہے لا انتہا بڑی سمجھی جاتی ہے اور وہ وقت کے جس وقفہ میں عمل کرتی ہے اس کو لا انتہا چھوٹا سمجھا جاتا ہے ۔ اس لیے اس وقفہ میں معمولی محدود قوتوں کے اثر کو نظر انداز کیا جاتا ہے ،

نیز چونکہ رفتار بھی محدود رہتی ہے خواہ وہ تبدیل ہی کیوں نہ ہو اس لیے وقفہ زیر بحث میں محل کی تبدیلی کو بھی نظر انداز کیا جاتا ہے۔ پورا اثر' فوری دھکہ کی قیمت میں جواب قوت کے وقتی تکملہ (دفعہ ۹) کی جگہ خود لیتا ہے جمع ہو جاتا ہے۔

ہم اِن اصولوں کو کُروں کے راست تصادم پر استعمال کر سکتے ہیں۔ فرض کرو کہ کمیتیوں $م_1$ اور $م_2$ کے دو کُرے جو ایک ہی خط مستقیم میں حرکت کر رہے ہیں متصادم ہوتے ہیں چنانچہ ان کی رفتاریں $ع_1$، $ع_2$ سے علی الترتیب $ع'_1$، $ع'_2$ میں دفعتاً بدل جاتی ہیں۔ اب چونکہ اِن دو جسموں پر کُل دھکے' مساوی اور مخالف ہونے چاہئیں اس لیے کُل معیار حرکت میں کوئی تبدیلی نہیں ہے اور اس لیے

$$م_1 ع'_1 + م_2 ع'_2 = م_1 ع_1 + م_2 ع_2 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

کسی دی ہوئی صورت میں تصادم کے نتیجہ کو متعین کرنے کے لیے ایک اور مفروضہ کی ضرورت ہے۔ چنانچہ اگر ہم یہ فرض کر لیں کہ توانائی بالحرکت میں کوئی نقصان واقع نہیں ہوتا تو

$$م_1 ع'^2_1 + م_2 ع'^2_2 = م_1 ع^2_1 + م_2 ع^2_2 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

مساواتوں (۱) اور (۲) کو

$$م_2 (ع'_2 - ع_2) = م_1 (ع_1 - ع'_1)،$$
$$م_2 (ع'^2_2 - ع^2_2) = م_1 (ع^2_1 - ع'^2_1)$$

لکھا جا سکتا ہے۔ اس لیے تقسیم کرنے پر

$$ع'_2 + ع_2 = ع_1 + ع'_1$$

یا

$$ع'_2 - ع'_1 = -(ع_2 - ع_1) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

یعنے ایک کُرہ کی رفتار بلحاظ دوسرے کے سمت میں اُلٹ جاتی ہے لیکن مقدار میں نہیں بدلتی۔ فولاد یا کانچ کے گولوں کی صورت میں یہ تقریباً بالکل ٹھیک معلوم

ہوتا ہے۔

(۱۲۴) لیکن بالعموم توانائی[1] کا کچھ نہ کچھ قابلِ قدر نقصان ہوتا ہے۔ وہ معمولی امتحانی اصول[2] جس کو ایسے سوالوں کے حل کرنے میں اختیار کیا جاتا ہے یہ ہے کہ اضافی رفتار کو الٹ کر ساتھ ہی اُس کو ایک ایسی نسبت صہ میں گھٹا دیا جاتا ہے جو دو معلومہ جسموں کے لیے مستقل ہوتی ہے۔ اس مستقل نسبت کو بعض اوقات "بازگشتگی کی قدر یا سر" کہتے ہیں۔ تب مساوات (۳) کی بجائے مساوات

$$\text{ع}'_{۲} - \text{ع}'_{۱} = -\text{صہ}\,(\text{ع}_{۲} - \text{ع}_{۱}) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (۴)$$

ہوتی ہے۔ اِس مساوات کو مساوات (۱) کے ساتھ ترکیب دیکر $\text{ع}'_{۱}$ اور $\text{ع}'_{۲}$ کو معلوم کیا جاتا ہے جب کہ $\text{ع}_{۱}$ اور $\text{ع}_{۲}$ معلوم ہوں۔

کُروں کے "مائل" (غیر راست) تصادم کی صورت میں ہم اُس خط کے متوازی اور عموددار تحلیل کرتے ہیں جو تصادم کے لمحہ پر کُروں کے مرکزوں کو ملاتا ہے۔ اگر کُرے چکنے ہیں تو اس خط کے عموددار خط میں حرکت غیر متاثر رہتی ہے اور صریحاً

$$\text{و}'_{۱} = \text{و}_{۱} \,،\quad \text{و}'_{۲} = \text{و}_{۲} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (۵)$$

حاصل ہوتے ہیں۔ مرکزوں کے خط میں رفتاریں حسب سابق ضابطوں (۱) اور (۴) کے تحت ہوتی ہیں۔

کسی ثابت روک پر تصادم کی صورت میں نتیجوں کو یہ فرض کرکے اخذ کیا جاسکتا ہے کہ $\text{م}_{۲}$ لاتناہی ہے۔ تب مساوات (۱) سے $\text{ع}'_{۲} = ۰$ ہوجاتا ہے

[1] یعنے "مرئی" حرکت کی توانائی کا۔ یہ توانائی جس کا بظاہر نقصان ہوتا ہے متصادم جسموں میں ارتعاشوں کے پیدا کرنے میں یا دائمی بگاڑ واقع کرنے میں صرف ہوتی ہے اور بالآخر حرارت کی شکل اختیار کرتی ہے۔

[2] نیوٹن نے اِس کو اپنے "حرکت کے کُلیوں" کے Scholium. میں بیان کیا ہے۔

اگر $ع_۲$ = ۰ اور اس لیے مساوات (۴)

$$ع'_۱ = - صہ\, ع_۱ \quad \ldots\ldots\ldots (۶)$$

میں تحویل ہوتی ہے۔

مثال ۱۔ اگر ہم (۱) اور (۴) میں $ع_۲$ = ۰ رکھتے ہیں تو

$$ع'_۲ = \frac{م_۱}{م_۱ + م_۲} (۱ + صہ)\, ع_۱ \quad (۷)$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس لیے اگر ایک جسم ($م_۱$) دوسرے جسم ($م_۲$) سے جو ساکن ہے متصادم ہو تو $م_۲$ کو جو رفتار ایصال ہوگی وہ نسبت $م_۱ : م_۲$ کے بڑے ہونے سے بڑی اور چھوٹے ہونے سے چھوٹی ہوگی لیکن ہمیشہ $م_۱$ کی ابتدائی رفتار کے دُگنے سے کم ہوگی۔

مثال ۲۔ فرض کرو کہ بہت سے ذرّے ایک مستطیلی صندوق کے اندر تمام سمتوں میں حرکت کر رہے ہیں اور صندوق کے کنارے ا، ب، ج محددوں کے محوروں کے متوازی ہیں۔ صندوق کی دیواروں پر اوسط دھکہ فی اکائی وقت اور فی اکائی رقبہ محسوب کرو۔ فرض کرلو کہ بازگشتگی کی قدر (صہ) اکائی ہے۔

سب سے اول ہم یہ مان لینگے کہ ذرّے ایک دوسرے پر خلل انداز نہیں ہوتے۔
ایک واحد ذرّہ م پر غور کرو جو رفتار (ع، و، ط) سے حرکت کر رہا ہے۔ جزو ترکیبی
ع اُن رخوں پر تصادم سے نہیں بدلتا جو لا کے متوازی ہیں لیکن اُن رخوں پر جو لا کے (۱۲۵)
عمودوار ہیں ہر تصادم سے اُس کی سمت اُلٹ جاتی ہے، اِن رخوں کو ہم امتیاز پیدا کرنے کے لیے "سِرے" کہینگے۔ پس ایک سِرے پر کے تصادم وقفوں $\frac{۲ا}{ع}$ سے ایک دوسرے کے بعد واقع ہوتے ہیں۔ پس وقت ت میں ایک سِرے پر کل دھکہ جب کہ اس وقفہ میں بہت سے تصادموں کا واقع ہونا فرض کرلیا گیا ہو

$$\frac{ع\, ت}{۲ ا} \times ۲ م ع = \frac{م ع^۲ ت}{ا}$$

ہوگا اور کل دھکہ فی اکائی رقبہ

$$\frac{م ع^۲ ت}{ا ب ج} \quad \ldots\ldots\ldots (۸)$$

ہوگا۔

اگر ذرّوں کی بہت بڑی تعداد ن ہو اور ذرّے ایک ہی رفتار ق سے لیکن تمام سمتوں میں حرکت کر رہے ہوں تو چونکہ

$$\text{ع}^2 + \text{و}^2 + \text{ط}^2 = \text{ق}^2$$

اس لیے ع^2 کی اوسط قیمت $\frac{1}{3}\text{ق}^2$ ہوگی اور اس لیے جملہ (۸) کی بجائے جملہ

$$\frac{1}{3}\ \frac{\text{ن م ق}^2\text{ت}}{\text{ا ب ج}}$$

ہوگا۔

اگر کمیت م_1 کے ن_1 ذرّے رفتار ق_1 سے حرکت کر رہے ہوں، کمیت م_2 کے ن_2 ذرّے رفتار ق_2 سے حرکت کر رہے ہوں اور علیٰ ہذا تو اوسط دھکہ فی اکائی رقبہ اور فی اکائی وقت

$$\frac{1}{3}\ \frac{\text{م}\ \overline{\text{ق}}^2}{\text{ا ب ج}} \quad \cdots\cdots (۱۰)$$

ہوگا جہاں

$$\text{م} = \text{ن}_1\text{م}_1 + \text{ن}_2\text{م}_2 + \cdots \quad \cdots\cdots (۱۱)$$

$$\overline{\text{ق}}^2 = \frac{\text{ن}_1\text{م}_1\text{ق}_1^2 + \text{ن}_2\text{م}_2\text{ق}_2^2 + \cdots}{\text{ن}_1\text{م}_1 + \text{ن}_2\text{م}_2 + \cdots} \quad \cdots\cdots (۱۲)$$

یعنے ذرّوں کی کُل کمیت م ہے اور اُن کی رفتاروں کا اوسط مربع $\overline{\text{ق}}^2$ ہے۔

اگر ذرّے اتنے کثیر ہوں کہ اُن سے بظاہر ایک مسلسل واسطہ بنے تو $\text{م} = \text{عذ ا ب ج}$ جہاں کثافت عذ ہے اور واسطہ کی وجہ سے دباؤ کی شدت

$$\text{د} = \frac{1}{3}\ \text{عذ}\ \overline{\text{ق}}^2 \quad \cdots\cdots (۱۳)$$

ہے۔

ذرّوں کے درمیان باہمی ٹکر سے اس نتیجہ پر کوئی اثر نہیں پڑتا اگر رفتار کی تبدیلیاں فوری متصور ہوں، کیونکہ ایک ٹکر سے اوسط توانائی بالحرکت متاثر نہیں ہوتی اور وقت کا کوئی نقصان (یا اضافہ) نہیں ہے۔

یہ نتیجہ توانائی بالحرکت کے نظریہ سے گیس کے دباؤ کی اور کلیہ بائل کی تشریح ہے[1]۔
گیسی کُلیوں کے ساتھ اس کا مقابلہ کرنے سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ قَ^{2} کو مطلق تپش کے متناسب فرض کرنا چاہیے [سکونیات دفعہ ۱۱۵]۔
ہوا کے لیے جو ایک کرہ ہوائی کے دباؤ کے تحت اور نقطہ انجماد پر ہو یہ معلوم ہوگا کہ

د = ۷۶ × ۱۳٫۶ × ۹۸۱ ، ث = ۰٫۰۰۱۲۹

قَ = $\sqrt{\text{۳د}/\text{ث}}$ = ۴۸۶ میٹر فی ثانیہ

(۱۲۶) ۴۲۔ توانائی بالحرکت۔

فرض کرو کہ ہم اول خطی حرکت کی صورت لیتے ہیں چنانچہ ہم

لا$_1$ = لاَ + ضا$_1$ ، لا$_2$ = لاَ + ضا$_2$ .... (۱)

لکھ سکتے ہیں جہاں مرکز کمیت کے لحاظ سے دو ذرّوں کے محدد ضا$_1$، ضا$_2$ ہیں۔
اب (سکونیات دفعہ ۶۶)

م$_1$ ضا$_1$ + م$_2$ ضا$_2$ = ۰ .... (۲)

(۱) کا تفرق کرنے پر

ع$_1$ = فرلا$_1$ / فرت = عَ + ضاٗ$_1$ ،
ع$_2$ = فرلا$_2$ / فرت = عَ + ضاٗ$_2$ .... (۳)

اور اس لیے

[1] عمل حساب اصولاً وہی ہے جس کو جول نے استعمال کیا تھا۔

$$\frac{1}{2}\text{م}_1\text{ع}_1^2+\frac{1}{2}\text{م}_2\text{ع}_2^2=\frac{1}{2}\text{م}_1(\bar{\text{ع}}+\text{ضا}_1)^2+\frac{1}{2}\text{م}_2(\bar{\text{ع}}+\text{ضا}_2)^2$$

$$=\frac{1}{2}(\text{م}_1+\text{م}_2)\bar{\text{ع}}^2+\frac{1}{2}\text{م}_1\text{ضا}_1^2+\frac{1}{2}\text{م}_2\text{ضا}_2^2 \quad \ldots\ldots\ldots (۴)$$

کیونکہ (۲) سے $\bar{\text{ع}}(\text{م}_1\text{ضا}_1+\text{م}_2\text{ضا}_2)=\bar{\text{ع}}\frac{\text{فر}}{\text{فرت}}(\text{م}_1\text{ہا}_1+\text{م}_2\text{ہا}_2)=0$

اِس لیے نظام کی توانائی بالحرکت دو حصوں کے مجموعہ کے طور پر بیان ہوئی ہے یعنے (۱) کُل کمیت کی توانائی بالحرکت

$$\frac{1}{2}(\text{م}_1+\text{م}_2)\bar{\text{ع}}^2 \quad \ldots\ldots\ldots (۵)$$

جس کے متعلق (کل کمیت) یہ فرض کیا گیا ہے کہ مرکز کمیت کی رفتار کے ساتھ حرکت کر رہی ہے اور (۲) حصہ

$$\frac{1}{2}\text{م}_1\text{ضا}_1^2+\frac{1}{2}\text{م}_2\text{ضا}_2^2 \quad (۶)$$

جس کے متعلق یہ کہا جا سکتا ہے کہ وہ مرکز کمیت کے لحاظ سے ذرّوں کی حرکت کی توانائی بالحرکت ہے۔ دفعہ ۱۴۰ سے یہ معلوم ہوگا کہ ذرّوں کے درمیان کسی باہمی عمل سے صرف یہ آخری حصہ ہی متاثر ہو سکتا ہے۔

اضافی حرکت کی توانائی بالحرکت کو اِن دو ذرّوں کی ایک دوسرے کے لحاظ سے رفتار کی رقوم میں بیان کیا جا سکتا ہے چنانچہ (۳) سے

$$\left\{\begin{aligned}\text{ضا}_1&=\text{ع}_1-\frac{\text{م}_1\text{ع}_1+\text{م}_2\text{ع}_2}{\text{م}_1+\text{م}_2}=\frac{\text{م}_2(\text{ع}_1-\text{ع}_2)}{\text{م}_1+\text{م}_2}\\ \text{ضا}_2&=\text{ع}_2-\frac{\text{م}_1\text{ع}_1+\text{م}_2\text{ع}_2}{\text{م}_1+\text{م}_2}=\frac{\text{م}_1(\text{ع}_2-\text{ع}_1)}{\text{م}_1+\text{م}_2}\end{aligned}\right. \quad \ldots\ldots (۷)$$

اس لیے $\frac{1}{2}\text{م}_1\text{ضا}_1^2+\frac{1}{2}\text{م}_2\text{ضا}_2^2$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{\text{م}_1\,\text{م}_2}{\text{م}_1+\text{م}_2}\,(\text{ع}_1-\text{ع}_2)^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

(۱۲۷) اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ کُروں کے راست تصادم میں توانائی بالحرکت کا نقصان، دفعہ ۱۴۱ کے تجربی مفروضہ کی رو سے،

$$\frac{1}{2}\,\frac{\text{م}_1\,\text{م}_2}{\text{م}_1+\text{م}_2}\,(1-\text{صہ}^2)\,(\text{ع}_1-\text{ع}_2)^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

ہے۔

اوپر کے نتیجوں کی توضیح دو یا تین بُعدی حرکت کی صورت پر کرنا آسان ہے۔ چنانچہ دو ابعاد میں مرکزِ کمیت کے لحاظ سے حرکت کی توانائی بالحرکت

$$\frac{1}{2}\,\frac{\text{م}_1\,\text{م}_2}{\text{م}_1+\text{م}_2}\left\{(\text{ع}_1-\text{ع}_2)^2+(\text{و}_1-\text{و}_2)^2\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (10)$$

ہے۔ آخری جزو ضربی بلاشبہ ایک ذرّہ کے لحاظ سے دوسرے ذرّہ کی رفتار کا مربع ہے۔

مثال ۱۔ اگر ایک کمیت م_1 دوسری کمیت م_2 سے جو ساکن ہے ٹکرائے اور اور اگر بازگشتگی کی قدر (صہ) صفر ہو تو اِس تصادم میں توانائی کا نقصان بموجب (9)

$$\frac{1}{2}\,\frac{\text{م}_1\,\text{م}_2}{\text{م}_1+\text{م}_2}\,\text{ع}_1^2$$

ہے۔ اس لیے نقصان شدہ توانائی کو جو نسبت ابتدائی توانائی $\frac{1}{2}\text{م}_1\text{ع}_1^2$ کے ساتھ ہے وہ

$$\frac{\text{م}_2}{\text{م}_1+\text{م}_2}$$

ہے۔ اگر م_2 کے مقابلہ میں م_1 بڑا ہو جیسا کہ اُس وقت ہوتا ہے جب کہ ایک میخ کو اس کے سرے پر ایک بھاری وزن سے مار مار کر زمین میں گاڑا جاتا ہے یا جبکہ ایک کیلے کو لکڑی میں ہتھوڑی سے دھنسایا جاتا ہے تو یہ نسبت چھوٹی ہوتی ہے اور تقریباً پوری ابتدائی توانائی کام میں آتی ہے (بعد کی مزاحمت پر غالب آنے میں)۔ لیکن اگر م_2 کے مقابلہ میں

م۱ چھوٹا ہو تو یہ نسبت تقریباً اکائی کے مساوی ہوتی ہے اور توانائی تقریباً پوری کی پوری جسموں میں سے ایک یا دوسرے کی سطح کو بگاڑنے میں صرف ہو جاتی ہے۔

مثال ۲۔ دو ذرّے طول ل کی ایک ناامتداد پذیر ڈوری سے مربوط ہیں اور ایک مستوی میں حرکت کر رہے ہیں۔ اس صورت میں اضافی رفتار سہ أ ہے جہاں سہ ڈوری کی زاویئی رفتار ہے۔ اس لیے جملہ (۱۰)

$$\frac{1}{2}\,\frac{م_1 م_2}{م_1 + م_2}\,سہ^2 أ^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (۱۱)$$

کے مساوی ہے۔

اگر کوئی بیرونی قوتیں نہ ہوں تو اس کو مستقل ہونا چاہیئے اور اس لیے سہ مستقل ہے۔

۴۳۔ توانائی کا تحفظ۔

نظام کی حرکت خواہ کچھ ہی ہو وقت کے کسی وقفہ میں توانائی بالحرکت کا اضافہ بلاشبہ اُس کُل کام کے مساوی ہوگا جو تمام عاملہ قوتیں ذرّوں پر انجام دیتی ہیں۔ اِس کام کے محسوب کرنے میں چکنے ثابت منحنیوں یا سطحوں کے تعامل یا ناامتداد پذیر ڈوریوں یا ڈنڈوں کے تناؤ کے مانند قوتوں کو حساب سے خارج رکھا جا سکتا ہے (سکونیات دفعہ ۵۰)۔

بعض صورتوں میں ہمیں باہمی عملوں سے واسطہ پڑتا ہے جو صرف ذرّوں کے (۱۲۸)
درمیان فاصلہ (ر) کے تفاعل ہوتے ہیں۔ اگر ہم اِس عمل کو فہ (ر) سے تعبیر کریں اور اس کو مثبت شمار کریں جب کہ اس کی نوعیت کشش کی ہو تو وہ کل کام جو اِس سے ذرّوں پر انجام پاتا ہے جب کہ فاصلہ ر سے ر + مف ر میں تبدیل ہو۔ فہ (ر) مف ر ہے اور اس لیے تفاعل

$$قہ = \int_{ا}^{ر} فہ\,(ر)\,فرر \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۱)$$

سے وہ کام تعبیر ہوگا جو بیرونی قوتیں باہمی فاصلہ کو کسی معیاری قیمت ا سے

حقیقی قیمت ر تک تبدیل کرنے میں انجام دینگی جہاں یہ فرض کر لیا گیا ہے کہ تبدیلی کا یہ عمل انتہائی سستی سے تکمیل کو پہنچا ہے ۔ اِس مقدار قہ کو نظام کی "اندرونی توانائی بالقوہ" کہتے ہیں ۔

چونکہ وہ کام جو اندرونی قوتیں کسی حقیقی حرکت میں کرتی ہیں قہ کی تخفیف کے مساوی ہوتا ہے اس لیے ہم یہ دعویٰ کر سکتے ہیں کہ وقت کے کسی وقفہ میں مجموعہ

$$\frac{1}{2} م_1 و_1^2 + \frac{1}{2} م_2 و_2^2 + قہ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (۲)$$

(جہاں ذروں کی کُل رفتاروں کو اب $و_1$، $و_2$ تعبیر کرتے ہیں) میں اُس کام (مثبت یا منفی) کا اضافہ ہوتا ہے جو "بیرونی" قوتیں کرتی ہیں۔ مخصوص صورت میں اگر کوئی بیرونی قوتیں نہ ہوں تو مجموعہ (۲) مستقل رہتا ہے۔

اگر بیرونی قوتوں میں سے کچھ یا تمام قوت کے ایک تحفظی میدان کی وجہ سے ہوں تو اُس کام کو جو یہ قوتیں نظام پر کرتی ہیں توانائی بالقوہ کی تخفیف (بلحاظ میدان کے) سمجھا جا سکتا ہے (دیکھو دفعہ ۳۰)۔

مثال۔ دو ذروں کی صورت میں جو صرف اپنے باہمی تجاذب کے تحت ہوں

$$فہ(ر) = \frac{ج م_1 م_2}{ر^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (۳)$$

حاصل ہوتا ہے جہاں تجاذب کا مستقل ج ہے (دفعہ ۴۷)۔ اس لیے (۱) سے

$$قہ = -\frac{ج م_1 م_2}{ر} + مستقل \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (۴)$$

نیز چونکہ توانائی بالحرکت کا وہ حصہ جو مرکز کمیت کی حرکت کی وجہ سے ہے مستقل ہے اس لیے

$$\frac{1}{2} \frac{م_1 م_2}{م_1 + م_2} و^2 - \frac{ج م_1 م_2}{ر} = مستقل \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (۵)$$

(۱۲۹) جہاں اب وَ اِن دو ذرّوں کی اضافی رفتار کو تعبیر کرتا ہے۔ اس لیے

وَ۲ = ۲ ج (م۱ + م۲) / ر + مستقل .... (۶)

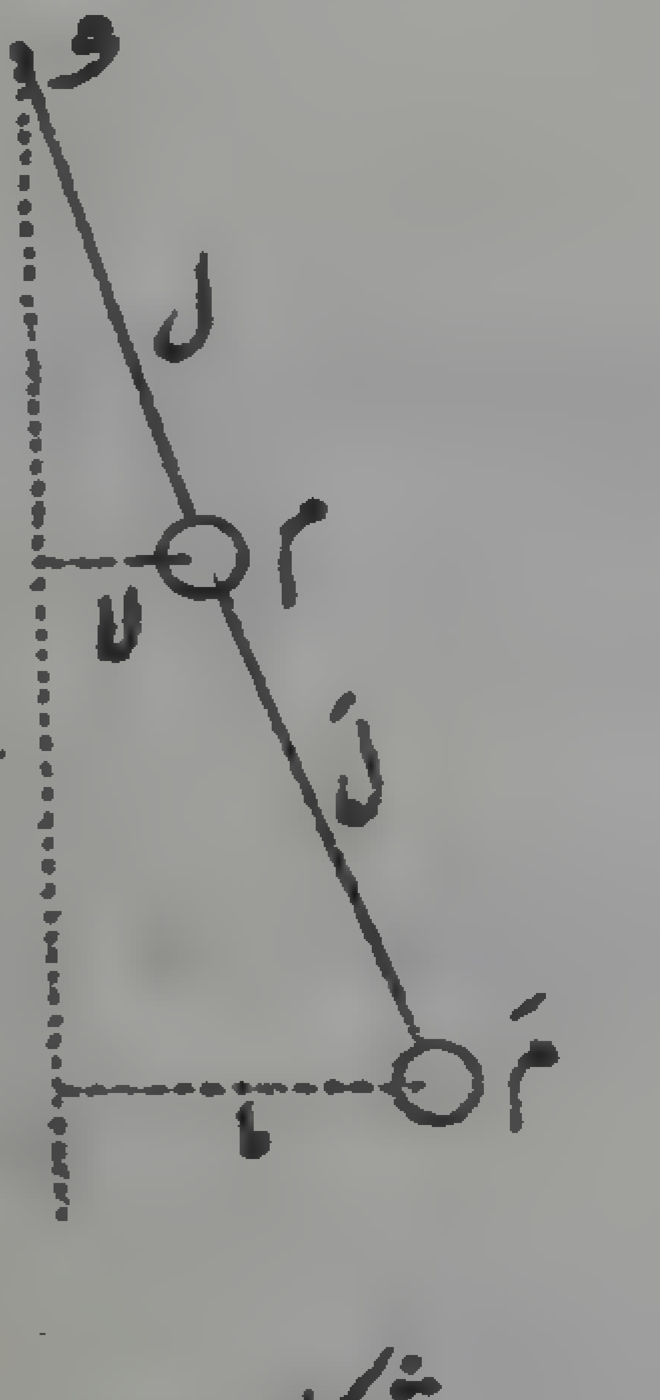
دفعہ ۱۸۔

۴۴۔ توازن کے گرد اہتزاز۔

حسب ذیل مسئلے دو ذرّوں کے ایک نظام کے توازن کی ایک حالت کے گرد چھوٹے اہتزازوں سے متعلق ہیں۔ پہلے مسئلے کو "دوہرے رقاص" کا مسئلہ کہتے ہیں۔

ا۔ ایک کمیت م ایک ثابت نقطہ و سے طول ل کی ایک ڈوری کے ذریعہ لٹکتی ہے اور دوسری کمیت مَ پہلی کمیت م سے طول لَ کی ڈوری کے ذریعہ لٹکتی ہے۔ حرکت صرف ایک انتصابی مستوی میں مقید فرض کی گئی ہے۔

فرض کرو کہ و میں سے گزرنے والے انتصابی سے م اور مَ کے افقی ہٹاؤ لا، ما سے تعبیر کیے گئے ہیں۔ اگر ڈوریوں کے میلانوں کو چھوٹا فرض کیا جائے تو تناؤں کی سکونیاتی قیمتیں تقریباً (م + مَ) ج اور مَ ج ہونگی، اس کی وجہ دفعہ ۱۱ میں بیان ہو چکی ہے۔ اس لیے حرکت کی مساواتیں



شکل ۳۹

م فر۲لا/فرت۲ = ـ (م + مَ) ج لا/ل + مَ ج (ما ـ لا)/لَ

مَ فر۲ما/فرت۲ = ـ مَ ج (ما ـ لا)/لَ .... (۱)

اِن کو حل کرنے کے لیے اول ہم اس کی تحقیق کرتے ہیں کہ آیا اہتزاز کا کوئی ایسا طریقہ ممکن ہے جس میں ہر ذرّہ ایک ہی دور کا سادہ موسیقی ارتعاش کرے اور ہیئتیں

منطبق ہوں - چنانچہ ہم آزمایش کے طور پر فرض کرتے ہیں کہ

لا = ا جم (ن ت + صہ) ، ما = ب جم (ن ت + صہ) .... (۲)

(۱) میں درج کرنے پر ہم دیکھتے ہیں کہ جیوب التمام تقسیم کرنے پر خارج ہو جاتی ہیں اور مساواتیں پوری ہوتی ہیں بشرطیکہ

{ن۲ - ج(۱+مہ)/ل - مہ ج/لَ} ا + مہ ج/لَ ب = ۰ ....(۳)

ج/لَ ا + (ن۲ - ج/لَ) ب = ۰

جہاں مہ = مَ/م -

۱۲۰ نسبت ا/ب کو ساقط کیا جائے تو

ن۴ - (۱+مہ) ج (۱/ل + ۱/لَ) ن۲ + (۱+مہ) ج۲/ل لَ = ۰ ..... (۴)

جو ن۲ میں ایک دو درجی ہے - اب چونکہ دائیں جانب کا جملہ مثبت ہے جب کہ ن۲ = ∞ ، منفی ہے جبکہ ن۲ = ج/ل یا ج/لَ ، اور مثبت ہے جب کہ ن۲ = ۰.
اس لیے اِس دو درجی کی اصلیں حقیقی اور مثبت ہیں اور نیز ان میں سے ایک، مقدار ج/ل اور ج/لَ میں سے جو بڑی ہے اس سے بڑی ہے اور دوسری، اِن مقداروں میں سے جو چھوٹی ہے اُس سے چھوٹی ہے - ہم اِن اصلوں کو علی الترتیب ن۱۲ اور ن۲۲ سے تعبیر کرینگے -

اِس طرح ہمیں نمونہ (۲) کے دو جداگانہ حل حاصل ہو چکے جن میں سے ہر صورت میں نسبت ا/ب کو مساواتوں (۳) میں سے ایک سے ن۲ کی تقریبی قیمت درج کرکے متعین کیا گیا ہے -

چونکہ مساواتیں (۱) خطی ہیں اس لیے یہ حل انطباق پذیر ہیں اور ہمیں

$$\left.\begin{array}{l} لا = ا_1 \text{ جم } (ن_1 ت + صہ_1) + ا_2 \text{ جم } (ن_2 ت + صہ_2) \\ \text{اور} \quad ما = ب_1 \text{ جم } (ن_1 ت + صہ_1) + ب_2 \text{ جم } (ن_2 ت + صہ_2) \end{array}\right\} \quad \cdots\cdots (۵)$$

حاصل ہوتے ہیں جو رشتوں

$$\frac{ب_1}{ا_1} = -\frac{ج}{ن_1^2 لَ - ج} \text{ ، } \frac{ب_2}{ا_2} = \frac{ج}{ج - ن_2^2 لَ} \quad \cdots\cdots (۶)$$

کے تحت ہیں۔

مستقلوں $ا_1$، $ا_2$، $صہ_1$، $صہ_2$ کو اختیاری سمجھا جا سکتا ہے چنانچہ لا، ما، لاَ، ماَ کی قیمتوں کے متعلق اُن سے کوئی مقررہ شرطیں پوری کرائی جا سکتی ہیں۔ اس لیے اوپر کا حل مکمل ہے۔

حرکت کے وہ نمونے جو دو جزئی حلوں سے تعبیر ہوتے ہیں ارتعاش کے "طبعی اسلوب" کہلاتے ہیں اگر ان کو الگ الگ لیا جائے۔ اِن کے دَور $\frac{۲\pi}{ن_1}$ ، $\frac{۲\pi}{ن_2}$ نظام کی ترکیب سے مقرر کیے جاتے ہیں اور حیطے اور ہیئتیں ابتدائی شرطوں پر منحصر ہوتی ہیں۔ ہر اسلوب میں دو ذرّے ایک دوسرے کے ساتھ ہم قدم ہو کر حرکت کرتے ہیں لیکن یہ یاد رہے کہ ایک اسلوب میں لا اور ما کی علامت وہی ہے اور دوسرے میں علامتیں مختلف ہیں۔ یہ (۶) سے مستنبط ہوتا ہے۔

اس مسئلہ کی بعض خاص صورتیں اہم ہیں۔ اگر نسبت مہ $(= \frac{مَ}{م})$ چھوٹی ہو تو (۴) کی اصلیں تقریباً $\frac{ج}{ل}$ اور $\frac{ج}{لَ}$ ہیں۔ ان میں سے اول الذکر کے طبعی اسلوب میں اوپر کی کمیت م تقریباً طول ل کے ایک سادہ رقاص کے لنگر کی مانند اہتزاز کرتی ہے اور اس پر چھوٹے ذرّہ کا اثر صرف قدرے ہوتا ہے لیکن دوسرا ذرّہ بہت کچھ ایک ایسے رقاص کے لنگر کی مانند اہتزاز کرتا ہے (۱۳۱) جس کا طول لَ اور نقطۂ تعلیق دَور $\left(۲\pi\sqrt{\frac{ل}{ج}}\right)$ کا ایک قسری اہتزاز رکھتا ہو۔ واقعہ یہ ہے کہ (۶) سے

$$\frac{ما}{لا} = \frac{ل}{ل - لَ} \quad \cdots\cdots (۷)$$

حاصل ہوتا ہے جو دفعہ ۱۴۳ کے مطابق ہے۔ دوسرے طبعی "اسلوب" میں (جس کے لیے $\text{ن}_2^2 = \frac{\text{ج}}{\text{لَ}}$ تقریباً) نسبت $\frac{\text{ا}}{\text{ما}}$ چھوٹی ہے چنانچہ اوپر کی کمیت مقابلۃً ساکن ہے لیکن نیچے کی کمیت بہت کچھ طول لَ کے ایک سادہ رقاص کے لنگر کے مانند اہتزاز کرتی ہے۔

اس کے برخلاف اگر اوپر کے ذرہ کی کمیت نچلے ذرہ کی کمیت کے مقابلہ میں چھوٹی ہو اور اس لیے مہ بڑا ہو تو (۴) سے تقریباً۔

$$\left.\begin{aligned} \text{ن}_1^2 + \text{ن}_2^2 &= \text{مہ ج}\left(\frac{1}{\text{ل}} + \frac{1}{\text{لَ}}\right) \\ \text{ن}_1^2\,\text{ن}_2^2 &= \frac{\text{مہ ج}^2}{\text{ل لَ}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (\text{۸})$$

حاصل ہوتا ہے چنانچہ اصلیں تقریباً

$$\text{مہ ج}\left(\frac{1}{\text{ل}} + \frac{1}{\text{لَ}}\right) \text{ اور } \frac{\text{ج}}{\text{ل} + \text{لَ}} \quad \ldots\ldots\ldots (\text{۹})$$

ہیں۔ پہلی اصل سے

$$\frac{\text{ما}}{\text{لا}} = -\frac{\text{ل}}{\text{مہ}\,(\text{ل} + \text{لَ})} \text{ تقریباً} \quad \ldots\ldots\ldots (\text{۱۰})$$

نچلی کمیت تقریباً ساکن ہے اور اوپر کی کمیت ایک ایسے ذرہ کی مانند مرتعش ہے جو طول ل + لَ کی ایک ڈوری سے بندھا ہوا ہو اور ڈوری ثابت نقطوں کے درمیان تناؤ مَ ج سے تنی ہوئی ہو۔ دیکھو دفعہ ۱۰ مثال ۳۔ دوسرے "اسلوب" میں

$$\frac{\text{ما}}{\text{لا}} = \frac{\text{ل} + \text{لَ}}{\text{ل}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\text{۱۱})$$

جس سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ دونوں کمیتیں تقریباً ہمیشہ ایک خط مستقیم میں رہتی ہیں جو نقطۂ تعلیق میں سے گزرتا ہے اور اب مَ طول ل + لَ کے ایک رقاص کے لنگر کی مانند اہتزاز کرتا ہے۔

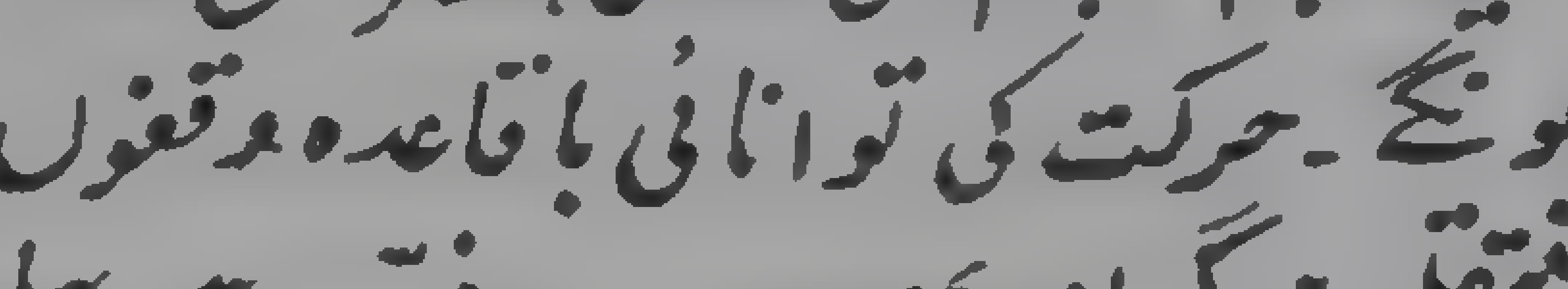
ہم دیکھ چکے ہیں کہ یہ دو ذرّے کبھی بھی ٹھیک طور پر مساوی نہیں ہو سکتے
لیکن (۴)

$$(ن_1 - ن_2)^2 = (1 + مہ)\, ج^2 \left\{ \left(\frac{1}{ل} - \frac{1}{ل'}\right)^2 + مہ \left(\frac{1}{ل} + \frac{1}{ل'}\right)^2 \right\}$$

(۱۲) ......

کی اصلوں کے فرق کے مربع پر غور کیا جائے تو ہم دیکھتے ہیں کہ وہ تقریباً مساوی ہونگے اگر ل' ل کے تقریباً مساوی ہو اور ساتھ ہی نسبت مہ یعنے $\frac{م'}{م}$ بھی (۱۳۲)
چھوٹی ہو ۔ اب چونکہ ہر ذرّہ کی حرکت تقریباً مساوی دَور کے دو انطباق شدہ سادہ موسیقی ارتعاشوں سے بنی ہے اس لیے وہ ' جیسا کہ دفعہ ۲۴ میں سمجھایا جا چکا ہے ' عملاً ایک ایسے ارتعاش کے معادل ہے جس کا دور تقریباً مستقل ہے لیکن حیطہ چھوٹا بڑا ہوتا ہے ۔ نیز اگر ابتدائی شرطیں ایسی ہوں کہ حیطے $ا_1$ ' $ا_2$ اور اس لیے $ب_1$ ' $ب_2$ بھی مساوی ہوں (مطلق مقداریں) تو تقریبی سکون کے وقفے ہونگے ۔ حرکت کی توانائی باقاعدہ وقفوں پر ایک ذرّہ سے دوسرے ذرّہ پر منتقل ہوگی اور پھر دوسرے ذرّہ سے پہلے ذرّہ پر واپس ہوگی' بلا شبہ م' کا حیطہ زیادہ بڑا ہوگا ۔ یہ تجربہ آسانی سے کیا جا سکتا ہے اور بہت موثر ہے ۔

۲ ۔ طول ۲ (ا + ب) کی ایک تنی ہوئی ڈوری کے سِروں سے مساوی فاصلوں ا پر دو مساوی ذرّے م متشاکلاً بندھے ہوئے ہیں ۔
اگر ان دو ذرّوں کے چھوٹے جانبی ہٹاؤ لا' لا سے تعبیر ہوں دفعہ ۱۰ مثال ۳ میں بیان شدہ اصولوں کی رو سے



شکل ۶۰

$$\left.\begin{aligned} \text{م}\,\frac{\text{فر}^{2}\,\text{لا}}{\text{فرت}^{2}} &= -\text{ف}\,\frac{\text{لا}}{\text{و}} + \text{ف}\,\frac{\text{ما}-\text{لا}}{2\,\text{ب}} \\ \text{م}\,\frac{\text{فر}^{2}\,\text{ما}}{\text{فرت}^{2}} &= -\text{ف}\,\frac{\text{ما}}{\text{و}} - \text{ف}\,\frac{\text{ما}-\text{لا}}{2\,\text{ب}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (۱۳)$$

جہاں ف تناؤ ہے۔

آزمایشی حل۔

$$\text{لا} = \text{ا}\ \text{جم}\,(\text{ن}\,\text{ت} + \text{صہ})،\quad \text{ما} = \text{ب}\ \text{جم}\,(\text{ن}\,\text{ت} + \text{صہ}) \quad \ldots (۱۴)$$

فرض کرنے سے یہ معلوم ہوگا کہ

$$\left.\begin{aligned} \left(\text{ن}^{2} - \frac{\text{ف}}{\text{م}}\,\frac{\text{ا}+2\text{ب}}{2\,\text{ا}\,\text{ب}}\right)\text{ا} + \frac{\text{ف}}{2\,\text{م}\,\text{ب}}\,\text{ب} &= 0 \\ \frac{\text{ف}}{2\,\text{م}\,\text{ب}}\,\text{ا} + \left(\text{ن}^{2} - \frac{\text{ف}}{\text{م}}\,\frac{\text{ا}+2\text{ب}}{2\,\text{ا}\,\text{ب}}\right)\text{ب} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots (۱۵)$$

پس نسبت $\frac{\text{ا}}{\text{ب}}$ ساقط کرنے پر

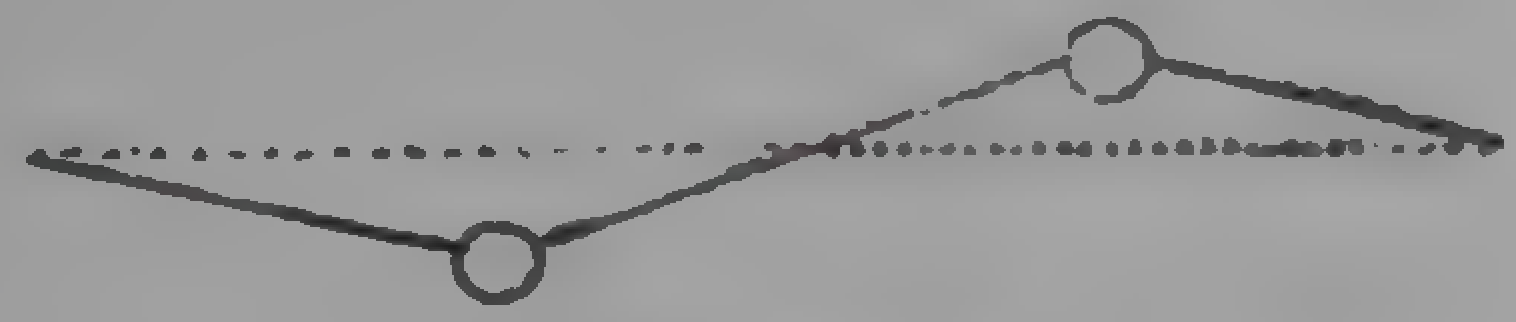
$$\text{ن}^{2} - \frac{\text{ف}}{\text{م}}\,\frac{\text{ا}+2\text{ب}}{2\,\text{ا}\,\text{ب}} = \pm\,\frac{\text{ف}}{2\,\text{م}\,\text{ب}} \quad \ldots\ldots (۱۶)$$

(۱۳۴) یا دو اصلوں کو ن_{1}^{2} اور ن_{2}^{2} سے تعبیر کرنے سے

$$\text{ن}_{1}^{2} = \frac{\text{ف}}{\text{م}}\,\frac{\text{ا}+\text{ب}}{\text{ا}\,\text{ب}}،\quad \text{ن}_{2}^{2} = \frac{\text{ف}}{\text{م}\,\text{ا}} \quad \ldots\ldots (۱۷)$$

پس مکمل حل نمونہ (۵) کا ہے۔

(۱۷) کی پہلی اصل کے متناظر جو طبعی اسلوب ہے اُس میں (۱۵) کی رو سے ا = - ب، اس لیے ایک جھول کے سرے پر ذرّوں کی جو تشکیل ہوگی وہ شکل ۴۱ کے مطابق ہوگی۔ دوسرے اسلوب میں تشکیل شکل ۴۲ کے مطابق ہوگی۔



شکل ۴۱



شکل ۴۲

اس مسئلہ میں ذرّوں کی ترتیب میں تشاکل کی وجہ سے قبل از قبل یہ دیکھنا آسان ہے کہ ارتعاش کے وہ دو غیر تابع اسلوب جو اوپر بیان کیے گیے ہیں ممکن ہیں اور اس لیے تناظر دَور بہت آسانی سے الگ الگ معلوم کیے جا سکتے ہیں۔

پچھلے نتیجے ایک عام اصول کی مخصوص صورتیں ہیں۔ اس اصول کو ہم بیان کرتے ہیں لیکن اس کا مکمل ثبوت ہماری حدود سے باہر ہے[1]۔ کسی تحفظی حرکیاتی نظام میں جس کو قائم توازن کی حالت سے قدرے (خفیف طور پر) ہٹا دیا گیا ہو حاصل شدہ حرکت کے متعلق یہ سمجھا جا سکتا ہے کہ وہ، ارتعاش کے غیر تابع طبعی اسلوبوں کے ایک سلسلہ کے انطباق سے بنی ہوئی ہے۔ اگر ان میں سے صرف ایک اسلوب چلایا جائے تو نظام کے ہر ذرّہ کی حرکت سادہ موسیقی ہوگی اور مختلف ذرّے ایک دوسرے کی ہم آہنگی میں متحرک ہونگے اور ایک ساتھ اپنے توازن کے محلوں میں سے گزرینگے۔ ایسے اسلوبوں کی تعداد نظام کی آزادی کے درجوں کی تعداد کے مساوی ہوتی ہے اور ان کے دَور بالکل نظام کی ساخت (ترکیب) پر منحصر ہوتے ہیں۔ اس کے برعکس ان کے متعلقہ حیطے اور

[1] لیکن آزادی کے دو درجے رکھنے والے نظام کی صورت پر تیرھویں باب میں عام طریقہ سے بحث کی گئی ہے۔

ہئیتیں اختیاری ہوتی ہیں اور ابتدائی خلل کی نوعیت پر منحصر ہوتی ہیں۔

(۱۲۴)

مثالیں (۱۱)

۱۔ ۵ پونڈ کی ایک کمیت، ۱۰ پونڈ کی ایک کمیت پر جو ساکن ہے رفتار ۱۲ فٹ فی ثانیہ سے راست طور پر ٹکراتی ہے اور ۱ فٹ فی ثانیہ کی رفتار سے بازگشت کرتی ہے۔ تصادم میں توانائی کا جو نقصان ہوا اس کو (فٹ پونڈ میں) معلوم کرو۔

[۴ء۵۷]

۲۔ ۳ ٹن کا ایک وزن ۶ فٹ انتصابی فاصلہ میں سے گِر کر ایک میخ کو جس کا وزن ۱۰ ہنڈرویٹ ہے زمین میں ایک انچ گاڑتا ہے۔ زمین کی مزاحمت معلوم کرو۔ نیز وہ وقت معلوم کرو جو میخ کی حرکت میں صرف ہوتا ہے۔

[۱۸۵ ٹن، ۰۱ء ثانیہ]

۳۔ کمیت ھ کی ایک توپ، کمیت م کے ایک گولے کو افقاً پھینکتی ہے اور دھماکہ کی توانائی اتنی ہے کہ وہ گولے کو انتصاباً اوپر وار ارتفاع ھ تک پھینکنے کے لیے کافی ہوتی۔ وہ رفتار معلوم کرو جس سے توپ بازگشت کرنا شروع کریگی۔ نیز وہ فاصلہ معلوم کرو جس میں سے وہ پیچھے ہٹیگی اگر اس کے وزن کی $\frac{1}{ن}$ ویں قوت یکساں طور پر مزاحم ہو۔

$$\left[\sqrt{\left(\frac{م^2}{ھ(ھ+م)} \times ۲ج ھ\right)}\ ,\ \frac{م^2}{ھ(ھ+م)} \times ن ھ\right]$$

۴۔ کمیت م کے دو ذرّے ایک ہلکی ڈوری کے سِروں سے بندھے ہوئے ہیں اور ڈوری دو چکنی کھونٹیوں پر جن کے درمیان فاصلہ ۲ ا ہے اور جو ایک افقی خط میں ہیں سہارا لیکر لٹکی ہوئی ہے۔ ایک ذرہ مَ کو اِن کھونٹیوں کے درمیان وسطی نقطہ پر باندھا گیا ہے معلوم کرو کہ کمیت مَ ساکن ہونے سے پہلے کتنا نیچے

اُتریگی؟

$$\left[\frac{\text{۴ م مَ ل}}{\text{۴ م}^{۲} - \text{مَ}^{۲}}\right]$$

۵۔ دو ذرّے $\text{م}_{۱}$، $\text{م}_{۲}$ ایک ڈوری کے سروں سے جو ایک چرخی پر سے گزرتی ہے بندھے ہوئے ہیں جیسا کہ ایٹوڈ کی مشین میں ہوتا ہے۔ اگر چرخی کے جمود کو نظرانداز کر دیا جائے تو ثابت کرو کہ ذرّوں کے مرکز کمیت کا نیچے وار اسراع

$$\left(\frac{\text{م}_{۱} - \text{م}_{۲}}{\text{م}_{۱} + \text{م}_{۲}}\right)^{۲} \times \text{ج}$$

ہے۔

۶۔ ایک کمیت ھ ایک بہت لمبی ڈوری سے لٹکتی ہے اور اس سے کمیت م اور طول ل کا ایک سادہ رقاص لٹکایا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ ھ کے لحاظ سے م کے اہتزاز کا دور اس سے کم ہے جو اس صورت میں ہوتا جب ھ نسبت

$$۱ : \sqrt{۱ + \frac{\text{م}}{\text{ھ}}}$$

میں مقسور کیا جاتا ہے۔

۷۔ اگر دفعہ ۴۴ کے دوہرے رقاص میں انتصابی کے ساتھ ڈوریوں ل، لَ کے میلان علی الترتیب طہ، طہَ ہوں تو ثابت کرو کہ

$$(\text{م}+\text{مَ})\,\text{ل}^{۲}\left(\frac{\text{فرطہ}}{\text{فرت}}\right)^{۲} + ۲\,\text{مَ ل لَ}\,\frac{\text{فرطہ}}{\text{فرت}}\,\frac{\text{فرطہَ}}{\text{فرت}}\,\text{جم}(\text{طہ} - \text{طہَ})$$

$$+\,\text{مَ لَ}^{۲}\left(\frac{\text{فرطہَ}}{\text{فرت}}\right)^{۲} = ۲(\text{م}+\text{مَ})\,\text{ج ل جم طہ} + ۲\,\text{مَ ج لَ جم طہَ} + \text{چ}$$

۸۔ دفعہ ۴۴ کی ترقیم میں ثابت کرو کہ چھوٹے ہٹاؤں کے لیے دوہرے رقاص کی توانائی بالقوہ

$$\frac{۱}{۲}\,\frac{(\text{م}+\text{مَ})\,\text{ج لا}^{۲}}{\text{ل}} + \frac{۱}{۲}\,\frac{\text{مَ ج}\,(\text{ما} - \text{لا})^{۲}}{\text{لَ}}$$

ہے۔

۹ - اگر دفعہ ۴۴ کے دوہرے رقاص میں نسبت مہ چھوٹی ہو تو ثابت کرو کہ دو طبعی اسلوبوں کے تعدد

$$\text{ن}_1^2 = \frac{\text{ج}}{\text{ل}}\left(1 + \frac{\text{مہ ل}'}{\text{ل}' - \text{ل}}\right)، \quad \text{ن}_2^2 = \frac{\text{ج}}{\text{ل}'}\left(1 + \frac{\text{مہ ل}}{\text{ل}' - \text{ل}}\right)$$

سے تقریباً متعین ہو جاتے ہیں اِلّا آنکہ ل اور ل′ تقریباً مساوی ہوں

۱۰ - اگر گزشتہ مثال میں ڈوریوں کے طول مساوی ہوں تو ثابت کرو کہ تعدد

$$\text{ن}^2 = \left(1 \pm \sqrt{\text{مہ}}\right)\frac{\text{ج}}{\text{ل}}$$

سے تقریباً حاصل ہوتے ہیں۔

۱۱ - ایک تنی ہوئی ڈوری کے سِرے ثابت ہیں اور اس کے دو نقطوں ف_1، ف_2 پر دو ذرّے جن کی کمیتیں م_1، م_2 ہیں باندھے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ جانبی ارتعاش کے دو طبعی حیثیتوں کے دَور $\left(\frac{2\pi}{\text{ن}}\right)$، مساوات

$$\text{ن}^4 - \left\{\frac{\text{ت}}{\text{م}_1}\left(\frac{1}{\text{ا}_1} + \frac{1}{\text{ا}_2}\right) + \frac{\text{ت}}{\text{م}_2}\left(\frac{1}{\text{ا}_2} + \frac{1}{\text{ا}_3}\right)\right\}\text{ن}^2$$

$$+ \frac{\text{ت}^2}{\text{م}_1\text{م}_2}\left(\frac{1}{\text{ا}_2\text{ا}_3} + \frac{1}{\text{ا}_1\text{ا}_2} + \frac{1}{\text{ا}_3\text{ا}_1}\right) = 0$$

سے حاصل ہوتے ہیں جہاں تناؤ ت ہے اور $\text{ا}_1 = \text{ا ف}_1$، $\text{ا}_2 = \text{ف}_1\text{ف}_2$، $\text{ا}_3 = \text{ف}_2\text{ب}$

۱۲ - ثابت کرو کہ تنی ہوئی ڈوری کے مسئلہ میں جس میں ڈوری سے دو ذرّے بندھے ہوئے ہوں (دفعہ ۴۴) توانائی بالقوہ

$$\frac{1}{2}\text{ف}\left\{\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}} + \frac{(\text{لا} - \text{ما})^2}{\text{۲ب}} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ا}}\right\}$$

ہے۔

ثابت کرو کہ ایک ارتعاش کی کل توانائی

$$\text{ف}\left(\frac{\text{ا}_1^2}{\text{ا}} + \frac{(\text{ا}+\text{ب})\,\text{ا}_2^2}{\text{اب}}\right)$$

ہے جہاں $ا_۱$ اور $ا_۲$ کے وہی معنی ہیں جو دفعہ ۱۴۴ (۱۴) میں دیئے گئے ہیں۔

۱۳- تین ذرّوں کو جن میں سے ہر ایک کی کمیت م ہے طول ۴ ل کی ایک تنی ہوئی ڈوری سے اس کے ایک سرے سے فاصلوں ل، ۲ ل، ۳ ل پر باندھا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ عرضی (جانبی) ارتعاش کے تین طبعی اسلوب ہیں اور ان کے تعددوں کے مربع نسبتیں

$$۲-\sqrt{۲} : ۲ : ۲+\sqrt{۲}$$

ہیں۔

شکلیں کھینچ کر متعلقہ حیثیتوں کا طرز دکھاؤ۔

۱۴- کمیت م ایک ثابت نقطے سے ایک مرغولی پیچ کے ذریعہ اس طرح لٹک رہی ہے کہ ایک چھوٹے انتصابی ارتعاش کا دَور $\frac{۲\pi}{ف}$ ہے۔ اگر دوسری کمیت مَ کو م سے ایک دوسرے پیچ کے ذریعہ اس طرح لٹکایا جائے کہ مَ کے ایک چھوٹے انتصابی ارتعاش کا دور جب کہ م کو ثابت پکڑا گیا ہو $\frac{۲\pi}{فَ}$ ہو تو ثابت کرو کہ جب دونوں کمیتیں آزاد ہوں تو نظام کے انتصابی ارتعاش کے طبعی اسلوبوں کے دَور $\left(\frac{۲\pi}{ن}\right)$ مساوات

$$ن^۴ - \left\{ف^۲ + \left(۱ + \frac{مَ}{م}\right) فَ^۲\right\} ن^۲ + ف^۲ فَ^۲ = ۰$$

سے حاصل ہوتے ہیں۔

(۱۳ ۱۵- ۳ اور ۵ پونڈ کی دو کمیتیں ایک ۶ فٹ لمبی ڈوری کے ذریعہ متعلق ہیں۔ پہلی کمیت کو ثابت رکھ کر دوسری کو ڈوری کے علی القوائم رفتار ۱۰ فٹ فی ثانیہ سے پھینکا گیا۔ پونڈوں میں تناؤ معلوم کرو۔

اگر اب پہلی کمیت کو چھوڑ دیا جائے تو حرکت مابعد کی نوعیت کیا ہے اور تبدیل شدہ تناؤ کیا ہے۔ (بیرونی قوتوں کو نظر انداز کرو)

[۲٫۶۰ پونڈ، ٫۹۷۶ پونڈ]

۱۶- دو ذرّے م اور مَ، طول ل کی ایک ڈوری سے مربوط ہیں۔ پہلی کمیت ایک چکنی سیدھی نالی میں حرکت کرنے میں آزاد ہے اور دوسری کمیت کو

نالی کے عمود وار رفتار $و$ سے پھینکا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ ذرہ م فصل $\frac{2ل م'}{م+م'}$ میں سے اہتزاز کریگا اور یہ کہ اگر نسبت $\frac{م'}{م}$ چھوٹی ہو تو ایک اہتزاز کا دور تقریباً

$$\frac{2\pi ل}{و}\left(1-\frac{1}{4}\,\frac{م'}{م}\right)$$

ہوگا۔

۱۷۔ دو تجاذبی مادے $م_1$ اور $م_2$ ایک دوسرے سے فاصلہ $ر$ پر ساکن ہیں۔ ان کی رفتاریں معلوم کرو جب کہ اس فاصلہ کو $ر'$ تک گھٹا دیا جائے۔

$$\left[ع_1^2=\frac{2ج م_2^2}{م_1+م_2}\left(\frac{1}{ر'}-\frac{1}{ر}\right)،\quad ع_2^2=\frac{2ج م_1^2}{م_1+م_2}\left(\frac{1}{ر'}-\frac{1}{ر}\right)\right]$$

ساتواں باب (۱۳۷)

ذرّوں کے نظام کا علم حرکت

۴۵۔ خطی اور زاویئی معیار حرکت

جب منفرد ذرّوں کے کسی نظام سے بحث کرنا ہو تو اس کی ابتداء دفعہ ۴۰ کے مانند اِس طرح کی جاسکتی ہے کہ ہر ذرّہ کی حرکت کی مساواتیں جداگانہ حاصل کی جائیں جن میں باہمی عملوں اور قوتوں کا لحاظ رکھنا چاہیے جو نظام پر باہر سے عمل کرتی ہیں۔ اِن مساواتوں میں اندرونی قوت کا ہر جزو ترکیبی دوبار مختلف علامتوں کے ساتھ واقع ہوگا یعنے اُن دو ذرّوں کی حرکت کی مساواتوں میں جن کے درمیان زیر بحث قوت عمل کرتی ہے۔

اگر نظام بے رگڑ قیود کے تحت ہو تو ہر صورت میں ایک ہندسی رشتہ ملیگا اور اس سے وہ نامعلوم تعامل متعین ہو سکیگا جو متعلقہ قید کی وجہ سے وقوع پذیر ہوتا ہے۔ مثلاً اگر ذرّوں میں سے ایک، ایک چکنی سطح پر پڑی رہنے کے لیے مجبور ہو تو سطح کی مساوات حاصل ہوگی۔

ایسے مسئلوں کا کامل حل بالعموم مشکل ہوتا ہے۔ مثلاً طبیعی علم ہیئت کا وہ اساسی مسئلہ یعنے "تین جسموں کا مسئلہ" جو تین باہم متجاذب ذرّوں (جیسے سورج، زمین اور چاند) کی حرکتوں کو متعین کرنے کے لیے ہے صرف

تقرب کے دقیق اور دیدہ ریز طریقوں سے حل ہو سکتا ہے۔

تاہم دو عام نتیجے ہیں جو درست رہتے ہیں خواہ نظام میں باہمی عملوں کی نوعیت کچھ ہی ہو۔ ان کو بیان کرنے سے پہلے ایک یا دو خالص حرکیاتی مسئلوں کو مقدمہ کے طور پر پیش کرنا سہولت بخش ہوگا کیونکہ اس سے محولہ بالا نتیجوں کو بیان کرنے میں آسانی ہوگی۔

نظام کے مختلف ذرّوں کے معیار حرکت صریحاً مقامی سمیتوں (سکونیات دفعہ ۱۸) کا ایک سلسلہ بناتے ہیں اور یہ سمتی، تحلیل کرنے اور معیار لینے میں، اُن ہی قاعدوں کے تحت استعمال کیے جا سکتے ہیں جو سکونیات میں قوتوں کے لیے ہیں۔ مثلاً دو ابعادی صورت میں اُن کی بجائے ایک (۱۳۸)
"خطی معیار حرکت" (جو کسی مقررہ نقطہ و میں سے کھنچے ہوئے خط سے تعبیر کیا گیا ہو) اور ایک "زاوئی معیار حرکت" (جو و کے لحاظ سے مختلف ذرّوں کے معیار حرکتوں کے معیاروں کا مجموعہ ہو) کو رکھا جا سکتا ہے۔ یہ مستوی سکونیات کی "حاصل قوت" اور "جفت" کے متناظر ہیں۔

خطی معیار حرکت مختلف ذرّوں کے معیار حرکتوں کا صرف ہندسی مجموعہ ہوتا ہے اور اس لیے نقطہ و کے محل پر منحصر نہیں ہوتا۔ اگر ایک ذرہ م کے محدد (لا، ما، ی) ہوں تو خطی معیار حرکت کے اجزائے ترکیبی

Σ (م لاَ)، Σ (م ماَ)، Σ (م یَ) ....(۱)

ہیں جہاں اعمال جمع میں نظام کے تمام ذرّے شامل ہیں۔

یہ خطی معیار حرکت (دفعہ ۴۰ کی مخصوص صورت کے مطابق) وہی ہوتا ہے گویا کہ کل کمیت نظام کے مرکز کمیت پر مرتکز ہے اور اس کو اس نقطہ کی رفتار حاصل ہے۔ کیونکہ اگر وقت مف ت میں ذرہ م۱ ف۱ سے فَ۱ تک ہٹے ذرہ م۲، ف۲ سے فَ۲ تک ہٹے وغیرہ تو (سکونیات ۶۴)

Σ (م × ف فَ) = Σ (م) × گ گَ ....(۲)

جہاں مرکز کمیت کا ہٹاؤ گ گَ ہے۔ اس لیے پیمانوی مقدار مف ت سے تقسیم کرنے پر

$$\Sigma\left(\text{م} \times \frac{\widetilde{\text{ف ف}}}{\text{مف ت}}\right) = \Sigma(\text{م}) \times \frac{\widetilde{\text{گ گ}}}{\text{مف ت}} \quad \ldots\ldots\ldots (\text{۳})$$

انتہا میں سمتی م × $\frac{\widetilde{\text{ف ف}}}{\text{مف ت}}$ ایک ذرّہ م کا معیارِ حرکت ہے اور سمتی $\Sigma(\text{م}) \times \frac{\widetilde{\text{گ گ}}}{\text{مف ت}}$ ایک کمیت Σ (م) کا معیارِ حرکت ہے جس کو مرکز کمیت گ کے ساتھ حرکت کرتا ہوا فرض کیا گیا ہے پس مسئلہ ثابت ہو چکا۔

تحلیلی طور پر

$$\Sigma\left(\text{م}\ \frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}}\right) = \frac{\text{فر}}{\text{فرت}}\ \Sigma(\text{م لا}) = \frac{\text{فر}}{\text{فرت}} \left\{\Sigma(\text{م})\ \overline{\text{لا}}\right\}$$

$$= \Sigma(\text{م}) \times \frac{\text{فر}\overline{\text{لا}}}{\text{فرت}} \quad \ldots\ldots (\text{۴})$$

اور اسی طرح دیگر اجزائے ترکیبی کے لیے۔

سمتی تحلیل کی مختصر ترقیم میں اگر کسی مبدا کے لحاظ سے ایک ذرہ م کا ”محل سمتی“ رَ ہو اور مرکز کمیت کے لحاظ سے اس کا ”محل سمتی“ عہَ ہو اور اس لیے

$$\text{رَ} = \widetilde{\overline{\text{رَ}} + \text{عہَ}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (\text{۵})$$

جہاں $\overline{\text{رَ}}$ مرکز کمیت کے حوالے سے ہے تو [سکونیات دفعہ ۶۴] ۱۳۹

$$\Sigma(\text{م عہَ}) = \text{۰} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (\text{۶})$$

اور $$\Sigma(\text{م رَ}) = \Sigma(\text{م}) \times \overline{\text{رَ}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (\text{۷})$$

پس ت کے لحاظ سے تفرق کرنے پر

$$\Sigma(\text{م وَ}) = \Sigma(\text{م}) \times \overline{\text{وَ}} \quad (\text{۸})$$

جہاں وَ (= رَ) م کی رفتار ہے اور $\overline{\text{وَ}}$ $\left(= \frac{\text{فر}\overline{\text{رَ}}}{\text{فرت}}\right)$ مرکز کمیت کی رفتار ہے۔

زاویئی معیارِ حرکت سے متعلق بعض حرکیاتی مسئلوں کو فی الحال ملتوی

کیاجاتا ہے (دیکھو دفعہ ۶۱، ۶۲)۔

۶۴۔ توانائی بالحرکت۔

اگر ایک ثابت مبداء و سے سمتی وط، وط، .... کھنچے جائیں جو ذرّوں م، م، ...... کی رفتاروں کو کسی معلومہ پیمانہ پر تعبیر کرتے ہوں اور اگر سمتی

$$وگ = \frac{ع(م \times وط)}{ع(م)} \quad \ldots\ldots\ldots (۱)$$

کو بنایا جائے تو اِس سے مرکز کمیت کی رفتار تعبیر ہوگی۔ یہ فی الحقیقت پچھلے دفعہ کے مسئلہ کو ایک مختلف شکل میں بیان کیا گیا ہے۔ یہ ظاہر ہے [سکونیات ۶۴] کہ گ اِس امدادی نقشہ میں جس کا تصور کیا گیا ہے ذرّوں م، م، ...... کے نظام کے مرکز کمیت پر منطبق ہوگا جب کہ یہ ذرّے علی الترتیب ط، ط، ...... پر واقع ہوں۔

اِس خاصیت سے نظام کی توانائی بالحرکت کے متعلق بعض اہم مسئلے حاصل ہوتے ہیں۔ لگرانج کے "پہلے مسئلہ" (سکونیات دفعہ ۷۴) سے

$$\frac{۱}{۲} ع (م \times وط^۲) = \frac{۱}{۲} ع (م) \times وگ^۲ + \frac{۱}{۲} ع (م \times گ ط^۲)$$

$$\ldots\ldots\ldots (۲)$$

یعنے نظام کی توانائی بالحرکت، کُل کمیت کی توانائی بالحرکت (جب کہ اِس کُل کمیت کو مرکز کمیت گ پر مرتکز اور اس نقطہ کی رفتار کے مساوی رفتار سے حرکت کرتا ہوا فرض کیا گیا ہو) اور گ کے لحاظ سے حرکت کی توانائی بالحرکت کے مجموعہ کے مساوی ہوتی ہے۔ اِس آخری جزو کو نظام کی "اندرونی توانائی بالحرکت" کہا جا سکتا ہے۔

اِس مسئلہ کی ایک مخصوص صورت دفعہ ۴۲ میں بیان کی گئی ہے اور

جو ثبوت وہاں دیا گیا ہے اس کی بڑی آسانی سے تعمیم ہو سکتی ہے۔ چنانچہ قائم محددوں کو استعمال کرنے اور

$$\text{لا} = \bar{\text{لا}} + \text{ضا}،\quad \text{ما} = \bar{\text{ما}} + \text{عا}،\quad \text{ی} = \bar{\text{ی}} + \text{طا} \qquad \ldots\ldots (۳)$$

(۱۴۰) لکھنے سے جہاں $\bar{\text{لا}}$، $\bar{\text{ما}}$، $\bar{\text{ی}}$ مرکز کمیت کے لحاظ سے ہیں حاصل ہوتا ہے

$$\tfrac{1}{2}\Sigma\, \text{م}\,(\dot{\text{لا}}^2 + \dot{\text{ما}}^2 + \dot{\text{ی}}^2) = \tfrac{1}{2}\Sigma\, \text{م}\Big\{\Big(\frac{\text{فر}\bar{\text{لا}}}{\text{فرت}} + \dot{\text{ضا}}\Big)^2 + \Big(\frac{\text{فر}\bar{\text{ما}}}{\text{فرت}} + \dot{\text{عا}}\Big)^2 + \Big(\frac{\text{فر}\bar{\text{ی}}}{\text{فرت}} + \dot{\text{طا}}\Big)^2\Big\}$$

$$= \tfrac{1}{2}\Sigma(\text{م}) \times \Big\{\Big(\frac{\text{فر}\bar{\text{لا}}}{\text{فرت}}\Big)^2 + \Big(\frac{\text{فر}\bar{\text{ما}}}{\text{فرت}}\Big)^2 + \Big(\frac{\text{فر}\bar{\text{ی}}}{\text{فرت}}\Big)^2\Big\} + \tfrac{1}{2}\Sigma\, \text{م}\,(\dot{\text{ضا}}^2 + \dot{\text{عا}}^2 + \dot{\text{طا}}^2) \qquad \ldots\ldots (۴)$$

کیونکہ

$$\Sigma\Big(\text{م}\,\dot{\text{ضا}}\,\frac{\text{فر}\bar{\text{لا}}}{\text{فرت}}\Big) = \frac{\text{فر}\bar{\text{لا}}}{\text{فرت}}\,\Sigma(\text{م}\,\dot{\text{ضا}})$$

$$= \frac{\text{فر}\bar{\text{لا}}}{\text{فرت}}\,\frac{\text{فر}}{\text{فرت}}\,(\Sigma\,\text{م ضا}) = ۰ \qquad \ldots\ldots (۵)$$

وغیرہ۔

لگرانج کے دوسرے مسئلہ (سکونیات دفعہ ۴۷) کے مشابہ ایک دلچسپ مسئلہ[۱]

$$\tfrac{1}{2}\Sigma\,(\text{م} \times \text{ک}\,\dot{\text{ط}}^2) = \frac{\tfrac{1}{2}\Sigma\,(\text{م}\,\text{م}' \times \text{ط}\,\dot{\text{ط}}'^2)}{\Sigma\,(\text{م})} \qquad \ldots\ldots (۶)$$

ہے جہاں شمار کنندہ میں عمل جمع میں ذرّوں کا ہر ایک زوج صرف ایک مرتبہ لیا گیا ہے۔ اس ضابطہ سے نظام کی اندرونی توانائی بالحرکت ذرّوں کے مختلف زوجوں کی کمیتوں اور اضافی رفتاروں کی رقوم میں حاصل ہوتی ہے۔[۱]

[۱] یہ مسئلہ اور اس کے ثبوت کا طریقہ لے۔ الیف۔ موبیس کا مجوزہ ہے۔ Mechanik des Himmels, 1843.

دو ذرّوں کی مخصوص صورت کے لیے اس مسئلہ کا ثبوت دفعہ ۴۲ میں دیا جا چکا ہے۔

اگر دفعہ ۴۵ کی سمتی تحلیل کو جاری رکھ کر

ف = غنْ .... (۷)

لکھا جائے یعنے اگر مرکزِ کمیت کے لحاظ سے ایک ذرّہ م کی رفتار فَ ہو تو

½ Σ (م وَ²) = ½ Σ م (وَ + ف)²

= ½ Σ (م) × وَ² + ½ Σ (م فَ²)

(۸) ....

کیونکہ

Σ (م وَ فَ) = وَ Σ (م فَ) = وَ Σ (م غنْ) = ۰ .... (۹)

حسبِ دفعہ ۴۵ (۶) ـــ اب چونکہ ایک سمتی کا پیمانوی مربع، سمتی کی مطلق مقدار کے مربع کے مساوی ہوتا ہے اس لیے ضابطہ (۸)، (۲) کے مماثل ہے۔

نیز، ہم سکونیات دفعہ ۴۷ (۱۲) میں بیان شدہ صورت کے ٹھیک مطابق یہ ثابت کر سکتے ہیں کہ

½ Σ (م فَ²) = ½ Σ م مَ (ف - فَ)² / Σ (م)

جو (۶) کے مطابق ہے۔

۴۷۔ خطی معیارِ حرکت کا اصول۔ (۱۴۱)

اب ہم اُن دو حرکیاتی مسئلوں کی طرف رجوع ہوتے ہیں جن کا حوالہ دفعہ ۴۵ میں دیا گیا تھا۔

اِن میں سے پہلے کو "خطی معیار حرکت کا اصول" کہتے ہیں۔ اگر نظام پر کوئی بیرونی قوتیں نہ ہوں تو کل خطی معیار حرکت یعنے مختلف ذرّوں کے معیارِ حرکتوں کا سمتی مجموعہ ہر لحاظ سے مستقل ہوتا ہے۔ اس کے لیے کسی دو ذرّوں ف، ق پر غور کرو اور فرض کرو کہ ان کے درمیان باہمی عمل ع ہے جس کو مثبت شمار کیا جائیگا جب کہ عمل تجاذبی ہو۔ صغیر وقت مف ت میں ف، سمت ف ق میں ایک دھکہ ع مف ت حاصل کریگا اور ق، سمت ق ف میں ایک مساوی اور مخالف دھکہ حاصل کریگا۔ یہ دھکے علی الترتیب سمتوں ف ق، ق ف میں مساوی اور مخالف معیار حرکت پیدا کرتے ہیں اور اس لیے نظام کے معیار حرکتوں کے ہندسی مجموعہ میں کوئی تغیر واقع نہیں ہوتا۔ اسی طرح ذرّوں کے کسی دیگر زوج کے لیے۔

اب چونکہ کل معیار حرکت وہی ہوتا ہے جو کل کمیت کا ہے جب کہ اس کل کمیت کو مرکز کمیت کی رفتار کے ساتھ حرکت کرتا ہوا فرض کیا گیا ہو اس لیے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ مرکز کمیت مستقل رفتار کے ساتھ ایک خط مستقیم مرتسم کرتا ہے۔ مثالاً نظام شمسی کا مرکز کمیت اسی طرح حرکت کرتا ہے، اس حد تک یہ نظام بیرونی عمل سے آزاد ہے۔

اگر نظام پر بیرونی قوتیں عمل کر رہی ہوں تو وقت مف ت میں کل معیار حرکت اِن بیرونی قوتوں کے دھکوں کے مجموعہ کو (ہندسی طور پر) جمع کرنے پر حاصل ہوگا۔ اس لیے مرکز کمیت ٹھیک اِس طرح حرکت کریگا گویا کہ کل کمیت وہاں مرتکز ہے اور بیرونی قوتیں اُس پر عمل کرتی ہیں جہاں یہ فرض کر لیا گیا ہے کہ یہ قوتیں اپنی اصلی سمتوں کے متوازی عمل کرتی ہیں۔ چنانچہ ذرّوں کے کسی ایسے نظام کی صورت میں جو معمولی جاذبہ کے تحت ہو اور باہمی عمل خواہ کچھ ہی ہوں مرکز کمیت ایک مکافی کو مرتسم کریگا۔

۴۸۔ زاویئی معیار حرکت کا اصول۔

دوسرے مسئلہ کو "زاویئی معیار حرکت کا اصول" کہتے ہیں۔

اگر کوئی بیرونی قوتیں نہ ہوں تو کُل زاویٔ معیار حرکت یعنے کسی ثابت محور کے لحاظ سے مختلف ذرّوں کے معیار حرکتوں کے معیاروں کا مجموعہ مستقل ہوتا (۱۴۲)
ہے۔ کیونکہ وقت ھف ت میں کسی دو ذرّوں ف، ق کے درمیان باہمی عمل خط ف ق میں مساوی اور مخالف معیار حرکت پیدا کریگا اور زیر بحث محور کے گرد ان کے معیار مساوی اور مخالف ہونگے۔

اگر بیرونی قوتیں عمل کر رہی ہوں تو ثابت محور کے گرد کُل زاویٔ معیار حرکت میں اِس محور کے گرد بیرونی دھکوں کے معیاروں کے مجموعہ کا اضافہ ہوتا ہے۔
اس مسئلے پر مزید معلومات نویں باب کے دفعہ ۶۱ اور ۶۲ میں ملینگے۔

مثال ۔ اُس ذرّہ کی صورت میں جو صرف ایسی قوت کے تحت ہو جس کی سمت ہمیشہ ایک ثابت نقطہ و میں سے گزرتی ہے اس نقطہ کے گرد (یعنے ایسے محور کے گرد جو اس نقطہ میں سے گزرے اور حرکت کے مستوی پر عمود ہو) زاویٔ معیار حرکت مستقل ہوگا۔ اگر ذرّہ کی کمیت م، رفتار ﻭ، اور اس کے راستہ کے مماس پر و سے عمود ع ہو تو یہ زاویٔ معیار حرکت م ﻭ ع ہے۔ اس لیے ﻭ، ع کے بالعکس متناسب ہوگا۔

۱؎ ایک مقامی سمتی کے معیار کی تعریف جہاں یہ معیار ایک محور کے گرد جو کسی مستوی پر جس میں سمتی واقع ہے عمود ہو قبل ازیں کی جا چکی ہے (سکونیات دفعہ ۲۰)۔ اب خواہ کوئی محور ہو اس کے گرد معیار حرکت معلوم کرنے کے لیے ہم سمتی کو دو علی القوائم اجزائے ترکیبی میں تحلیل کرتے ہیں جن میں سے ایک زیر بحث محور کے متوازی ہوتا ہے اور دوسرا، ایک ایسے مستوی میں جو اس پر عمود ہو۔ اِس آخری جزو ترکیبی کا معیار مطلوبہ معیار ہے۔ اس کی علامت کے متعلق کوئی نہ کوئی قرارداد ضروری ہے۔
یہ آسانی سے مستنبط ہوتا ہے کہ دو متقاطع مقامی سمتیوں کے معیاروں کا مجموعہ جہاں معیار کسی محور کے گرد لیے گئے ہوں ان کے حاصل کے معیار کے مساوی ہوگا۔

اِس کی تصدیق ناقصی موسیقی حرکت (دفعہ ۲۸) کی صورت میں ہوتی ہے جہاں یہ معلوم ہوا تھا کہ وُ ناقص کے اُس نیم قطر کے تناسب ہے جو حرکت کی سمت کے متوازی ہے ۔

۴۹ - زنجیر کی حرکت ۔

حرکیات کی کتابوں میں بالعموم چند ایسے مسئلے بیان کئے جاتے ہیں جو زنجیروں کی حرکت سے متعلق ہوتے ہیں ۔ اگرچہ ذاتی طور پر وہ خود کوئی خاص اہمیت نہیں رکھتے لیکن ایسے مسئلوں سے حرکیاتی اصولوں کی بڑی اچھی وضاحت ہوجاتی ہے ۔

پہلے ایک ایکساں زنجیر کی صورت لو جو ایک میز کے کنارے پر سے پھسل رہی ہے اور اس کا وہ حصہ جو میز پر ہے سیدھا اور کنارے کے علی القوائم ہے ۔ فرض کرو کہ زنجیر کا کل طول ل، خطی کثافت مہ (یعنے کمیت فی اکائی طول)، رفتار ع ہے جبکہ انتصابی حصہ کا طول لا ہے ۔ اگر کنارہ پر تناؤ ت ہو تو انتصابی حصہ پر غور کرنے سے مساوات

$$\text{مہ لا}\ \frac{\text{فرع}}{\text{فرت}} = \text{ج مہ لا ـ ت} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (۱)$$

اور افقی حصہ پر غور کرنے سے مساوات (۱۴۳

$$\text{مہ (ل ـ لا)}\ \frac{\text{فرع}}{\text{فرت}} = \text{ت} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (۲)$$

حاصل ہوتی ہے ۔ جمع کرنے پر

$$\frac{\text{فرع}}{\text{فرت}} = \frac{\text{ج لا}}{\text{ل}} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (۳)$$

اب چونکہ $\text{ع} = \frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}}$ اس لیے

$$\frac{\text{فر}^2\,\text{لا}}{\text{فرت}^2} = \text{ن}^2\,\text{لا} \qquad \text{(۴)}$$

جہاں $\text{ن}^2 = \frac{\text{ج}}{\text{ل}}$ ۔ اِس کا عام حل

$$\text{لا} = \text{ا}\,\text{و}^{\text{ن ت}} + \text{ب}\,\text{و}^{-\text{ن ت}} \qquad \text{(۵)}$$

ہے جہاں ا اور ب، ابتدائی شرطوں پر منحصر ہیں۔

ضابطہ (۳) توانائی کے اصول سے بھی حاصل ہوسکتا ہے۔ چونکہ انتصابی حصہ کی کمیت مہ لا ہے اور چونکہ اس کا مرکز کمیت میز کی ہموار سطح کے نیچے $\frac{1}{2}$ لا گہرائی پر ہے اس لیے توانائی بالقوہ اُس توانائی بالقوہ سے جبکہ پوری زنجیر اس ہموار سطح پر تھی بقدر $\frac{1}{2}$ ج مہ لا^2 کے کم ہے [سکونیات دفعہ ۵۰] اور اس لیے

$$\frac{1}{2}\,\text{مہ ل ع}^2 = \frac{1}{2}\,\text{ج مہ لا}^2 + \text{مستقل} \qquad \text{(۶)}$$

جہاں مستقل اُس طول پر منحصر ہے جو ابتداً لٹک رہا تھا۔ لا کے لحاظ سے تفرق کرنے پر

$$\text{ع}\,\frac{\text{فرع}}{\text{فرلا}} = \frac{\text{ج لا}}{\text{ل}} \qquad \text{(۷)}$$

اور یہ (۳) کے مطابق ہے۔

اب ہم سوال کو بدلتے ہیں اور فرض کرتے ہیں کہ زنجیر کا وہ حصہ جو میز پر ہے ایک ڈھیر کی صورت میں کنارے کے قریب ڈھیلا پڑا ہے۔ صغیر وقت مف ت میں زائد کمیت مہ ع مف ت، رفتار ع کے ساتھ حرکت میں آتی ہے۔ اس لیے پیدا شدہ معیار حرکت پر غور کرنے سے مساوات

$$\text{مہ ع مف ت} \times \text{ع} = \text{ق مف ت} \qquad \text{(۸)}$$

یا

$$\text{ق} = \text{مہ ع}^2 \qquad \text{(۹)}$$

حاصل ہوتی ہے۔ یہ مساوات (۲) کی بجائے ہے۔ (۱) میں درج کرنے اور

$\frac{\text{فرع}}{\text{فرت}}$ کی بجائے ع $\frac{\text{فرع}}{\text{فرلا}}$ لکھنے سے مساوات

$$\text{لا}\,\text{ع}\,\frac{\text{فرع}}{\text{فرلا}} + \text{ع}^{2} = \text{ج}\,\text{لا} \qquad (10)$$

(۱۴۴) حاصل ہوتی ہے۔ اس کو شکل

$$2\,\text{لا}^{2}\,\text{ع}\,\frac{\text{فرع}}{\text{فرلا}} + 2\,\text{لا}\,\text{ع}^{2} = 2\,\text{ج}\,\text{لا}^{2} \qquad (11)$$

میں رکھا جا سکتا ہے جو فوری تکمل پذیر ہے۔ چنانچہ

$$\text{لا}^{2}\,\text{ع}^{2} = \frac{2}{3}\,\text{ج}\,\text{لا}^{3} + \text{مستقل} \qquad (12)$$

اِس کو ناقصی تفاعلوں کے استعمال کے بغیر مزید تکمل نہیں کیا جا سکتا لیکن اگر زنجیر میز کے کنارے سے ابھی سکون سے متحرک ہوئی ہو تو لا = ۰ کے لیے ع متغیر ہوگا اور اس لیے مستقل معدوم ہوگا اور

$$\text{ع}^{2} = \frac{2}{3}\,\text{ج}\,\text{لا} \qquad (13)$$

حاصل ہوگا۔ اِس سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ اسراع مستقل اور $\frac{1}{3}$ ج کے مساوی ہے۔

یہاں یہ بات قابل توجہ ہے کہ توانائی کی مساوات کو اگر مسئلہ کی اس شکل پر استعمال کیا جائے تو غلط نتیجہ حاصل ہوگا لیکن اگر ہم اُس توانائی کا لحاظ رکھیں جو کنارہ پر صغیر تصادموں کے متواتر وقوع پذیر ہونے میں جو زنجیر کے ایک عنصر کے بعد دوسرے عنصر کے حرکت میں آنے سے پیدا ہوتے ہیں مسلسل ضائع ہوتی ہے تو ہم ٹھیک نتیجہ پر پہنچ سکتے ہیں۔ دفعہ ۴۲ میں یہ معلوم ہوا تھا کہ جب بازگشتگی کی قدر (صہ) معدوم ہوتی ہے جیسا کہ موجودہ صورت میں ہے تو دو کمیتوں م، مَ کے درمیان ایک تصادم میں ضائع شدہ توانائی

$$\frac{1}{2}\,\frac{\text{م}\,\text{مَ}}{\text{م} + \text{مَ}}\,\text{ع}^{2} \qquad (14)$$

ہے اگر تصادم سے عین پہلے اضافی رفتار ع ہو۔ موجودہ صورت میں م = مہ لا
مَ = مہ ع مف ت اور اس لیے وقت مف ت میں توانائی کا نقصان $\frac{1}{2}$ مہ ع² مف ت
ہے۔ اس لیے توانائی بالقوہ کے نقصان کو حاصل کردہ توانائی بالحرکت
اور ضائع شدہ توانائی کے مجموعہ کے مساوی رکھنے سے

$$\frac{1}{2}\text{ ج مہ لا}^2 = \frac{1}{2}\text{ مہ لا ع}^2 + \frac{1}{2}\text{ مہ ی ع}^2\text{ فرت}$$

$$= \frac{1}{2}\text{ مہ لا ع}^2 + \frac{1}{2}\text{ مہ ی ع}^2\text{ فرلا} \quad \ldots\ldots (15)$$

اگر ہم لا کے لحاظ سے تفرق کریں تو مساوات (۱۰) حاصل ہوگی۔

۵۰۔ زنجیر کی یکساں حرکت۔

اگر ایک نا امتداد پذیر زنجیر کسی دیے ہوئے منحنی میں حرکت کر رہی ہو
اور اس کے کسی نقطہ پر تناؤ ت ہو تو اس کے ایک خطی عنصر مف س کے سروں پر
کے تناؤ، مماس کی سمت میں قوت مف ت اور عماد کی سمت میں قوت $\frac{\text{ت مف س}}{\text{عہ}}$
عائد کرینگے جہاں عہ نصف قطر انحنا ہے (سکونیات دفعہ ۸۰)۔
(۱۴۵) پس خطی کثافت مہ کی ایک یکساں زنجیر جو کسی بیرونی قوت کے تحت
نہ ہو اور اس لیے ہر قسم کی قید سے آزاد ہو کسی دیے ہوئے منحنی میں مستقل
رفتار و کے ساتھ متحرک رہ سکتی ہے بشرطیکہ

$$\text{مف ت} = ۰ \text{ ،} \quad \frac{\text{مہ مف س} \times \text{و}^2}{\text{عہ}} = \frac{\text{ت مف س}}{\text{عہ}} \qquad (1)$$

یعنے بشرطیکہ

$$\text{ت} = \text{مہ و}^2 \qquad (2)$$

اس سے اِس امر کی توضیح ہوتی ہے کہ بڑی تیزی سے حرکت کرنے والی
زنجیریں کسی شکل کو جو وہ اختیار کر لیتی ہیں برقرار رکھنے کا میلان کیوں رکھتی
ہیں باوجود اس کے کہ بیرونی قوتیں جیسے جاذبہ عمل کر رہی ہوں۔

ضابطہ (۲) سے گردش کرنے والی دائری زنجیر یا حلقہ کی صورت میں وہ چیز حاصل ہوتی ہے جس کو "مرکز گریز تناؤ" کہا جاتا ہے لیکن ہم دیکھ چکے ہیں کہ دائری شکل کی کوئی قید نہیں ہے۔

مخصوص صورت کے طور پر یہ خیال کرو کہ زنجیر لاانتہا لمبی اور سیدھی ہے بجز ایک محدود حصہ کے جو کسی دوسری شکل کا ہے۔ اب اگر ہم اس سمت کے مخالف جس میں زنجیر اپنے سیدھے حصوں میں متحرک ہے رفتار و عائد کریں تو بگاڑ ایک **موج** کی شکل میں بغیر بدلے ہوئے زنجیر پر سفر کریگا۔ یہ ٹیٹ[1] (Tait) کا ثبوت ہے کہ ایک زنجیر یا رسی پر جو تناؤ ت سے تنی ہوئی ہو عرضی ہٹاؤ کی موج کی رفتار

$$ق = \sqrt{\frac{ت}{مہ}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (۳)$$

ہوگی۔

اگر بیرونی قوتیں عمل کر رہی ہوں تو ہم اُن کو ایک عنصر مف س کے لحاظ سے مماس کی سمت میں جزو ترکیبی ضا مف س اور عماد کی سمت میں جزو ترکیبی عا مف س میں تحلیل کردہ فرض کر سکتے ہیں۔ تب کمیت کے ایک عنصر مہ مف س کی حرکت کی مساواتیں

$$\left.\begin{aligned} مہ\,مف\,س\,\frac{فرو}{فرت} &= مف\,ت + ضا\,مف\,س \\ مہ\,مف\,س\,\frac{و^2}{عہ} &= \frac{ت\,مف\,س}{عہ} + عا\,مف\,س \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (۴)$$

یا

$$\left.\begin{aligned} مہ\,\frac{فرو}{فرت} &= \frac{فرت}{فرس} + ضا \\ \frac{مہ\,و^2}{عہ} &= \frac{ت}{عہ} + عا \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (۵)$$

ہونگی۔

[1] پی۔ جی۔ ٹیٹ (۱۸۳۱ء۔ ۱۹۰۱ء) پروفیسر طبیعیات اڈنبرگ (۱۸۶۰ء۔ ۱۹۰۱ء)

اگر ہم و = ۰ رکھیں تو وہ شرطیں حاصل ہونگی جو پوری ہونی چاہئیں تاکہ زنجیر ایک دی ہوئی شکل میں بیرونی قوتوں کے اس نظام کے تحت توازن میں رہ سکے۔ پس اگر منحنی کی شکل ایسی ہے کہ وہ دی ہوئی قوتوں کے تحت توازن کی ایک ممکن شکل ہے تو مساواتیں (۵) (۱۴۶)

ن = مستقل .... (۶)

سے پوری ہوتی ہیں بشرطیکہ

ت = تَ + مہ و² .... (۷)

جہاں تَ سکونی تناؤ ہے۔ مثلاً اگر ایک زنجیر چکنی چرخیوں کے درمیان ایک زنجیرہ کی شکل میں لٹک رہی ہو تو وہ اسی شکل کو قائم رکھ سکتی ہے جب کہ وہ رفتار و سے متحرک ہو بشرطیکہ سروں پر کے تناؤں میں مہ و² کا اضافہ کیا جائے۔

ایسی زنجیر کی صورت میں جو ایک دیے ہوئے چکنے منحنی پر حرکت کرنے کے لیے مجبور ہو عماوی قوت عا مف س میں رقم ر مف س شامل ہوگی جو منحنی کے دباؤ کی وجہ سے ہے۔ اگر زنجیر جاذبہ ارض کے تحت ہو تو

ضا = مہ ج جب سا، عا = - مہ ج جم سا + ر .... (۸)

جہاں افقی کے ساتھ مماس کا میلان سا نے تعبیر کیا گیا ہے۔ نیز اگر محور ما کو انتصاباً اوپر کو کھینچا جائے اور محور لا افقی ہو تو جب سا = $\frac{\text{فرما}}{\text{فرس}}$ اور مساواتوں (۵) میں سے پہلی مساوات شکل

مہ $\frac{\text{فرو}}{\text{فرت}}$ = $\frac{\text{فرت}}{\text{فرس}}$ - مہ ج $\frac{\text{فرما}}{\text{فرس}}$ .... (۹)

اختیار کرتی ہے۔ اس لیے زنجیر کے ایک محدود طول ل، پر تکمیل کرنے سے

مہ ل $\frac{\text{فرو}}{\text{فرت}}$ = ت₂ - ت₁ - مہ ج (ما₂ - ما₁) .... (۱۰)

جہاں لاحقے سروں کے لحاظ سے ہیں۔ اگر دونوں سرے آزاد ہوں تو ت₁ = ت₂ = ۰ اور اسراع صرف ان سروں کی ہموار سطحوں کے فرق پر منحصر ہوگا۔

اِس سوال پر توانائی کے اصول سے بھی بحث کی جاسکتی ہے۔ کسی لمحہ پر کُل توانائی

$$\frac{1}{2}\ م\ ل\ و^2 + \int_{س_1}^{س_2} مج\ ما\ فرس \qquad .... (11)$$

ہے جس میں دوسری رقم توانائی بالقوہ کو تعبیر کرتی ہے۔ وقت مف ت میں عنصر مج $ما_2$ و مف ت اوپر کی انتہا میں جمع ہوتا ہے اور عنصر مج $ما_1$ و مف ت نیچے کی انتہا سے تفریق ہوتا ہے۔ اس لیے کل توانائی میں اضافہ کی شرح

$$م\ ل\ و\ \frac{فرو}{فرت} + مج\ (ما_2 - ما_1)\ و \qquad .... (12)$$

ہے۔ یہ اُس شرح کے مساوی ہونا چاہیے جس سے تناؤ دوسروں پر کام کرتے ہیں یعنے

$$ت_2\ و - ت_1\ و \qquad .... (13)$$

کے۔ (۱۲) اور (۱۳) کو مساوی رکھ کر و سے تقسیم کرنے پر ضابطہ (۱۰) حاصل ہوگا

۵۱ ۔ زنجیر کی دھکہ دار حرکت ۔ (۱۴۷

فرض کرو کہ ایک زنجیر ابتداً ایک مستوی منحنی کی شکل میں ساکن ہے اور یہ کہ اِس کے سروں پر مماسی دھکوں سے وہ دفعتاً حرکت میں آتی ہے۔

اب ہم ت سے کسی نقطہ ف پر کا دھکہ دار تناؤ تعبیر کرتے ہیں یعنے قوت کے لا انتہا چھوٹے زمانہ میں اصلی تناؤ کا وقت تکملہ سے تعبیر ہوتا ہے۔ فرض کرو کہ دھکہ کے عین بعد ف کی رفتاریں مماس اور عماد کی سمتوں میں علی الترتیب ع، و ہیں۔ چونکہ ایک عنصر مف س پر دھکہ کے مماسی اور عمادی اجزائے ترکیبی علی الترتیب مف ت اور ت مف سا ہیں اس لیے

$$م\ مف\ س \times ع = مف\ ت،\quad م\ مف\ س \times و = ت\ مف\ سا$$

یا

$$م\ ع = \frac{فرت}{فرس}،\quad م\ و = ت\ \frac{فرسا}{فرس} \qquad (1)$$

اگر زنجیر پر دو متصلہ نقطے ف، ق ہوں تو ف کے لحاظ سے ق کی رفتار دو اجزائے ترکیبی پر مشتمل ہوگی جن میں سے ایک، ف پر کے مماس کے متوازی،

(۶ + مف ۶) جم مف سا ـ (و + مف و) جب مف سا ـ ۶ = مف ۶ ـ و مف سا

ہے اور دوسرا، ف پر کے عماد کے متوازی،

(۶ + مف ۶) جب مف سا + (و + مف و) جم مف سا ـ و = ۶ مف سا + مف و

ہے ۔ چونکہ عنصر ف ق کا طول (مف س) مستقل ہے اس لیے اضافی رفتار کا پہلا جزو ترکیبی معدوم ہونا چاہیئے اس لیے

$$\frac{\text{فر ۶}}{\text{فر س}} - \text{و}\,\frac{\text{فر سا}}{\text{فر س}} = ۰ \qquad \ldots\ldots\ldots (۲)$$

اضافی رفتار کے دوسرے جزو ترکیبی سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ دھکہ کے عین بعد عنصر ف ق، اپنی حرکت انتقال کی رفتار کے علاوہ، زاویئی رفتار

$$\text{۶}\,\frac{\text{فر سا}}{\text{فر س}} + \frac{\text{فر و}}{\text{فر س}} \qquad \ldots\ldots\ldots (۳)$$

رکھتا ہے ۔

(۱) اور (۲) سے ۶ اور و کو ساقط کرنے سے

$$\frac{\text{فر}}{\text{فر س}}\left(\frac{۱}{\text{مہ}}\,\frac{\text{فر ت}}{\text{فر س}}\right) = \frac{\text{ت}}{\text{مہ}}\left(\frac{\text{فر سا}}{\text{فر س}}\right)^{۲} = \frac{\text{ت}}{\text{مہ عہ}^{۲}} \qquad \ldots (۴)$$

جہاں عہ نصف قطر انحنا ہے ۔

(۱۴۸ اگر زنجیر کی خطی کثافت یکساں ہو تو مساوات (۴)،

$$\frac{\text{فر}^{۲}\text{ت}}{\text{فر س}^{۲}} = \frac{\text{ت}}{\text{عہ}^{۲}} \qquad (۵)$$

میں تحویل ہوتی ہے ۔

(۴) یا (۵) کے حل میں دو اختیاری مستقل آئینگے ۔ اِن کو اُن معطیات سے متعین کرنا ہوگا جو زنجیر کے سِروں کے متعلق دیے جائیں ۔ تب ۶ اور و کی قیمتیں (۱) سے حاصل ہونگی ۔

مثال۔ اگر زنجیر ایک دائری توس بنائے تو عہ = ا (نصف قطر) اس لیے س = ا طہ رکھنے سے

$$\frac{ف^2 ت}{ف ط^2} = ـت \qquad \ldots\ldots (6)$$

جس کا حل

$$ـت = ا جمز طہ + ب جبز طہ \qquad \ldots\ldots (7)$$

ہے۔ اگر ایک سرے (طہ = ۰) پر عائد کردہ دھکہ تناؤ ـت ب ہو اور اگر دوسرا سرا (طہ = عہ) آزاد ہو تو

$$ا = ـت' ، ا جمز عہ + ب جبز عہ = ۰ \qquad \ldots\ldots (8)$$

اس لیے
$$ـت = ـت_ب \frac{جبز (عہ - طہ)}{جبز عہ} \qquad \ldots\ldots (9)$$

اور اس لیے

$$\left.\begin{aligned} ی &= - \frac{ـت_ب}{مہ ا} \frac{جمز (عہ - ط)}{جبز عہ} \\ و &= \frac{ـت_ب}{مہ ا} \frac{جبز (عہ - ط)}{جبز عہ} \end{aligned}\right\} \qquad \ldots\ldots (10)$$

مثالیں (۱۲)

۱۔ ایک کمیت م ایک چکنے میز پر ہے اور ایک ڈوری سے بندھی ہوئی ہے جو میز کے ایک چھوٹے سوراخ میں سے گزرتی ہے اور اس کے دوسرے سرے سے ایک کمیت ھ لٹک رہی ہے۔ اگر م کو سوراخ سے فاصلہ ا پر ڈوری کے علی القوائم رفتار و سے پھینکا جائے تو ثابت کرو کہ جب کمیت م پھر ڈوری کے علی القوائم حرکت کر رہی ہوگی تو سوراخ سے اس کا فاصلہ مساوات

$$لا^2 - \frac{م و^2}{2 ھ ج} لا - \frac{م و^2}{2 ھ ج} ا = ۰ .$$

کی مثبت اصل ہے۔

۲۔ اگر گزشتہ سوال میں سوراخ سے م کا فاصلہ قیمتوں ا، ب کے درمیان اہتزاز کرے تو ثابت کرو کہ انتہائی محلوں میں توانائی بالحرکت علی الترتیب

$$\frac{۴ ج ب^۲}{ا + ب} \quad ، \quad \frac{۴ ج ا^۲}{ا + ب}$$

ہوگی۔

۳۔ ف، ق دو ذرے ہیں جن کی کمیتیں علی الترتیب ۴، م ہیں۔ پہلی کمیت ایک ثابت نقطہ و کے گرد نصف قطر ا کا ایک دائرہ مرتسم کرتی ہے اور دوسری کمیت ف کے لحاظ سے نصف قطر ب کا ایک دائرہ مرتسم کرتی ہے۔ اگر طہ وہ زاویہ ہو جو و ف، ایک ثابت سمت کے ساتھ بناتا ہے اور جہ وہ زاویہ ہو جو ف ق، و ف کے ساتھ بناتا ہے تو ثابت کرو کہ نظام کی توانائی بالحرکت

$$\frac{۱}{۲} (ا \dot{طہ}^۲ + ۲ ھ \dot{طہ} \dot{جہ} + ب \dot{جہ}^۲)$$

ہے جہاں

$$ا = ۴ ا^۲ + م (ا^۲ + ۲ ا ب جم جہ + ب^۲)$$

$$ھ = م ب (ا جم جہ + ب) ، \quad ب = م ب^۲$$

نیز ثابت کرو کہ و کے گرد زاوئی معیار حرکت

$$ا \dot{طہ} + ھ \dot{جہ}$$

ہے۔

۴۔ طول ۲ ا کی ایک یکساں زنجیر ایک چکنی کھونٹی پر توازن میں لٹک رہی ہے۔ اگر اس کو سکون سے عین چلا دیا جائے تو ثابت کرو کہ اس کی رفتار جب کہ وہ کھونٹی کو چھوڑ رہی ہوگی $\sqrt{ج ا}$ ہے۔ (۱۴۹)

۵۔ ایک یکساں زنجیر اپنے دو سروں سے جو باہم قریب ہیں انتصاباً لٹک رہی ہے۔ اگر ایک سرے کو چھوڑ دیا جائے تو ثابت کرو کہ وقت ت کے بعد حلقے پر ساکن جانب تناؤ $\frac{۱}{۲}$ مہ ج^۲ ت^۲ ہے جہاں کمیت فی اکائی طول مہ ہے۔ حیلی توانائی کا نقصان معلوم کرو۔

۶ ۔ یکساں زنجیر کا ایک ٹکڑا اپنے بالائی سرے سے انتصاباً لٹک رہا ہے اور اس کا نچلا سرا ایک افقی میز کے عین اوپر ہے ۔ اگر بالائی سرے کو چھوڑ دیا جائے تو ثابت کرو کہ گرنے کے اثناء میں کسی لمحہ میز پر دباؤ اُس حصہ کے وزن کا تین گنا ہے جو میز پر ہے ۔

۷ ۔ ایک زنجیر ایک چکنے دائری اسطوانے پر جس کا محور افقی ہے محور کے علی القوائم پڑی ہوئی ہے ۔ زنجیر کا طول اسطوانے کے محیط کے نصف کے مساوی ہے ۔ ثابت کرو کہ اگر اس میں ذرا سا خلل ڈال دیا جائے تو اس کی رفتار جب کہ طول ا طہ اسطوانے پر سے پھسل چکے

$$\sqrt{\frac{ج\ ا}{\pi}\left\{ طہ^{۲} + ۲\ (۱ - جم\ طہ) \right\}}$$

ہوگی جہاں ا اسطوانہ کا نصف قطر ہے ۔

۸ ۔ ایک یکساں زنجیر جس کے سرے آزاد ہیں ایک چکنے خط تدویر پر جس کا محور انتصابی ہے پھسلتی ہے ۔ ثابت کرو کہ اس کا وسطی نقطہ اس طرح حرکت کرتا ہے گویا کہ پوری کمیت وہاں مرتکز ہے ۔

۹ ۔ متعدد مساوی ذرّے ایک منتظم کثیر ضلعی کے متواتر راسوں پر ہیں اور ناامتداد پذیر ڈوریوں سے مربوط ہیں ۔ اگر ایک ڈوری کو دفعتاً دھکہ دیا جائے تو ثابت کرو کہ کسی تین متصلہ ڈوریوں کے تناؤ میں رشتہ

$$ت_{ن+۱} - ۲\,ت_{ن} + ت_{ن-۱}$$

$$= (ت_{ن+۱} + ۲\,ت_{ن} + ت_{ن-۱})\ مس^{۲}\ عہ$$

جہاں عہ اُس زاویہ کا نصف ہے جو کثیر ضلعی کے مرکز پر ایک ضلع کے محاذی بنتا ہے ۔

۱۰ ۔ اگر ایک زنجیر کے دو سروں پر فوری مماسی دھکوں $ت_{۱}$، $ت_{۲}$ سے زنجیر حرکت میں آئے تو ثابت کرو کہ پیدا شدہ توانائی بالحرکت

$$\frac{1}{2}\left(\text{ت}_1\,\text{ع}_1 + \text{ت}_2\,\text{ع}_2\right)$$

ہے جہاں اِن دو سِروں کی ابتدائی مماسی رفتاریں ع_1، ع_2 ہیں۔

۱۱۔ ایک یکساں زنجیر جو زاویہ عہ کے ایک مساوی الزاویہ لولب کی قوس کی شکل میں ہے ایک سِرے پر مماسی دھکہ سے حرکت میں آتی ہے۔ ثابت کرو کہ دھکہ تناؤ مساوات

$$\text{ت} = \text{ا}\,\text{س}^{\text{ن}_1} + \text{ب}\,\text{س}^{\text{ن}_2}$$

سے حاصل ہوتا ہے جہاں ن_1، ن_2 دو درجی مساوات

$$\text{ن}\,(\text{ن} - 1) = \text{مس}^2\,\text{عہ}$$

کی اصلیں ہیں۔

اگر زنجیر ایک سمت میں لامتناہی تک وسیع ہو تو ثابت کرو کہ ہر نقطہ کی ابتدائی حرکت کی سمت منحنی کے ساتھ وہی زاویہ بناتی ہے۔

آٹھواں باب (۱۵۰)

استوار جسموں کا علم حرکت

ایک ثابت محور کے گرد گردش

۵۲ - تمہید —

جب ہم منفرد ذرّوں کے نظام پر بحث کرنے کے بعد مادّہ کے مسلسل یا بظاہر مسلسل تقسیموں پر پہنچتے ہیں خواہ وہ سیال ہوں یا ٹھوس تو حرکت کے وہ قانون جو اب تک کافی تھے توسیع طلب ہو جاتے ہیں اور ان کی توسیع میں کسی طبیعی اصول موضوعہ کی ضرورت داعی ہوتی ہے ۔ یہ قانون فی الواقع صرف اس وقت تک قطعی ہیں جب تک کہ وہ جسم جن کے متعلق اُن کو پیش کیا گیا ہے ریاضیاتی نقطوں کے طور پر تعبیر ہو سکیں ۔

اِس نئے طبیعی مفروضہ کو جس شکل میں بیان کیا جائیگا اُس میں کچھ حد تک انتخاب کی آزادی حاصل ہے ۔ ایک تدبیر یہ مان لینا ہے کہ مادّہ کا خواہ کوئی مقصہ ہو اُس پر اِس طرح بحث کی جا سکتی ہے گویا کہ وہ ریاضیاتی نقطوں سے بنا ہوا ہے جن میں محدود فاصلے ہیں اور جو جمودی قدر رکھتے ہیں

اور ایک دوسرے پر ایسی قوتوں سے عمل کرتے ہیں جو ان کو ملانے والے خطوں کی سمتوں میں عمل اور تعامل کی مساوات کے قانون کے تحت ہیں[1]۔ استوار جسم کی صورت میں یہ فرض کیا جاتا ہے کہ یہ قوتیں اس طرح مرتب ہو جاتی ہیں کہ نظام کی عام تشکیل معتد بہ حد تک مستقل رہتی ہے۔ اس اساس پر ہم فوراً خطی اور زاوی معیارِ حرکت کے اصولوں کا جن کی صراحت پچھلے باب میں کی جا چکی ہے اِدعا کر سکتے ہیں۔
اِن اصولوں سے ہمیں وہ سب چیزیں مل جائینگی جو استوار جسموں کے علم حرکت کے لیے اساس کے طور پر بالعموم ضروری ہیں۔

۵۲۔ ڈلمبرٹ کا اصول

دوسرا طریقہ وہ اصول مان لینا ہے جس کو اولاً ڈلمبرٹ[2] نے عام شکل میں بیان کیا تھا۔

کسی ذرہ کی کمیت م اور اس کے اسراع کا حاصل ضرب ایک سمتی مقدار (۱۵۱)
ہے جس کو ہم "ذرہ پر کی موثر قوت" کہہ سکتے ہیں۔ حرکت کے دوسرے قانون کی رو سے وہ ہر طرح م پر عمل کرنے والی تمام قوتوں کے حاصل کے مساوی ہونا چاہیئے۔ ایک ذرّہ کی صورت میں جو ایک مادی جسم کا حصہ ہو ان قوتوں کو دو جماعتوں میں تقسیم کیا جا سکتا ہے یعنے (۱) "بیرونی قوتیں" جو جسم کے باہر سے عمل کرتی ہیں اور (۲) "اندرونی قوتیں" یا "تعامل" جو بقیہ قوتوں کی وجہ سے ہیں۔ پورے جسم (ذرّوں کے اجتماع) پر غور کیا جائے تو ہم یہ کہہ سکتے ہیں کہ مقامی سمتوں کا وہ نظام جو ان موثر قوتوں کو تعبیر کرتا ہے سکونیاتی طور پر

---

[1] اس کو بالعموم "Boscovich, کا مفروضہ" کہا جاتا ہے کیونکہ Boscovich, اس کا بانی تھا۔ اِس نے طبیعیات پر (وینس ۱۷۵۸ء) ایک مقالہ لکھا ہے جس میں اس اصول کو پیش کیا گیا ہے۔

[2] جے۔ آر۔ ڈلمبرٹ (۱۷۱۷ء تا ۱۷۸۳ء)۔ یہ اصول اس کی کتاب Traite de dynamique میں بیان کیا گیا ہے۔

بیرونی اور اندرونی قوتوں کے دو نظاموں کو ترکیب دینے کے مماثل ہے۔

ڈلمبرٹ کا مفروضہ یہ ہے کہ اندرونی قوتیں خود متوازن قوتوں کا ایک نظام بناتی ہیں۔ اس سے یہ مستنبط ہوتا ہے کہ موثر قوتوں کا نظام بہ حیثیت مجموعی سکونیاتی طور پر بیرونی قوتوں کے نظام کے مماثل ہے[1]۔ بالخصوص اگر تمام ذرّوں پر عمل کرنے والی موثر قوتوں کو کسی دی ہوئی سمت میں تحلیل کیا جائے تو اِن کا مجموعہ اِس سمت میں بیرونی قوتوں کے اجزائے ترکیبی کے مجموعہ کے مساوی ہونا چاہیئے اور نیز کسی محور کے گِرد موثر قوتوں کے معیاروں کا مجموعہ اِس محور کے گِرد بیرونی قوتوں کے معیاروں کے مجموعہ کے مساوی ہونا چاہیئے۔

اِن نتیجوں کو تحلیلی طور پر بیان کرنے کے لیے فرض کرو کہ ثابت قائم محوروں کے لحاظ سے ایک ذرہ م کا محل (لا، ما، ی) سے اور اِس پر عمل کرنے والی بیرونی قوت (**لا**، **ما**، **ے**) سے تعبیر ہوتی ہے۔ اب چونکہ م پر کی موثر قوت کے اجزائے ترکیبی

م لاٰ، م ناٰ، م نیٰ

ہیں اس لیے و ی کے متوازی تحلیل کرنے سے

Σ (م نیٰ) = Σ (**ے**) .... (۱)

اور و ی کے گِرد معیار لینے سے

Σ (لا × م ناٰ ـ ما × م لاٰ) = Σ (لا **ما** ـ ما **لا**) .... (۲)

جہاں حاصل جمع میں نظام کے تمام ذرّے شامل ہیں [سکونیات دفعہ ۶۰]۔ مادّہ کی مسلسل تقسیم کی صورت میں یہ حاصل جمع تکملوں کی شکل اختیار کرتے ہیں۔

ان مساواتوں کو (۱۵

نٰ/نت Σ (م یٰ) = Σ (**ے**) ...... (۳)

---

[1] یہ "اس اصول" کی وہ شکل ہے جس میں ابتدًا اس کو بیان کیا گیا تھا۔

اور $\frac{\text{فر}}{\text{فرت}}$ ع (لا×م نا - نا×م لا) = ع (لاما - مالا) ..... (۴)

لکھا جا سکتا ہے۔ علیٰ ہٰذا اِن نمونوں میں سے ہر نمونہ کی دو دوسری مساواتیں۔
چونکہ محوری کا کوئی محل ہو سکتا ہے اس لیے مساواتوں (۳) اور (۴) سے یہ ظاہر ہوتا ہے کہ کسی دی ہوئی سمت میں کُل معیار حرکت کے اضافہ کی شرح اس سمت میں کُل بیرونی قوت کے مساوی ہوتی ہے اور یہ کہ کسی دیے ہوئے محور کے گرد زاویٔ معیار حرکت کے اضافہ کی شرح اس محور کے گرد تمام بیرونی قوتوں کے کُل معیار کے مساوی ہوتی ہے۔

پس یہ معلوم ہوا کہ اساسی مفروضہ کی خواہ کوئی شکل اختیار کی جائے ہم فوراً خطی اور زاویٔ معیار حرکت کے مندرجہ بالا اصولوں پر پہنچتے ہیں۔ یہ مشاہدہ طلب ہے کہ استوار جسموں کی صورت کی کوئی قید نہیں ہے نہ یہ مضمر ہے اور یہ کہ زیر بحث اصول کلی حیثیت رکھتے ہیں۔ حرکیاتی نظریہ میں استوار جسموں کا خاص رتبہ یہ ہے کہ اِن اصولوں سے جو مساواتیں حاصل ہوتی ہیں اُن کی تعداد ایسے جسم کی آزادی کے درجوں کے مساوی ہوتی ہے خواہ دو بُعدوں میں یا تین بُعدوں میں اور اس لیے یہ مساواتیں بالعموم ایسے حرکیاتی مسئلوں کو حل کرنے میں کافی ہوتی ہیں جن میں ایسے جسموں سے تعلق ہو۔ دوسری صورتوں میں، مثلاً ما حرکیات میں اور لچکدار ارتعاشوں کے نظریہ میں، خاص قسم کے معاون طبیعی مفروضوں کو اختیار کرنا پڑتا ہے۔

ڈلمبرٹ کے اصول کی اس شکل میں جو بالعموم اختیار کی جاتی ہے یہ دعویٰ کیا جاتا ہے کہ بیرونی قوتوں کا نظام موثر قوتوں کے نظام کے ساتھ جبکہ انھیں الٹ دیا گیا ہو توازن میں ہوتا ہے۔ یہ صریحاً پچھلے بیان کے مماثل ہے۔ پس ہم دیکھتے ہیں کہ علم حرکت کے مسئلے بڑی آسانی سے لیکن قدرے غیر فطری طور پر سکونیات کے قاعدوں کے تحت آجاتے ہیں۔ طالب علم ایک مخصوص صورت سے واقف ہوگا؛ ایک ذرہ م متقل زاوی رفتار ω سے نصف قطر ر کا ایک دائرہ مرتسم کر رہا ہے، اس پر کی الٹی موثر قوت صرف

وہ خیالی "مرکز گریز" قوت م سہ^2 ر ہے جو حقیقی قوتوں کے ساتھ جو ذرہ پر عمل کر رہی ہیں توازن میں ہے۔

اب رہے اصول موضوعہ تو اس سے انکار نہیں کیا جا سکتا کہ دونوں شکلیں قابل اعتراض ہیں۔ وہ مفروضہ جس کو دفعہ ۲۶۵ میں سمجھایا گیا ہے
(۱۵۳) حرکیاتی تحقیقاتوں کو اس امر پر منحصر کر دیتا ہے کہ مادے کی انتہائی ساخت کے متعلق ایک مخصوص نقطہ نظر اختیار کیا جائے۔ دوسری طرف ڈلمبرٹ کے اصول پر یہ اعتراض ہے کہ وہ حرکت کے قانون کو سکونیات کے قاعدوں کی زبان میں بیان کرتا ہے حالانکہ زیادہ عقلی طریقہ کار میں ہونا یہ چاہئے کہ توازن کے قانون علم حرکت کے عام اصولوں سے مخصوص صورت کے طور پر ماخوذ ہوں[1]۔

مصنف کی رائے میں خطی اور زاوئی معیار حرکت کے اصولوں کو انھیں نیوٹن کے قوانین حرکت کی معمولی توسیع سمجھ کر ان امور سے متعین کرنا بہتر ہے جن کا ذکر ساتویں باب میں آ چکا ہے۔ اگرچہ وہ ثابت شدہ نہیں ہیں۔ بہر حال چونکہ کوئی نہ کوئی مفروضہ اختیار کرنا ہے اس لیے مناسب ترین یہ ہے کہ اس کو ایسی شکل میں بیان کیا جائے کہ اس کی مزید توسیع و تکمیل سب سے زیادہ آسانی سے ہو سکے اور ساتھ ہی وہ مشکوک مفروضہ سے پاک ہو۔

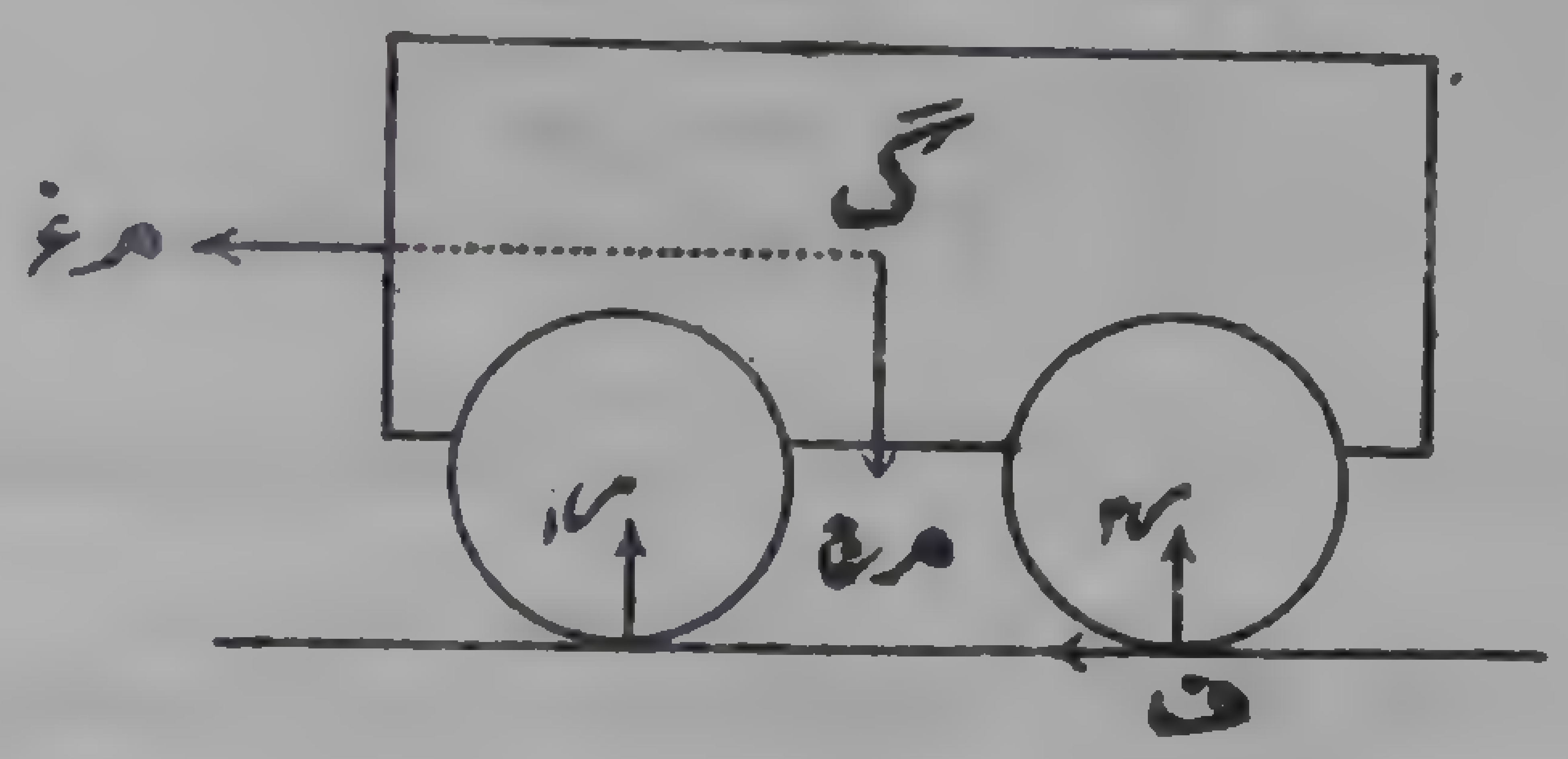
مثال ۱۔ ایک خود رو گاڑی پچھلے پہیوں سے چلتی ہے۔ اعظم اسراع معلوم کرنا مطلوب ہے جب کہ یہ دیا گیا ہو کہ پہیوں اور سڑک کے درمیان رگڑ کی قدر مہ ہے۔

فرض کرو کہ کُل کمیت ھ، مرکز کمیت گ، سڑک کے اوپر گ کا ارتفاع

---

[1] ڈلمبرٹ کے اصول کی تاریخ یہ ہے کہ اس سے حرکیاتی سوالوں کے حل کرنے میں عام طریقہ کے اجرا سے بڑی مدد ملی ہے۔ ڈلمبرٹ سے پہلے استوار جسموں کی حرکت کے مسئلوں کو الگ الگ حل کیا جاتا تھا جو خاص خاص مفروضوں پر مبنی ہوتے جو کم و بیش بظاہر معقول ہوتے تھے اور بعض اوقات معرض بحث میں آتے تھے۔

ھ اور پچھلے پہیوں کا نصف قطر ا ہے اور اگلے اور پچھلے دُھروں سے اس انتصابی کے



شکل ۴۳

فاصلے ف۱ اور ف۲ ہیں جو گ میں سے گزرتا ہے۔ اگر ن وہ جفت ہو جو انجن پچھلے دُھرے پر عائد کرتا ہے اور پچھلے پہیوں پر سڑک کی آگے وار کھینچ ف ہو جو پہیوں کو پیچھے وار پھسلنے سے روکتی ہے تو محور کے گرد معیار لینے سے

ف ا = ن ....(۵)

(۱۵۴) جہاں پہیوں کا محورانہ جمود نظر انداز کیا گیا ہے۔ اگر گاڑی کی رفتار ع ہو تو مختلف حصوں کے معیار حرکت ایک خطی معیار حرکت م ع کے حامل ہیں جو گ میں سے گزرنے والے ایک افقی خط میں ہے بشرطیکہ ہم انجن کے متحرک حصوں کے جمود کو نظر انداز کریں۔ اس لیے افقی اور انتصابی طور پر تحلیل کرنے سے

م (فرع / فرت) = ف ....(۶)

اور

ر۱ + ر۲ = م ج ....(۷)

جہاں پہیوں کے اگلے اور پچھلے زوجوں پر زمین کے انتصابی دباؤ ر۱ اور ر۲ ہیں۔ نیز گ کے گرد معیار لینے سے

ر۲ ف۲ − ر۱ ف۱ = ف ھ ....(۸)

اس لیے

$$\left.\begin{aligned} ر_۱ &= \frac{م ج ف_۲}{ف_۱+ف_۲} - \frac{ف ھ}{ف_۱+ف_۲} \\ ر_۲ &= \frac{م ج ف_۱}{ف_۱+ف_۲} + \frac{ف ھ}{ف_۱+ف_۲} \end{aligned}\right\} \quad\ldots\ldots (۹)$$

اس لیے چلانے والی قوت کا اثر یہ ہے کہ وہ پچھلے پہیوں پر کے دباؤ کو بقدر $\frac{ف ھ}{ف_۱+ف_۲}$ کے بڑھاتی ہے اور اگلے پہیوں پر کے دباؤ کو بقدر $\frac{ف ھ}{ف_۱+ف_۲}$ کے گھٹاتی ہے۔

پہیوں کے نہ پھسلنے کے لیے

$$ف \not> مہ ر_۲ \quad\ldots\ldots\ldots\ldots (۱۰)$$

ہونا چاہیئے۔ اس سے

$$ف \not> \frac{مہ م ج ف_۱}{ف_۱+ف_۲ - مہ ھ} \quad\ldots\ldots\ldots (۱۱)$$

حاصل ہوتا ہے اور اس لیے اعظم اسراع

$$\frac{مہ ج ف_۱}{ف_۱+ف_۲ - مہ ھ} \quad\ldots\ldots\ldots\ldots (۱۲)$$

ہے۔

اگر گاڑی اگلے پہیوں سے چلتی تو نتیجہ

$$\frac{مہ ج ف_۲}{ف_۱+ف_۲ + مہ ھ} \quad\ldots\ldots\ldots\ldots (۱۳)$$

حاصل ہوتا۔

اگر ہم ھ کی علامت اُلٹ دیں تو ضابطہ (۱۲) سے اعظم ابطاء حاصل ہوگا جبکہ پچھلے پہیوں پر بریک استعمال کئے جائیں، اور (۱۳) سے اعظم ابطاء حاصل ہوگا جبکہ وہ اگلے پہیوں پر استعمال کئے جائیں۔

(۱۲) کی ایک عددی مثال کے طور پر فرض کرو کہ $ف_۱ = ۸$، $ف_۲ = ۴$،

ھ = ۳، مہ = $\frac{1}{۴}$ ۔ نتیجہ $\frac{۸}{۴۵}$ ج یا تقریباً ۵ $\frac{1}{۲}$ فٹ فی ثانیہ فی ثانیہ ہے۔

مثال ۲ ۔ فرض کرو کہ گاڑی ایک جرّی قوت **ف** سے چلائی جاتی ہے جو ایک افقی خط میں زمین کے اوپر ارتفاع ھَ پر عمل کرتی ہے۔ اگر ہم ڈھرّوں پر کی رگڑ کو اور پہیوں کے محورانہ جمود کو نظرانداز کریں تو اب پہیوں پر کوئی مماسی کھینچ نہیں ہوگی۔ مساوات (۸) کی بجائے مساوات

$$ر_۲ ف_۲ - ر_۱ ف_۱ = \text{ف}\ (ھ - ھَ) \qquad \cdots\cdots (۱۴)$$

حاصل ہوگی۔ اب (۱۴) اور (۷) سے

$$\left.\begin{array}{l} ر_۱ (ف_۱ + ف_۲) = مر ج ف_۲ - \text{ف}\ (ھ - ھَ) \\ ر_۲ (ف_۱ + ف_۲) = مر ج ف_۱ + \text{ف}\ (ھ - ھَ) \end{array}\right\} \cdots (۱۵)$$

(۱۵۵) اس لیے اگر ھ > ھَ تو اسراع کو

$$\frac{ف_۲}{ھ - ھَ} ج \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (۱۶)$$

سے متجاوز نہیں ہونا چاہیے ورنہ $ر_۱$ کی قیمت جو (۱۵) کو پورا کرنے کے لیے مطلوب ہے، منفی ہوگی یعنے اگلے پہیے زمین سے اُچھل جائینگے۔ اسی طرح جب گاڑی کو روکا جائے یعنے جب بریک استعمال کئے جائیں تو ابطار کو

$$\frac{ف_۱ ج}{ھ - ھَ} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (۱۷)$$

سے متجاوز نہیں ہونا چاہیے ورنہ پچھلے پہیے جست کرینگے۔ اگر ھ < ھَ تو لفظوں "اسراع" اور "ابطاء" کو اوپر کے بیانوں میں باہم بدل دینا چاہیے اور نسب نماؤں کو ھ - ھَ کی بجائے ھَ - ھ رکھنا چاہیے۔ بالکل اچانک صدمہ جس کے معنے لامتناہی اسراع کے ہیں کسی صورت میں جست کا موجب ہوگا اِلّا آنکہ ھ اور ھَ مساوی ہوں۔

مثال ۳ ۔ ایک ڈنڈا و ا اپنے اوپر کے بسرے و میں سے

گزرنے والے انتصابی کے گرد نیم زاویہ عہ کا ایک مخروط مرتسم کرتا ہے اور سرا و ثابت ہے ۔ ضروری زاویئی رفتار سہ معلوم کرو ۔

یہ سوال سب سے زیادہ آسانی سے اُن خیالی مرکز گریز قوتوں کے ذریعہ حل ہو سکتا ہے جن کا ذکر پہلے آچکا ہے ۔ اگر و سے فاصلہ لا پر خطی کثافت مہ ہو تو عنصر مہ مف لا پر مرکز گریز قوت مہ مف لا × سہ² لا جب عہ ہوگی اور و کے گرد اِس کا معیار مہ مف لا × سہ² لا جب عہ × لا جم عہ ہوگا ۔ پس اگر ڈنڈے کا طول اُ ، اس کی کمیت مر ، اور و سے مرکز کمیت کا فاصلہ ھ ہو تو

$$\text{سہ}^2 \text{ جب عہ جم عہ } \int_0^{\text{اُ}} \text{مہ لا}^2 \text{ فرلا} = \text{مر ج ھ جب عہ} \quad \ldots\ldots (18)$$

اس لیے اگر و کے گرد گردش کا نصف قطر ک ہو تو

$$\text{سہ}^2 = \frac{\text{ج ھ}}{\text{ک}^2 \text{ جم عہ}} = \frac{\text{ج}}{\text{ل جم عہ}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (19)$$

جہاں و سے اہتزاز کے مرکز کا فاصلہ ل ہے ۔

۴ ۵ ۔ ثابت محور کے گرد گردش

اگر کوئی استوار جسم صرف ایک ثابت محور کے گرد گردش کرنے میں آزاد ہو تو اِس کا محل اُس زاویہ طہ سے مشخص ہوگا جو محور میں سے گزرنے والا ایک مستوی (جو جسم میں ثابت ہو) اپنے اُس محل سے بناتا ہے جس کو معیار کے طور پر منتخب کیا گیا ہے ۔

اگر وقفہ مف ت میں اِس زاویہ کا اضافہ مف طہ ہو تو خارج قسمت $\frac{\text{مف طہ}}{\text{مف ت}}$ کو اِس وقفہ میں جسم کی "اوسط زاویئی رفتار" کہہ سکتے ہیں ۔ انتہا لینے پر

$$\text{سہ} = \frac{\text{فرطہ}}{\text{فرت}} \quad (1)$$

سہ کو لمحہ ت پر کی زاویئی رفتار کہا جائیگا ۔

اسی طرح تفرقی سر

$$\frac{\text{فرسہ}}{\text{فرت}} \quad \text{یا} \quad \frac{\text{فر}^{2}\,\text{طہ}}{\text{فرت}^{2}} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

کو جسم کا ”زاویٔ اسراع“ کہہ سکتے ہیں۔ اگر سہ کو طہ کا ایک تفاعل سمجھا جائے تو

$$\frac{\text{فرسہ}}{\text{فرت}} = \frac{\text{فرسہ}}{\text{فرطہ}}\;\frac{\text{فرطہ}}{\text{فرت}} = \text{سہ}\;\frac{\text{فرسہ}}{\text{فرطہ}} \qquad \ldots\ldots\ldots (3)$$

جو دفعہ ۲ کے ضابطہ (۴) کے مشابہ ہے۔

وقت مف ت میں جسم کا ایک ذرہ م جس کا فاصلہ ثابت محور سے ر ہے فاصلہ ر مف طہ طے کریگا اور اس لیے اس کی رفتار ر $\frac{\text{فرطہ}}{\text{فرت}}$ یا سہ ر ہے۔ اس ذرہ کا معیار حرکت م سہ ر ہے جو ر کے اور محور کے علی القوائم ہے اور اس لیے محور کے گرد اس کا معیار م سہ ر × ر یا م ر^{2} سہ ہے۔ اس لیے کل زاویٔ معیار حرکت

$$\Sigma\,(\text{م ر}^{2}\,\text{سہ}) = \Sigma\,(\text{م ر}^{2}) \times \text{سہ} \qquad \ldots\ldots (4)$$

ہے جہاں عمل جمع میں جسم کے تمام ذرّے شامل ہیں۔

مختلف ذروں کی کمیتوں اور محور سے ان کے متعلقہ فاصلوں کے مربعوں کے حاصل ضربوں کا یہ مجموعہ $\Sigma\,(\text{م ر}^{2})$، محور کے لحاظ سے جسم کا ”جمود کا معیار“ کہلاتا ہے [سکونیات دفعہ ۷۰]۔ چند سادہ صورتوں میں اس کی قیمت عمل تکمل سے معلوم کی جا سکتی ہے [سکونیات دفعہ ۷۱، ۷۲]۔ دوسری صورتوں میں اس کو ضرورت پر حرکیاتی تجربہ سے حاصل کیا جاتا ہے [دیکھو دفعہ ۱۵۷]۔

اگر زیر بحث محور سے ذروں کے فاصلوں کا ”اوسط مربع“ ک^{2} ہو [سکونیات دفعہ ۷۰] یعنی

$$\text{ک}^{2} = \frac{\Sigma\,(\text{م ر}^{2})}{\Sigma\,(\text{م})} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

تو خطی مقدار ک کو محور کے لحاظ سے جسم کا "گردش کا محور" کہتے ہیں۔ اگر جمود کا معیار ع اور کل کمیت مر ہو تو

$$\text{ع} = \text{مر}\,\text{ک}^{2} \qquad (6)$$

چنانچہ زاوئی معیار حرکت کو ع سہ یا مرک² سہ میں سے کسی ایک شکل میں بیان کیا جا سکتا ہے۔

پس اگر گردش کے ثابت محور کے لحاظ سے تمام بیرونی قوتوں کا کُل معیار ن ہو تو زاوئی معیار حرکت کے اصول سے

$$\frac{\text{ف}}{\text{فزت}}\left(\text{ع سہ}\right) = \text{ن} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

اس کا مقابلہ ایک جسم کی خطی حرکت کی مساوات

$$\frac{\text{ف}}{\text{فزت}}\left(\text{مر ع}\right) = \text{لا} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$ (157

سے کیا جا سکتا ہے۔ اِس سے یہ معلوم ہوگا کہ مستقل ع سے استوار جسم کا جمود، دیے ہوئے محور کے گِرد گردش کا لحاظ کرتے، عین اُسی طرح پیمایش ہوتا ہے جس طرح مر سے اُس کا جمود حرکت انتقال کا لحاظ کرتے ہوتا ہے۔

جسم کے ایک ذرّہ م کی توانائی بالحرکت $\frac{1}{2}$ م (سہ ر)² ہے اور اس لیے کُل توانائی بالحرکت

$$\frac{1}{2}\Sigma\left(\text{م سہ}^{2}\text{ر}^{2}\right) = \frac{1}{2}\Sigma\left(\text{م ر}^{2}\right) \times \text{سہ}^{2}$$

$$= \frac{1}{2}\,\text{مرک}^{2}\,\text{سہ}^{2} = \frac{1}{2}\,\text{ع سہ}^{2} \qquad \ldots\ldots (9)$$

ہے۔ یہاں پھر آخری شکل $\frac{1}{2}$ ع سہ² کا مقابلہ $\frac{1}{2}$ مر ع² سے کیا جا سکتا ہے جو خطی حرکت سے متعلق ہے۔

اگر ہم مساوات (۷) کو سہ سے ضرب دیں تو

$$\text{ع سہ} \frac{\text{فرسہ}}{\text{فرت}} = \text{ن سہ} = \text{ن} \frac{\text{فرطہ}}{\text{فرت}} \quad \ldots\ldots (۱۰)$$

یا

$$\frac{\text{فر}}{\text{فرت}} \left(\frac{۱}{۲} \text{ع سہ}^{۲}\right) = \text{ن} \frac{\text{فرطہ}}{\text{فرت}} \quad \ldots\ldots (۱۱)$$

چونکہ ن مف طہ سے وہ کام تعبیر ہوتا ہے [سکونیات دفعہ ۵۱] جو بیرونی قوتیں انجام دیتی ہیں جبکہ جسم زاویہ مف طہ میں سے گھومتا ہے اس لیے مساوات (۱۱) سے یہ بیان ہوتا ہے کہ کسی لمحہ پر توانائی بالحرکت ایک ایسی شرح سے بڑھ رہی ہے جو اُس شرح کے مساوی ہے جس سے جسم پر کام ہو رہا ہے۔ تکمل کرکے ہم یہ نتیجہ نکالتے ہیں کہ وقت کے کسی وقفہ میں توانائی بالحرکت کا اضافہ اُس کُل کام کے مساوی ہوتا ہے جو بیرونی قوتیں اِس وقفہ میں کرتی ہیں۔

مثال ۱۔ اگر روکنے والی اُن قوتوں کے علاوہ جو محور عائد کرتا ہے کوئی بیرونی قوتیں نہ ہوں اور اگر اِن قوتوں کا معیار محور کے گِرد صفر ہو جیسا کہ ایک کامل چکنے تکلے کی صورت میں ہوتا ہے تو (۷) سے

$$\frac{\text{فرسہ}}{\text{فرت}} = ۰ \ ، \quad \text{سہ} = \text{مستقل} \quad \ldots\ldots (۱۲)$$

مثلاً زمین کی اپنے محور کے گِرد زاویٔ رفتار مستقل ہے جہاں تک کہ زمین کو استوار اور اس کے گردش کے محور کو غیر متغیر سمجھا جا سکتا ہے۔

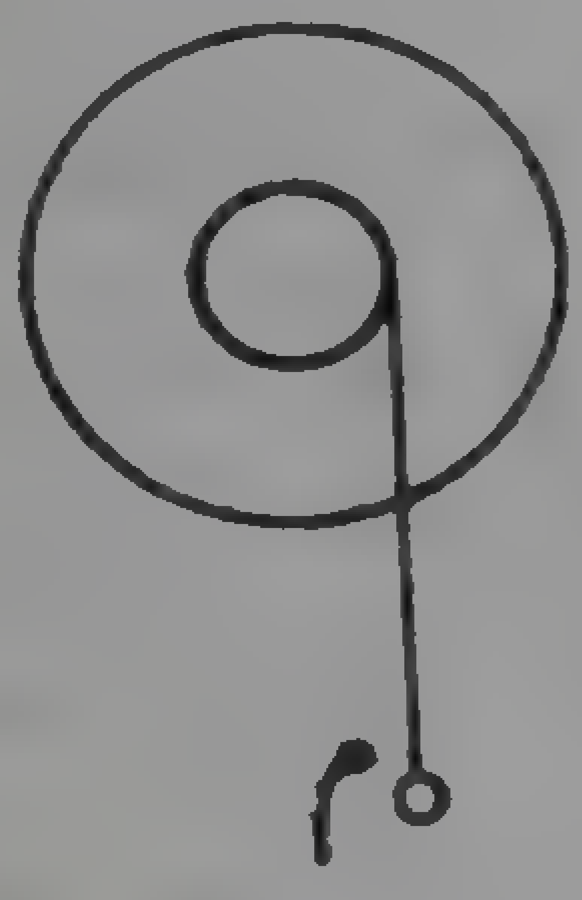
مثال ۲۔ ایک اُڑ پہیہ ایک افقی محور کے گِرد گھومنے میں آزاد ہے اور ایک ڈوری اِس کے دُھرے کے گِرد جس کا نصف قطر ب ہے لپٹی ہوئی ہے، اس کے انتصابی سیدھے حصہ کے سِرے سے ایک کمیت م لٹک رہی ہے۔

فرض کرو کہ اڑ پہیہ کے جمود کا معیار اس کے محور کے گِرد ع ہے اور اس کی زاویٔ رفتار سہ اور م کی نیچے وار رفتار ع ہے۔ محور کے گِرد معیار لینے اور رگڑ کو نظر انداز کرنے سے

$$\text{ع}\ \frac{\text{فرسہ}}{\text{فرت}} = \text{ٹ ب} \qquad \ldots\ldots\ldots\ (۱۳)$$

جہاں ٹ ڈوری کا تناؤ ہے ۔ م کی حرکت پر غور کرنے سے (۱۵۸)

$$\text{م}\ \frac{\text{فر۶}}{\text{فرت}} = \text{م ج} - \text{ٹ} \qquad \ldots\ldots\ldots\ (۱۴)$$


شکل ۴۴

نیز چونکہ پہیہ کے زاویہ سہ مف ت میں سے گھومنے پر ڈوری کے سیدھے حصہ میں ب سہ مف ت کا اضافہ ہوتا ہے اس لیے

$$\text{۶} = \text{ب سہ} \qquad \ldots\ldots\ldots\ (۱۵)$$

اب سہ کو ساقط کرنے پر

$$\left(\frac{\text{ع}}{\text{ب}^{۲}} + \text{م}\right) \frac{\text{فر۶}}{\text{فرت}} = \text{م ج} \qquad \ldots\ldots\ (۱۶)$$

اس لیے ذرہ م کا اسراع

$$\frac{\text{فر۶}}{\text{فرت}} = \frac{\text{م ب}^{۲}}{\text{ع} + \text{م ب}^{۲}}\ \text{ج} \qquad \ldots\ldots\ldots\ (۱۷)$$

ہے اور ڈوری کا تناؤ

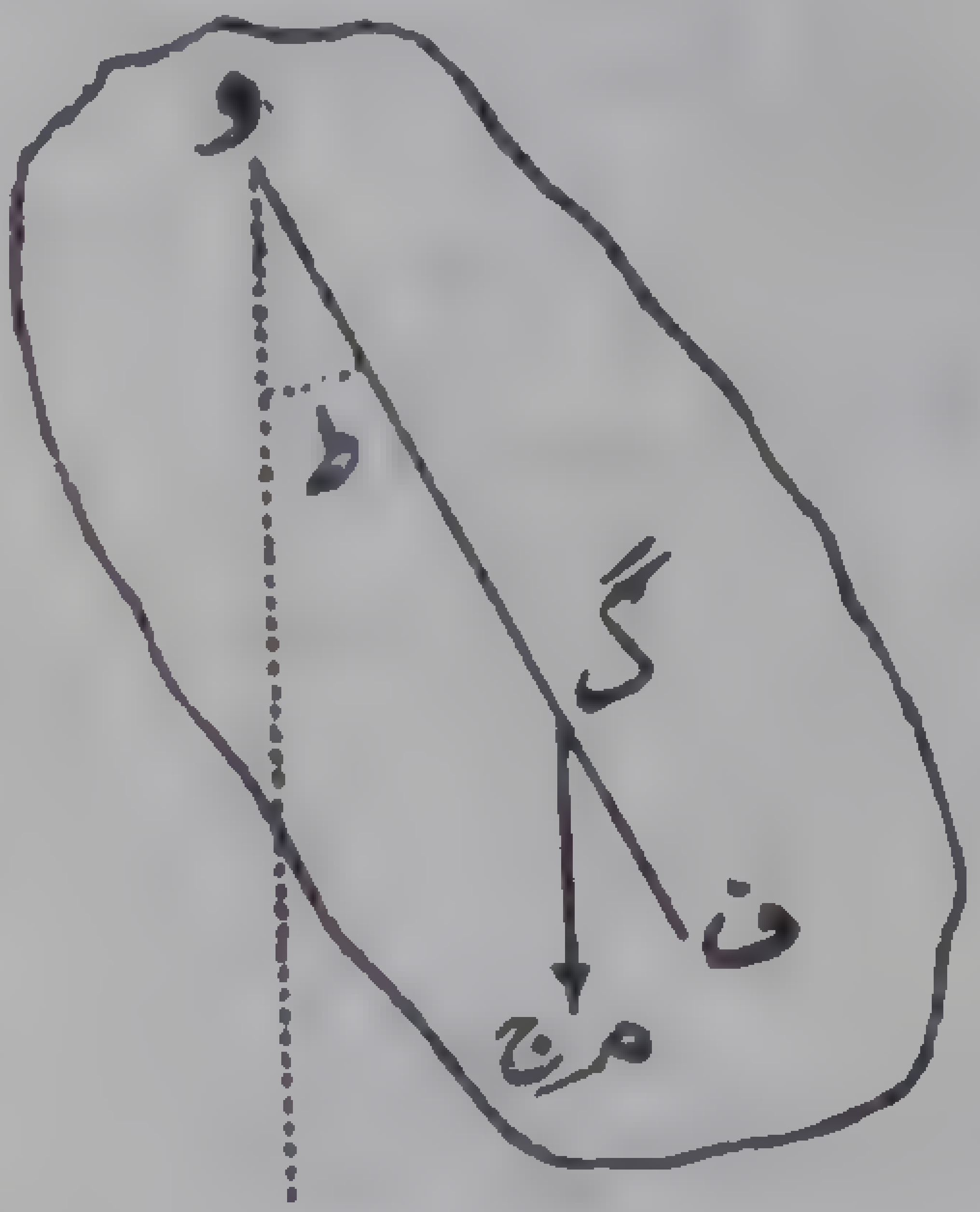
$$\text{ٹ} = \frac{\text{ع}}{\text{ع} + \text{م ب}^{۲}}\ \text{م ج} \qquad \ldots\ldots\ldots\ (۱۸)$$

ہے ۔

۵۵ ۔ مرکب رقاص ۔

اُس استوار جسم کو خواہ وہ کسی شکل یا ترکیب کا ہو "مرکب رقاص" کہتے ہیں جو ایک ثابت افقی محور کے گرد گھومنے میں آزاد ہوتا ہے جبکہ بیرونی قوتیں صرف جاذبہ اور وہ دباؤ ہوں جو محور عائد کرے ۔ یہ فرض کیا جاتا ہے کہ یہ دباؤ

محور کے گرد صفر معیار رکھتے ہیں اور رگڑ نظر انداز کی گئی ہے۔
فرض کرو کہ ط وہ زاویہ ہے جو محور اور مرکز کمیت گ میں سے گزرنے والا مستوی انتصابی سے بناتا ہے۔



شکل ۴۵

اگر جسم کی کمیت م اور محور سے گ کا فاصلہ ھ ہو تو محور کے گرد بیرونی قوتوں کا معیار جو ط کو بڑھانے کا میلان رکھتا ہے۔ م ج ھ جیب ط ہے۔ پس اگر محور کے گرد جمود کا معیار ع ہو تو دفعہ ۳۵ (۷) سے

$$\text{ع}\,\frac{\text{ف}^{2}\,\text{ط}}{\text{ف ت}^{2}} = -\,\text{م ج ھ جب ط} \quad ...(۱)$$

یہ ٹھیک وہی ہے جو طول ل کے سادہ رقاص کی صورت میں تھا (دفعہ ۳۷) بشرطیکہ

$$\text{ل} = \frac{\text{ع}}{\text{م ھ}} \quad ......(۲)$$

اگر محور کے گرد گردش کا نصف قطر ک ہو اور اس لیے $\text{ع} = \text{م ک}^{2}$ تو

$$\text{ل} = \frac{\text{ک}^{2}}{\text{ھ}} \quad ......(۳)$$

(۱۵۹) شکل ۵۴ کے مستوی کے متعلق یہ فرض کیا گیا ہے کہ وہ گ میں سے گزرنے والا ایک انتصابی مستوی ہے جو محور پر عمود اور اس سے و پر ملتا ہے۔ اگر ہم و گ کو ف تک خارج کریں اور و ف = ل تو نقطہ ف کو "اہتزاز کا مرکز" کہتے ہیں۔ طول ل کے ایک سادہ رقاص کا لنگر جو اسی محور سے لٹک رہا ہو نقطہ ف کے ساتھ ٹھیک طور پر ہم آہنگ ہو کر اہتزاز کریگا اگر اس کو اور ف کو ایک ساتھ ایک ہی رفتار سے متحرک کیا جائے۔
اگر ایک ایسے محور کے گرد جو گ میں سے گزرے اور لٹکاؤ کے محور کے متوازی ہو گردش کا نصف قطر کہ ہو تو [سکونیات دفعہ ۴۳]

ک^2 = کہ^2 + ھ^2 ....(۴)

اور اس لیے ل = ھ + $\frac{\text{کہ}^2}{\text{ھ}}$ ....(۵)

یا گ ف × گ و = کہ^2 ....(۶)

اِس رشتہ کے تشاکل سے یہ واضح ہے کہ اگر جسم کو ف میں سے گزرنے والے ایک متوازی محور سے لٹکایا جاتا تو نقطہ و اہتزاز کا نیا مرکز بنتا۔ اس کو بالعموم یہ کہہ کر بیان کیا جاتا ہے کہ لٹکاؤ اور اہتزاز کے مرکز باہم تبدیل پذیر ہیں[1]۔

لٹکاؤ کے مختلف متوازی محوروں کے لیے ایک چھوٹے اہتزاز کا دَور $\sqrt{\text{ل}}$ یا $\sqrt{\text{گ و + گ ف}}$ کے متناسب ہوگا۔ چونکہ گ ف اور گ و کا حاصل ضرب (۶) کی رو سے مستقل ہے اس لیے اُن کا مجموعہ کم سے کم ہوگا جبکہ وہ مساوی ہوں۔ پس متوازی محوروں کے کسی نظام پر غور کیا جائے تو دَور کم سے کم ہوگا جبکہ ھ = کہ اور اس لیے ل = ۲ کہ

اگر ایک مرکب رقاص کے محور کو ہٹا دیا جائے اور وہ انتصابی سے زاویہ بہ بنائے تو مرکز کمیت ایسے مستوی میں اہتزاز کریگا جو افقی کے ساتھ زاویہ بہ بناتا ہے۔ رقاص کے جاذبہ م ج کو دو اجزائے ترکیبی میں تحلیل کیا جا سکتا ہے یعنے (۱) م ج جب بہ اِس مستوی میں خط میلان اعظم کے متوازی، (۲) م ج جم بہ اِس مستوی کے عمود وار۔ ثانی الذکر جزو ترکیبی محور کے گرد صفر معیار رکھتا ہے اور اس لیے حرکت وہی ہے گویا کہ جاذبہ کے اسراع کو ج سے ج جب بہ میں تبدیل کر دیا گیا ہے۔ اس لیے مماثل سادہ رقاص کا طول اب $\frac{\text{ک}^2}{\text{ھ جب بہ}}$ کے مساوی ہے۔ اگر بہ چھوٹا ہو جیسا کہ اُن

---

[1] یہ مسئلہ ہیجنس (Huygens) سے منسوب ہے۔ L. C. ante صفحہ ۱۱۲

"افقی" رقاصوں میں ہوتا ہے جو زلزلہ پیماؤں میں استعمال کیے جاتے ہیں تو یہ طول بڑا ہوگا اور اس لیے متناظر دَور طویل ہوگا۔

توانائی پر غور کرنے سے بھی یہی نتیجہ بر آمد ہوتا ہے۔ جب رقاص اپنے توازن کے محل سے زاویہ طہ میں سے گھومتا ہے تو ایک خط میلان اعظم پر وگ کا ظِل ھ جم طہ ہے اور اس لیے و کی ہمواری کے نیچے گ ھ جم طہ جب بہ ہے۔ اس لیے توانائی بالقوہ میں اضافہ (۱۶۰)

م ج ھ (۱-جم طہ) جب بہ

ہے۔

مثال ۔ جب ایک افقی سقفی دروازہ کو چھوڑ دیا جاتا ہے تو اس کے کسی نقطہ ق کا اسراع ج سے کم یا اس سے بڑا ہوگا بموجب اس کے کہ قبضوں کے خط سے ق کا فاصلہ ل سے کم یا زیادہ ہو۔ اس لیے ایک ایسا وزن جو دروازہ پر ل سے زیادہ فاصلہ پر ٹکا ہوا ہو فوراً آزادانہ گرنا شروع کریگا۔

۵۶ - ج کی تعیُین —

کسی مقام پر ج کی قیمت کو متعین کرنے کے طریقے دفعہ ۱۱ کے ضابطہ

$$ج = \frac{۴ \pi^۲ ل}{ت^۲} \quad \text{.........} (۱)$$

پر مبنی ہوتے ہیں۔ وہ (کامل) تصوری سادہ رقاص جس کا وہاں ذکر کیا گیا ہے صریحاً موجود نہیں ہو سکتا اور عمل میں ل ایسے سادہ رقاص کا طول ہوتا ہے جو مرکب رقاص کی کسی نہ کسی شکل کے "معادل" ہوتا ہے اور فی الواقعی ایسا مرکب رقاص ہی استعمال کیا جاتا ہے۔

ایک پورے چھوٹے اہتزاز کے دَور کو بڑی صحت کے ساتھ اِس طرح معلوم کیا جا سکتا ہے کہ جھوکوں کی ایک بہت بڑی تعداد شمار کی جاتی ہے

اور وہ وقت لکھ لیا جاتا ہے جو وہ لیتے ہیں۔ ل کی قیمت معلوم کرنے میں خاص کر بڑی مشکل پیش آتی ہے۔ ج کی صحیح پیمایش کے لیے دو مختلف تجویزیں اختیار کی جاتی ہیں۔

پہلے طریقہ میں ہندسی طور پر سادہ شکل کا ایک ایسا رقاص لیا جاتا ہے جس کے لئے ل کی قیمت دفعہ ۵۵ کے ضابطہ (۵) اور ھ اور ک کی قیمتیں جو اس مخصوص شکل کے مناسب ہوں استعمال کرنے سے محسوب ہو سکے۔ مثلاً نصف قطر ا کے ایک متجانس کرہ کی صورت میں جو طول لہ کے ایک باریک تار سے لٹکا ہوا ہو $\text{ک}^2 = \frac{2}{5}\,\text{ا}^2$ [سکونیات دفعہ ۷۲] حاصل ہوتا ہے اور اس لیے

$$\text{ل} = \text{لہ} + \text{ا} + \frac{2}{5}\,\frac{\text{ا}^2}{\text{لہ} + \text{ا}} \qquad \ldots\ldots (2)$$

اگر تار کی کمیت کو نظر انداز کیا جائے۔ اگر تار کی کمیت (م) کو ملحوظ رکھا جائے اور تار کو یکساں فرض کیا جائے تو دفعہ ۵۵ کی ترقیم میں

$$(\text{ھ} + \text{م})\,\text{ک}^2 = \text{ھ}\,(\text{لہ} + \text{ا})^2 + \frac{2}{5}\,\text{ھ}\,\text{ا}^2 + \frac{1}{3}\,\text{م}\,\text{لہ}^2 \qquad \ldots (3)$$

$$(\text{ھ} + \text{م})\,\text{ھ} = \text{ھ}\,(\text{لہ} + \text{ا}) + \frac{1}{2}\,\text{م}\,\text{لہ} \qquad \ldots (4)$$

(۹۱) جہاں کرہ کی کمیت ھ ہے [سکونیات دفعہ ۷۳]۔ اس لیے

$$\text{ل} = \frac{\text{ک}^2}{\text{ھ}} = \frac{\text{ھ}\,(\text{لہ} + \text{ا})^2 + \frac{2}{5}\,\text{ھ}\,\text{ا}^2 + \frac{1}{3}\,\text{م}\,\text{لہ}^2}{\text{ھ}\,(\text{لہ} + \text{ا}) + \frac{1}{2}\,\text{م}\,\text{لہ}} \qquad \ldots (5)$$

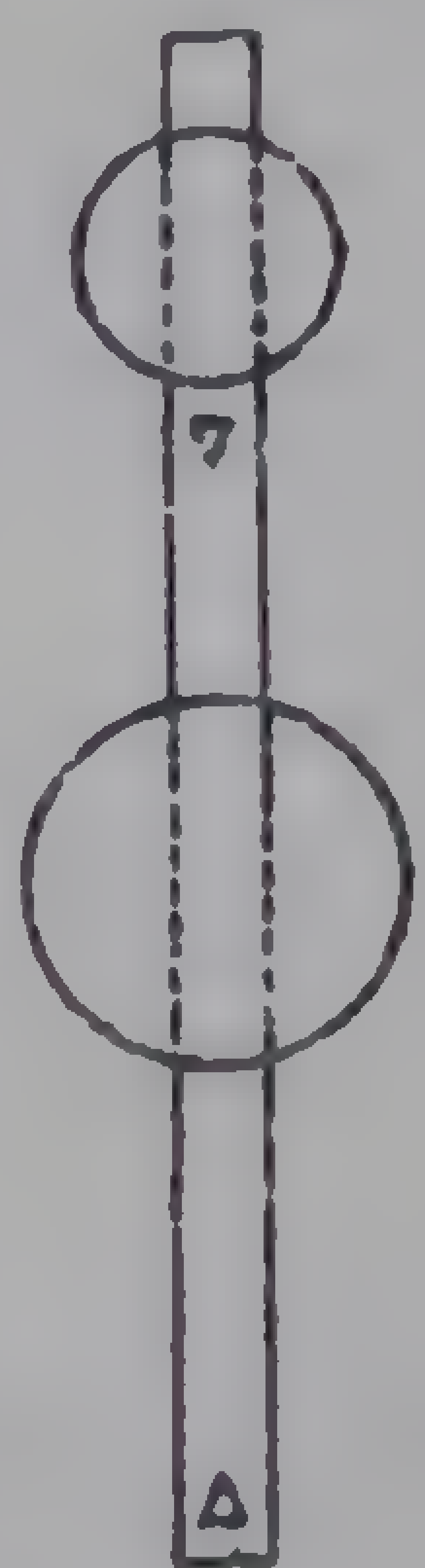
اس تجویز پر بورڈا (Borda) اور کیسینی (Cassini)[1] نے احتیاط کے ساتھ تجربے کیے۔ کرہ کے ایک قطر کے گرد کرہ کے جمود کے معیار کی نظری قیمت $\frac{2}{5}\,\text{ھ}\,\text{ا}^2$ بلاشبہ اس مفروضہ پر منحصر ہے کہ کرہ متجانس ہے۔

---

[1] Base du Systeme metrique 1810

اگر اِس میں قدرے نقص ہو تو وہ، کُرہ کے اُس نقطہ کو متغیر کرنے سے ساقط کیا جا سکتا ہے جس پر تار لگا ہوا ہے۔ لٹکانے کے طریقہ میں بھی کچھ احتیاط لازم ہے۔ اگر تار کے اوپر کے سِرے پر شکنجہ لگا دیا جائے تو تار کی سختی عمل میں آجاتی ہے اور یہ کہنا آسان نہیں ہوتا کہ لٹکاؤ کا ٹھیک نقطہ کون سا ہے۔ بورڈا کے تجربوں میں تار کو ایک بہت ہی مختصر مرکب رقاص سے باندھ دیتے ہیں اس میں ایک دھار ہوتی ہے جو افقی تختیوں پر بنائی جاتی ہے۔ اِس مختصر رقاص کے دَور کو اِس طرح مقرر کیا جاتا ہے کہ وہ، کُرہ اور تار کے دَور کے جہاں تک ممکن ہو مساوی ہو اور اس لیے موخرالذکر نظام کے دَور پر اثر ناقابل قدر ہو۔ اِس دھار کو لٹکاؤ کا نقطہ سمجھا جا سکتا ہے۔

دوسرا طریقہ جس کا حوالہ اوپر دیا گیا ہے لٹکاؤ اور اہتزاز کے مرکزوں کی باہم تبدیل پذیری کے اصول پر مبنی ہے۔ ایک رقاص جس کا کسی خاص شکل کا ہونا ضروری نہیں ہے دو دھاروں کے ساتھ بنایا جاتا ہے، یہ دھاریں ایک دوسرے کے متقابل ہوتی ہیں اور جہاں تک ممکن ہو وہ اور مرکز ثقل گ ایک ہی مستوی میں ہوتے ہیں اور اس نقطہ سے اُن کے فاصلے نمایاں طور پر نامساوی ہوتے ہیں۔ اگر یہ تدبیر ہو سکے کہ ایک چھوٹے اہتزاز کا دَور ٹھیک طور پر وہی ہو خواہ کسی دھار سے رقاص کو لٹکایا جائے تو یہ دو دھاریں لٹکاؤ اور اہتزاز کے مزدوج مرکزوں کے محلوں میں ہونگی اور ان کے درمیانی فاصلے سے ل کی قیمت ملیگی۔ کیونکہ اگر



شکل ۲۶

$$\frac{ک^2}{ہ_1} + ہ_1 = \frac{ک^2}{ہ_2} + ہ_2 = ل \qquad \ldots\ldots (6)$$

تو

$$\left(1 - \frac{ک^2}{ہ_1 ہ_2}\right)(ہ_1 - ہ_2) = 0 \qquad \ldots (7)$$

اس لیے

$$\text{کہ}^2 = \text{ھ}_1\text{ھ}_2 \text{ ، } \text{ل} = \text{ھ}_1 + \text{ھ}_2 \qquad \text{(۸)}$$

کیونکہ صورت $\text{ھ}_1 = \text{ھ}_2$ کو خارج کر دیا گیا ہے[1]

ضروری اور ٹھیک ترتیب کے حاصل کرنے کے لیے ایک دھار کا محل تغیر پذیر ہوتا ہے یا رقاص میں ایک پھسلواں وزن لگا ہوا ہوتا ہے یا یہ دونوں تدبیریں اختیار کی جاتی ہیں۔

لیکن ترتیب کبھی بھی بالکل ٹھیک نہیں ہو سکتی اور اس لیے تصحیح کی ضرورت پڑتی ہے۔ اگر مشاہدہ کردہ دور ت_1 اور ت_2 ہوں جو بالکل ٹھیک تو نہیں لیکن تقریباً مساوی ہیں اور اگر ان کے متناظر سادہ رقاصوں کے طول ل_1 ، ل_2 ہوں تو

$$\text{ل}_1 = \frac{\text{کہ}^2}{\text{ھ}_1} + \text{ھ}_1 \text{ ، } \text{ل}_2 = \frac{\text{کہ}^2}{\text{ھ}_2} + \text{ھ}_2 \qquad \text{(۹)}$$

اس لیے کہ کو ساقط کرنے سے

$$\text{ھ}_1\text{ل}_1 - \text{ھ}_2\text{ل}_2 = \text{ھ}_1^2 - \text{ھ}_2^2 \qquad \text{(۱۰)}$$

اِس کو شکل

$$\frac{1}{2}\,\frac{\text{ل}_1 + \text{ل}_2}{\text{ھ}_1 + \text{ھ}_2} + \frac{1}{2}\,\frac{\text{ل}_1 - \text{ل}_2}{\text{ھ}_1 - \text{ھ}_2} = 1 \qquad \text{(۱۱)}$$

میں لکھا جا سکتا ہے۔ اب چونکہ

$$\text{ل}_1 = \frac{\text{ج}\,\text{ت}_1^2}{4\pi^2} \text{ ، } \text{ل}_2 = \frac{\text{ج}\,\text{ت}_2^2}{4\pi^2} \qquad \text{(۱۲)}$$

اس لیے (۱۱) میں درج کرنے پر

[1] بوہنن برگر (Bohnenberger) نے اِس طریقہ کا بظاہر مشورہ دیا تھا لیکن اس کو سب سے پہلے کپتان کیٹر (Captain Kater) نے استعمال کیا تھا (Phil. Trans., 1818)۔

$$\frac{4\pi^2}{ج} = \frac{\frac{1}{2}(\bar{ت}_1^2 + \bar{ت}_2^2)}{ھ_1 + ھ_2} + \frac{\frac{1}{2}(\bar{ت}_1^2 - \bar{ت}_2^2)}{ھ_1 - ھ_2} \quad \ldots\ldots (۱۳)$$

حاصل ہوتا ہے۔

اگر $ھ_1$ اور $ھ_2$ نمایاں طور پر نامساوی ہوں تو آخری رقم نسبتاً چھوٹی ہوگی اور اس لیے $ھ_1$، $ھ_2$ کی قیمتوں کا جو اِس رقم میں واقع ہوتی ہیں بہت صحیح طور پر معلوم ہونا ضروری نہیں ہے۔ پہلی رقم کا نسب نما $ھ_1 + ھ_2$، دھاروں کے درمیان فاصلہ کو پیمائش کر کے معلوم کیا جاتا ہے۔

مثال۔ ایک عددی مثال میں فرض کرو کہ

$$\bar{ت}_1 = ۴٫۸۴۸۰۱ \text{ ثانیے}،\quad \bar{ت}_2 = ۸٫۴۸۴۸۱ \text{ ثانیے}$$

$$ھ_1 + ھ_2 = ۸۸٫۴۸۸ \text{ سمر}،\quad ھ_1 - ھ_2 = ۵۵ \text{ سمر}$$

تو

$$\frac{4\pi^2}{ج} = ۴٫۰۲۳۹ + ۰٫۰۰۰۲۰$$

اس لیے

$$ج = ۹۸۰٫۶۹ \text{ سمر فی ثانیہ فی ثانیہ}$$

$ھ_1 - ھ_2$ کی تخمین کردہ قیمت میں اگر ۵ سمر تک بھی خطا ہو تو اِس سے محسوبہ نتیجہ میں اُس حد تک کوئی اثر نہیں پڑیگا جس تک تقریب مطلوب ہے اور معطیات سے اِس حد تک ہی نتیجہ مطلوب ہے۔

۵۷۔ مروڑ کے اہتزاز۔

(۱۶۳) مختلف طبیعیاتی تجربوں میں ایک جسم کو ایک انتصابی تار کے ذریعہ لٹکایا جاتا ہے جس کے اوپر کے سرے پر شکنجہ لگا ہوا ہوتا ہے اور جو تار کے محور کے گرد مروڑ کے اہتزاز کرتا ہے۔ ہم مان لینگے کہ یہ محور، جسم کے مرکز کمیت پر اس کے جمود کا ایک صدر محور ہے [دفعہ ۵۹]۔

جب جسم کو ایک زاویہ ط میں سے گھمایا جاتا ہے تو تار کے فی اکائی

طول مروڑ کی مقدار $\frac{ط}{ل}$ ہے جہاں ل کل طول ہے ۔ اس لیے تار کی لچک کی وجہ سے جو عود کا جفت عمل میں آجاتا ہے وہ $\frac{ک\, ط}{ل}$ ہے جہاں ک ایک مستقل ہے جس کو "تار کے مروڑ کا مقیاس" کہتے ہیں۔ تار کی مادی شئے کی استواری (مہ) اور عمودی تراش کے نصف قطر (ا) کی رقوم میں [سکونیات دفعہ ۱۵۱]

$$ک = \frac{۱}{۲}\,\pi\, مہ\, ا^{۴} \qquad \text{.........(۱)}$$

آزاد ارتعاشوں کی صورت میں

$$ع\,\frac{د^{۲} ط}{د ت^{۲}} = -\,\frac{ک\, ط}{ل} \qquad \text{.........(۲)}$$

جہاں لٹکے ہوئے جسم کے جمود کا معیار گردش کے محور کے گرد ع ہے[1]۔ اس لیے حرکت سادہ موسیقی ہے جس کا دور

$$ت = ۲\pi \sqrt{\frac{ع\, ل}{ک}} \qquad \text{.........(۳)}$$

ہے ۔ اگر ع معلوم ہو تو اس سے ک کو معلوم کرنے کا ایک تجرباتی طریقہ حاصل ہوتا ہے چنانچہ

$$ک = \frac{۴\pi^{۲}\, ع\, ل}{ت^{۲}} \qquad \text{.........(۴)}$$

تب (۱) سے مہ کی قیمت ماخوذ ہو سکتی ہے ۔

اگر ع نامعلوم ہو تو ایک دوسرا تجربہ کیا جا سکتا ہے جس میں منتظم شکل کا ایک جسم مثلاً مستطیلی یا اسطوانی ڈنڈا جو افقاً رکھا ہوا ہو یا ایک پتلا اسطوانی خول جو انتصابی محور کے ساتھ رکھا ہوا ہو لٹکے ہوئے جسم سے متشاکلاً لگا ہوا ہوتا ہے ۔

[1] یہاں یہ مان لیا گیا ہے کہ ک اور اس لیے مہ حرکیاتی ناپ میں بیان کیے گئے ہیں۔

اگر دَور اس طرح تَ تک بڑھ جائے تو

$$ک = \frac{۴\pi^2\,(ع + ع_{٫})\,ل}{تَ^2} \qquad .... (۵)$$

(۱۹۴) جہاں ثبت شدہ جسم کے جمود کا معیار جو وزن کرنے اور محسوب کرنے سے معلوم ہوا ہے ع٫ ہے۔ اس کو (۴) کے ساتھ لینے سے

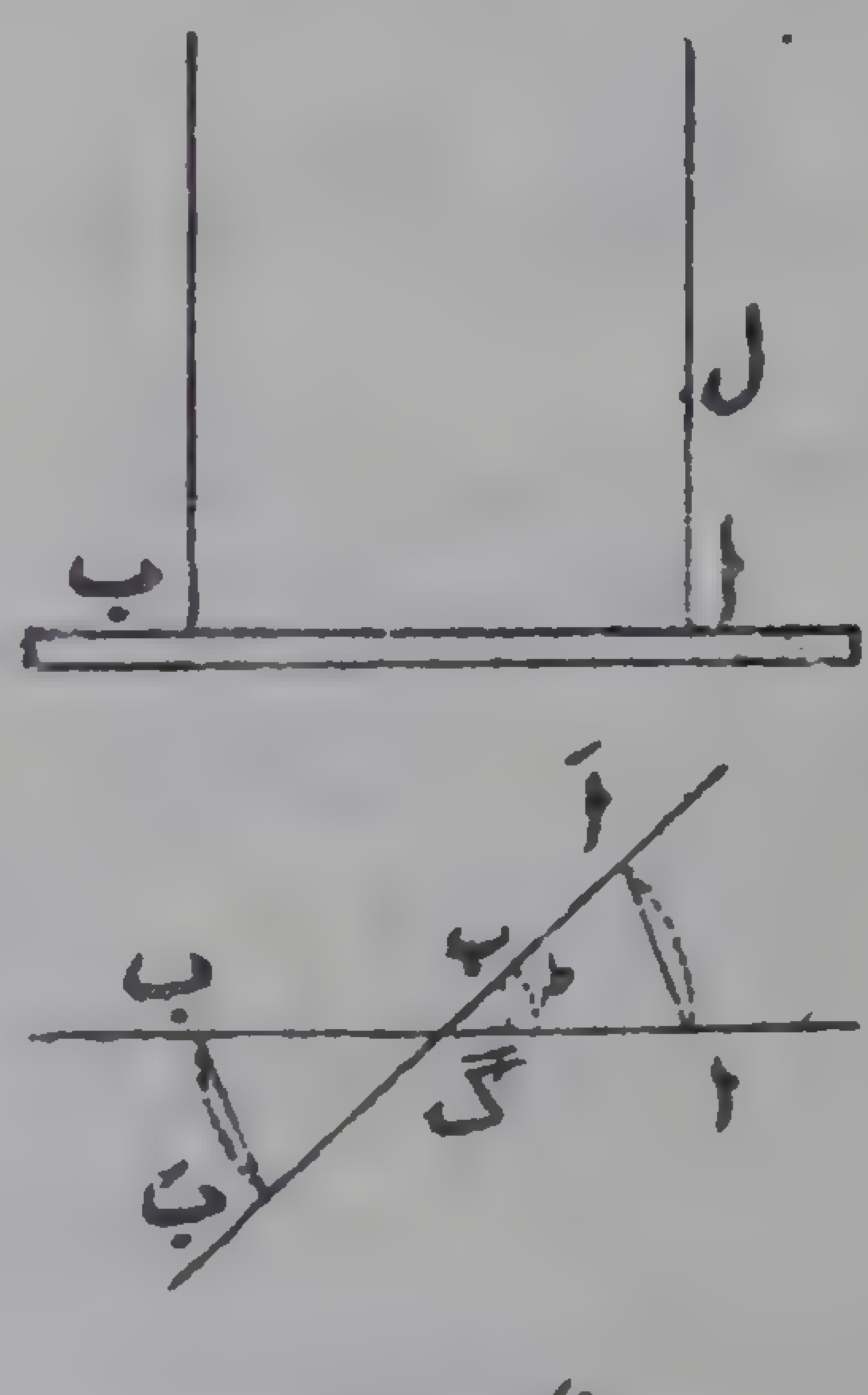
$$ک = \frac{۴\pi^2\,ع_{٫}\,ل}{تَ^2 - ت^2} \qquad .... (۶)$$

حاصل ہوتا ہے۔ نیز ہم ع کی قیمت نکال سکتے ہیں چنانچہ

$$\frac{ع}{ع_{٫}} = \frac{ت^2}{تَ^2 - ت^2} \qquad .... (۷)$$

۵۸۔ دو ریسمانی لٹکاؤ۔

ایک ڈنڈا دو مساوی انتصابی ڈوریوں سے لٹکا ہوا ہے، اس کا مرکز کمیت گ اِن ڈوریوں کے مستوی میں ہے اور ان کے وسط میں واقع ہے۔



شکل ۴۲

فرض کرو کہ ڈنڈے کی کمیت مر، گ میں سے گزرنے والے ایک انتصابی محور کے گرد اس کا گردش کا نصف قطر ک، ڈوریوں کے درمیان جبکہ وہ انتصابی ہوں فاصلہ ۲ب، اور اِن کا طول ل ہے۔

جب ڈنڈے کو گ میں سے گزرنے والے انتصابی کے گرد ایک چھوٹے زاویہ ط میں سے گھمایا جاتا ہے تو

ہر ڈوری کا نچلا سرا ایک چھوٹی قوس مرتسم کرتا ہے جس کو کافی طور پر افقی اور ب طہ کے مساوی خیال کیا جا سکتا ہے اور نیز انتصابی کے ساتھ ہر ڈوری کا میلان تقریباً $\frac{\text{ب طہ}}{\text{ل}}$ ہو جاتا ہے۔ چونکہ گ کا انتصابی ہٹاؤ طہ میں دوسرے رتبہ کا ہے اس لیے ہر ڈوری کا تناؤ تقریباً مستقل اور $\frac{1}{2}$ مرج کے مساوی ہے۔ اس لیے ہر تناؤ کا افقی برزو ترکیبی تقریباً $\frac{1}{2}\,\frac{\text{مرج ب طہ}}{\text{ل}}$ ہے۔ چونکہ یہ اجزائے ڈنڈے کے تقریباً علی القوائم ہیں اس لیے ان سے ایک جفت $\frac{\text{مرج ب}^2\text{ طہ}}{\text{ل}}$ حاصل ہوتا ہے۔ پس ایک آزاد ارتعاش یہیں

$$\text{مرکہ}^2\,\frac{\text{فز}^2\text{طہ}}{\text{فزت}^2} = -\text{مرج}\,\frac{\text{ب}^2}{\text{ل}}\,\text{طہ} \qquad \text{(۱)}$$

یا

$$\frac{\text{فز}^2\text{طہ}}{\text{فزت}^2} + \frac{\text{ج ب}^2}{\text{کہ}^2\text{ ل}}\,\text{طہ} = 0 \qquad \text{(۲)}$$

(۱۶۵) اس لیے دور

$$\text{ت} = 2\pi\sqrt{\frac{\text{کہ}^2\text{ ل}}{\text{ج ب}^2}} \qquad \text{(۳)}$$

ہے۔

۵۹۔ ثابت محور پر تعامل۔

ایک جسم جو ایک ثابت محور کے گرد گردش کر رہا ہو اِس محور پر عام طور پر بعض دباؤ یا تعامل عائد کریگا۔

اول فرض کرو کہ جسم پر کوئی بیرونی قوتیں نہیں ہیں اِلّا محور پر کی روکنے والی قوتوں کے جو بلاشبہ زیرِ بحث تعاملوں کے مساوی اور مخالف ہیں۔ ہم دیکھ چکے ہیں کہ اگر رگڑ کی قوتوں کو نظر انداز کر دیا جائے تو زاویئی رفتار سہ مستقل ہوتی ہے۔

ثابت محوروں کے گرد زاویئی معیارِ حرکت کی تبدیلی کی شرحوں کو محسوب کرنے کی بجائے موجودہ صورت میں ڈلمبرٹ کے اصول سے مدد لینا

زیادہ سہولت بخش ہے۔ اِس اصول کی رو سے روکنے والی قوتیں، اُلٹی موثر قوتوں کے پورے نظام کے ساتھ توازن میں ہوتی ہیں۔ اب چونکہ سہ متقل ہے اس لیے وہ اُلٹی موثر قوت جو ایک ذرہ م پر محور سے فاصلہ ر سے عمل کرتی ہے "مرکز گریز قوت" "م سہ² ر" (باہروار) ہوگی۔ اگر محددوں کے قائم محور لیئے جائیں اور محور و ی گردش کے محور پر منطبق ہو تو اِس مرکز گریز قوت کے تین اجزائے ترکیبی

م سہ² لا، م سہ² ما۔ ....(۱)

ہونگے جہاں م کے محدد لا، ما، ی ہیں۔ اِس لیے محددوں کے محوروں کے گرد اس قوت کے معیار علی الترتیب

- م سہ² مای، م سہ² لای۔ ....(۲)

ہونگے۔ اس لیے زیر بحث تعاملوں کے اجزائے ترکیبی

سہ² Σ (م لا)، سہ² Σ (م ما)۔

یا سہ² م لاَ ، سہ² م اَ ۔ ....(۳)

ہونے چاہئیں جہاں کُل کمیت م سے تعبیر کی گئی ہے اور مرکز کمیت کے محدد لاَ ، اَ ہیں۔ نیز و لا، و ما، و ی کے گرد تعاملوں کے معیار

- سہ² × Σ (م مای)، سہ² × Σ (م لای)، .. (۴)

ہونے چاہئیں۔ اگر ہم یہ خیال کریں کہ محور لا اور ما جسم کے ساتھ گردش کرتے ہیں تو اِن جملوں میں سہ² کے سر متقل ہونگے جو صرف جسم کی کمیت کی تقسیم پر منحصر ہونگے۔

پس یہ معلوم ہوتا ہے کہ اگر کوئی جسم ایک ثابت نقطہ و کے گرد گھومنے (۱۶۹)
میں آزاد ہو اور اُس کو و میں سے گزرنے والے کسی دیئے ہوئے محور کے گرد
گردش دی جائے تو وہ اِس طرح گردش جاری نہیں رکھیگا جب تک کہ جملے (۴)

معدوم نہ ہوں ۔ روکنے والی قوتیں مطلوب ہونگی جن کے معیار ان کے مساوی اور مخالف ہیں ۔ اس لیے و ی‘ آزاد دائم گردش کا ممکن محور ہوگا اگر

$$\Sigma \text{ (م ما ی) } = \cdot \text{ ، } \Sigma \text{ (م لا ی) } = \cdot \quad \ldots\ldots \text{ (۵)}$$

ایسی صورت میں زیر بحث محور کو نقطہ و پر ”جمود کا صدر محور“ کہتے ہیں ۔ یہی وہ سلسلہ تھا جس کے ضمن میں ”جمود کے صدر محوروں کا نظریہ“ پیدا ہوا[1]۔

جب شرطیں (۵) پوری ہوں تو ثابت نقطہ و پر کے تعامل کے اجزائے ترکیبی (۳) سے حاصل ہوتے ہیں ۔

چونکہ جمود کے حاصل ضربوں Σ (م ما لا)، Σ (م لا ی) سے گردش کے محور کا اپنی اصلی سمت سے منحرف ہونیکا میلان پیمایش کیاجاتا ہے اس لیے اُن کو بعض اوقات ”انحرافی معیار“ کہتے ہیں ۔

اب ہم پھر ایک ثابت محور کے گرد گردش کی طرف رجوع ہوتے ہیں ۔

فرض کرو کہ ضروری روک (قید) دو چکنے سہاروں (Bearings) کے ذریعہ لگائی گئی ہے چنانچہ وہ دو قوتوں (ف‌۱، ق‌۱، ۰) اور (ف‌۲، ق‌۲، ۰) پر مشتمل ہے ۔ نیز فرض کرو کہ محور لا کو اس طرح منتخب کیاگیا ہے کہ وہ مرکز کمیت گ میں سے گزرتا ہے ۔ اگر ان دو سہاروں کے فاصلے و سے اس کے



شکل ع۴۵

[1] جے‘ اے سیگنر (۱۷۵۵)

مخالف جانبوں میں ا_1، ا_2 ہوں تو

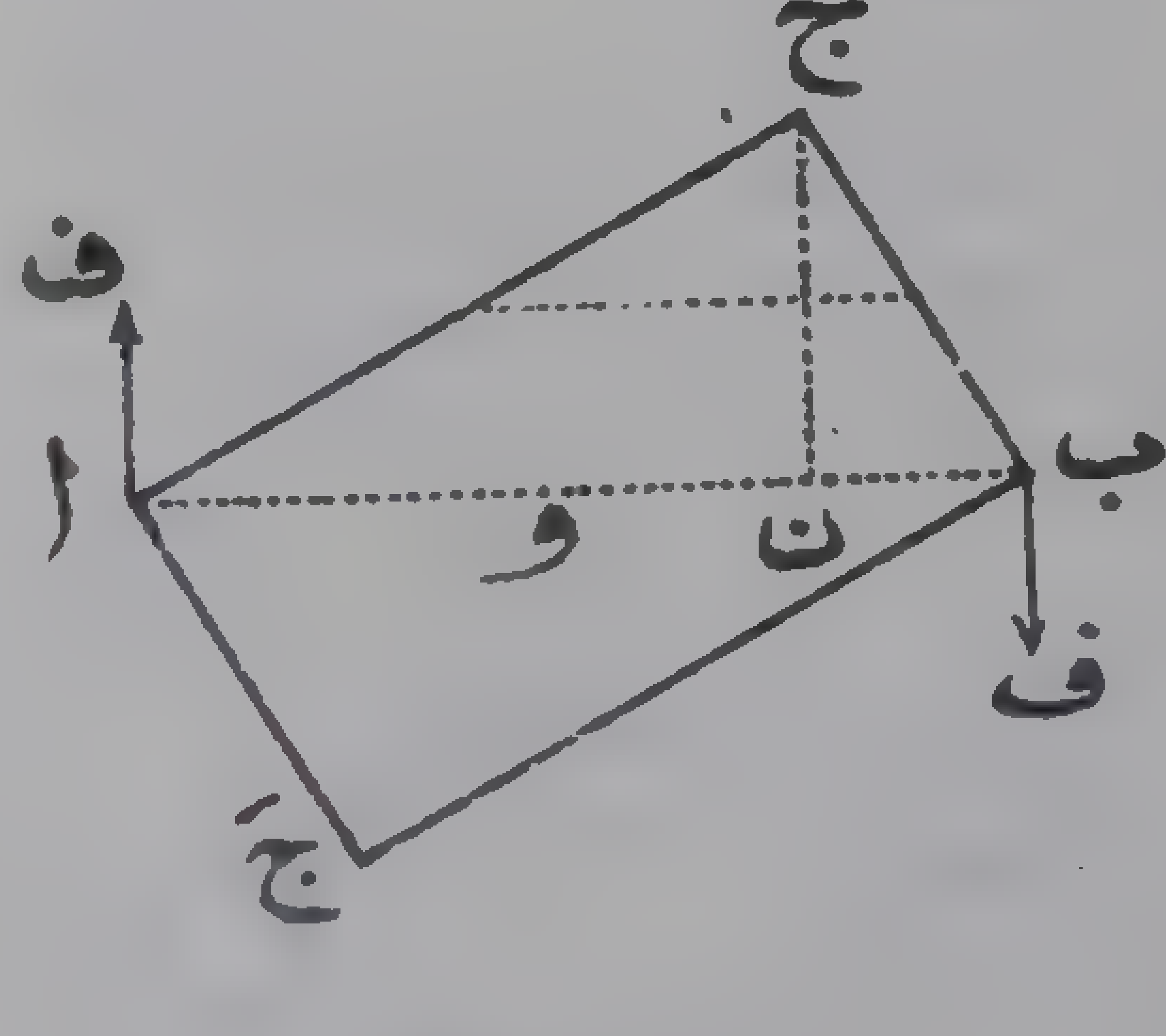
$$\text{ف}_1 + \text{ف}_2 = -\text{سہ}^2 \times \text{م}\,\bar{\text{لا}}\ ،\quad \text{ق}_1 + \text{ق}_2 = \cdot \qquad \ldots\ldots (6)$$

$$\left.\begin{aligned} -\text{ق}_1\text{ا}_1 + \text{ق}_2\text{ا}_2 &= \text{سہ}^2\ \text{ح}\ (\text{م ا ی})\ ، \\ \text{ف}_1\text{ا}_1 - \text{ف}_2\text{ا}_2 &= -\text{سہ}^2\ \text{ح}\ (\text{م لا ی}) \end{aligned}\right\} \qquad \ldots\ldots (7)$$

اِن ضابطوں سے ف، ف، ق، ق معلوم ہو سکتے ہیں۔ چونکہ
اِن قوتوں کی سمتیں جسم کے ساتھ گردش کرتی ہیں اس لیے سہاروں پر بالعموم (۱۶۷)
ایک دَوری زور ہوگا۔ اگر دَور $\frac{2\pi}{\text{سہ}}$، سہاروں کے لچک کے ارتعاش کے
طبعی دَور پر تقریباً منطبق ہو جائے تو زبردست اہتزاز پیدا ہو سکتے ہیں جس کا
اصول دفعہ ۱۳ میں بیان ہو چکا ہے۔ جدید تیز رفتار میکا نیت کے "متوازن
کرنے" کے سلسلہ میں اِن امور پر غور کرنا بہت ضروری اور اہم ہے۔ نہ صرف
یہ ضروری ہے کہ مرکز کمیت گردش کے محور میں واقع ہو بلکہ یہ بھی کہ گردش کا
محور صدر محور ہونا چاہیے۔ اِن شرطوں کے تحت

$$\text{ف}_1 = \cdot\ ،\ \text{ف}_2 = \cdot\ ،\ \text{ق}_1 = \cdot\ ،\ \text{ق}_2 = \cdot$$

حاصل ہوتے ہیں۔



شکل ۴۹

مثال ۔ ایک ایکساں مستطیلی تختی اج ب جَ وتر اب کے گرد گردش کرتی ہے اور وہ ا اور ب پر چکنے سہاروں کے ذریعہ مقید ہے۔

وہ تعامل (ف) جو یہ سہارے عائد کرتے ہیں صریحاً مساوی اور مخالف ہونگے اور مستطیل کے مستوی میں واقع ہونگے۔ تختی

پانچ ذرّوں کے ساتھ ہم معیاری (Equimomental) ہے (سکونیات دفعہ ۷۸) جن میں سے چار ذرّے، ہر ایک ۱/۴ م کمیت کا، ضلعوں کے وسطی نقطوں پر اور ایک ذرّہ، ۱/۳ م کمیت کا، اب کے وسطی نقطہ (و) پر ہے، م سے کل کمیت تعبیر ہوتی ہے۔ پس و کے گرد معیار لینے سے

$$\text{ف} \times \text{اب} = ۲ \times \frac{۱}{۴}\,\text{م}\,\frac{۲}{۳} \times \frac{۱}{۲}\,\text{جن} \times \text{ون}$$

جہاں اب پر ج کا قائم ظِل ن ہے۔ اب

$$\text{ون} = \frac{\text{اج}^۲ - \text{جب}^۲}{۲\,\text{اب}}\text{، } \quad \text{جن} = \frac{\text{اج} \times \text{جب}}{\text{اب}}$$

اس لیے اج = لا اور ب ج = ب رکھنے سے

$$\text{ف} = \frac{۱}{۱۲}\,\text{م}\,\frac{۲}{۳}\;\frac{\text{اب}\,(\text{ا}^۲ - \text{ب}^۲)}{\frac{۳}{۲}(\text{ا}^۲ + \text{ب}^۲)} \qquad \ldots\ldots\ldots (۸)$$

یہ معدوم ہوگا، جیسا کہ ہونا چاہیئے، اگر ا = ب

۶۰۔ رقاص پر اطلاق۔

گزشتہ دفعہ کے طریقوں کو آسانی سے اُس صورت کے لیے موزوں بنایا جاسکتا ہے جبکہ جسم پر، ثابت محور کی قید کرنیوالی قوتوں کے علاوہ، بیرونی قوتیں بھی عمل کریں۔

سہولت کے مدنظر ہم مرکب رقاص کی صورت لینگے اور فرض کرینگے کہ لٹکاؤ کا محور نقطہ و پر جمود کا ایک صدر محور ہے جہاں نقطہ و حسب تعریف مندرجہ دفعہ ۵۵ وہ نقطہ ہے جس پر محور ایک مستوی کو جو اُس کے عمودوار ہے اور مرکز کمیت میں سے گزرتا ہے قطع کرتا ہے۔ یہ شرط صریحاً پوری ہوگی اگر (۱۶۸)

بہ مستوی جسم کا تشاکل کا مستوی ہو۔

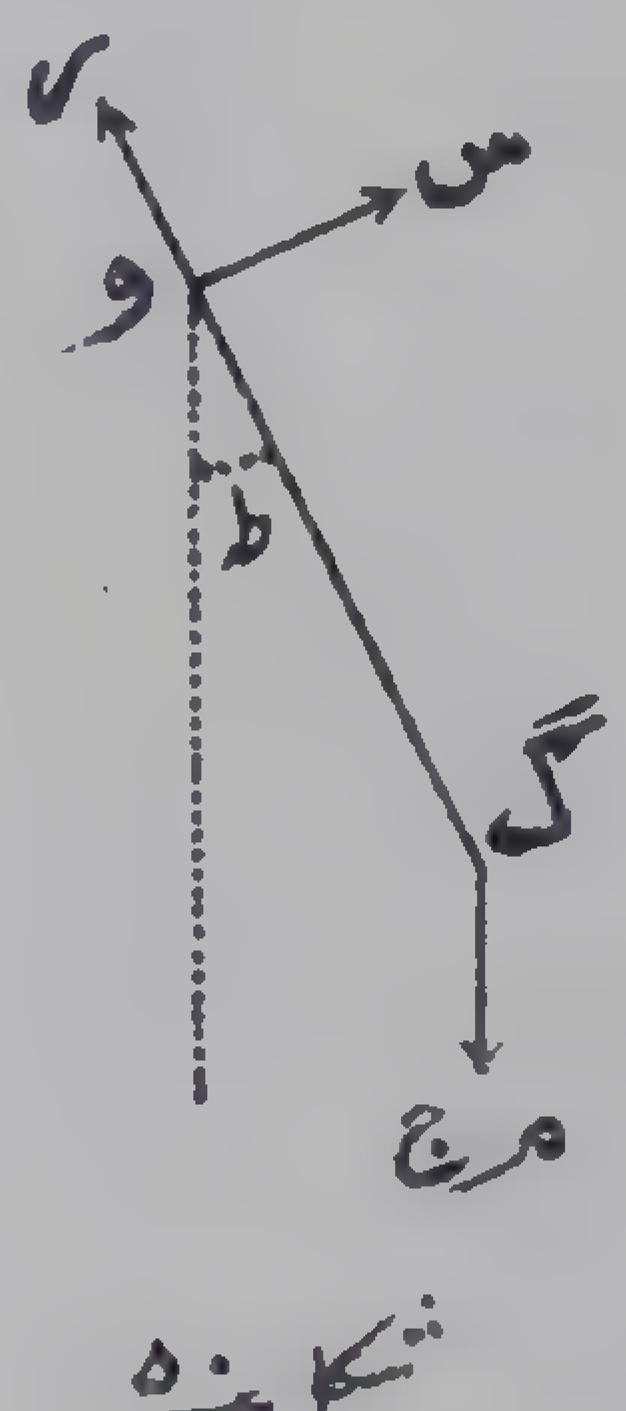
خطی معیار حرکت کے اصول سے مطلوبہ نتیجے آسانی سے حاصل ہوتے ہیں۔ رقاص پر محور کا تعامل اب و میں سے گزرنے والی ایک واحد قوت میں تحویل ہوگا۔ اس کو آسانی سے دو اجزائے ترکیبی میں تحلیل کیا جا سکتا ہے یعنے (ا) ر، سمت گ و میں اور (۲) س، گ و کے علی القوائم (دیکھو شکل)۔

چونکہ گ کی حرکت وہی ہے گویا کہ تمام کمیت وہاں مرتکز ہے اور اُس پر تمام بیرونی قوتیں اپنی اصلی سمتوں کے متوازی عمل کرتی ہیں اس لیے گ و پر اور اس کے علی القوائم تحلیل کرنے سے

$$\left.\begin{array}{l} \text{م ھ طٰ}^{۲} = \text{ر} - \text{م ج جم ط} \\ \text{م ھ طؔ} = \text{س} - \text{م ج جب ط} \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots (۱)$$

ترقیم وہی ہے جو دفعہ ۵۵ میں استعمال کی گئی تھی۔ اس لیے

$$\left.\begin{array}{l} \text{ر} = \text{م ھ طٰ}^{۲} + \text{م ج جم ط} \\ \text{س} = \text{م ھ طؔ} + \text{م ج جب ط} \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots (۲)$$



شکل نمبر ۵۰

اب دفعہ ۵۵ (۱) سے

$$\text{طؔ} = -\frac{\text{ج ھ}}{\text{ک}^{۲}} \text{ جب ط} \cdots\cdots (۳)$$

نیز توانائی کی مساوات

$$\frac{۱}{۲} \text{م ک}^{۲} \text{ طٰ}^{۲} = \text{م ج ھ جم ط} + \text{مستقل} \cdots (۴)$$

ہے جہاں بائیں جانب کا جملہ اُس کام کو تعبیر کرتا ہے جو جاذبہ نے کیا۔ اس لیے

$$\text{طٰ}^{۲} = \frac{۲ \text{ ج ھ}}{\text{ک}^{۲}} (\text{جم ط} + \text{ج}) \cdots\cdots (۵)$$

جہاں ج کوئی مستقل ہے۔ (۳) اور (۴) سے قیمتیں لیکر (۲) میں درج کرنے سے

$$\text{ر} = \text{مرج جم ط} + \frac{\text{۲ مرج ھ}^{2}}{\text{ک}^{2}}\ (\text{جم ط} + \text{ج})\ \ldots\ldots(۶)$$

اور

$$\text{س} = \text{مرج}\ (\text{۱} - \frac{\text{ھ}^{2}}{\text{ک}^{2}})\ \text{جب ط} = \frac{\text{مرج کہ}^{2}}{\text{ک}^{2}}\ \text{جب ط}\ \ldots(۷)$$

دفعہ ۵۵ (۴) کی رو سے۔

ج کی قیمت ابتدائی شرطوں پر منحصر ہوگی۔ اگر رقاص میلان عہ پر آکر ساکن ہو جائے تو ج = ۔ جم عہ اور اس لیے (۱۶۹)

$$\frac{\text{ر}}{\text{مرج}} = \text{جم ط} + \frac{\text{۲ ھ}}{\text{ل}}\ (\text{جم ط} - \text{جم عہ})\ \ldots\ldots(۸)$$

$$\frac{\text{س}}{\text{مرج}} = (\text{۱} - \frac{\text{ھ}}{\text{ل}})\ \text{جب ط}\ \ldots\ldots(۹)$$

جہاں مماثل سادہ رقاص کا طول ل ہے۔

مثال۔ ایک یکساں ڈنڈے کی صورت میں جو عین کامل گردشیں کرتا ہے عہ = π ، ل = $\frac{۴}{۳}$ ھ حاصل ہوتے ہیں اور اس لیے

$$\left.\begin{aligned} \frac{\text{ر}}{\text{مرج}} &= \frac{۱}{۲}\ (\text{۳} + \text{۵ جم ط}) \\ \frac{\text{س}}{\text{مرج}} &= \frac{۱}{۴}\ \text{جب ط} \end{aligned}\right\}\ \ldots\ldots(۱۰)$$

جزو ترکیبی ر علامت تبدیل کرتا ہے جبکہ جم ط = ۔ $\frac{۳}{۵}$ یا ط = ۱۲۷° تقریباً

مثالیں (۱۳)

(ثابت محور کے گرد گردش)

۱۔ ایک یکساں قرص جس کا قطر ایک فٹ ہے ۱۰ پونڈ وزنی ہے۔ وہ جفت (فٹ پونڈوں میں) معلوم کرو جو ۱۰ ثانیوں میں ۱۰ گردشیں فی ثانیہ کی زاویی رفتار پیدا کرے۔ [۲۴۵ء۱]

۲۔ یہ فرض کر کے کہ لوہے کی کثافت ۷ء۸ ہے اور

ج = ۹۸۰ سمر فی ثانیہ فی ثانیہ

لوہے کے ایک یکساں ٹھوس کرہ کی توانائی (کلوگرام میٹر میں) معلوم کرو جس کا نصف قطر ایک ڈیسی میٹر ہے اور جو ۵ گردشیں فی ثانیہ کی شرح سے ایک قطر کے گرد گھوم رہا ہے۔ [۶ء۵۷]

۳۔ ایک گردش نما کو ۲ فٹ لمبی ڈوری کے ذریعہ جو دُھرے (Axle) کے گرد لپٹی ہوئی ہے اور جس کو ۱۰ پونڈ کے تناؤ سے کھینچا گیا ہے گھمایا گیا ہے۔ پیدا شدہ زاویی رفتار فی ثانیہ گردشوں میں، یہ فرض کر کے معلوم کرو کہ گردش نما ایک دائری قرص کے مماثل ہے جس کا قطر ۴ انچ اور وزن ۳ پونڈ ہے۔ [۲۹]

۴۔ ایک یکساں دائری قرص جس کا نصف قطر ۱۰ سمر اور وزن ۱ کیلوگرام ہے اپنے محور کے گرد جو افقی ہے آزادانہ گھوم سکتا ہے۔ جب اس کو ۱۰۰ گردشیں فی منٹ کی شرح سے متحرک کیا جاتا ہے تو وہ رگڑ کی ایک قوت سے جو کور کے حاشیہ پر عمل کرتی ہے ایک منٹ میں ساکن ہو جاتا ہے۔ اس قوت کو مستقل فرض کر کے اس کی مقدار گراموں میں معلوم کرو۔ [۰ء۸۹]

۵۔ اگر زمین سرد ہونے سے یکساں طور پر سکڑے تو ثابت کرو کہ جب اس کا نصف قطر بقدر $\frac{1}{n}$ ویں حصہ کے گھٹتا ہے تو دن کا طول بقدر $\frac{2}{n}$ ویں حصہ کے گھٹیگا۔

۶ ۔ ایک اڑ پہیہ کی کمیت ۲۰ پونڈ ہے اور ایک پونڈ کی ایک کمیت ایک ڈوری سے لٹک رہی ہے جو دُھرے کے گرد لپٹی ہوئی ہے اور دُھرا افقی ہے ۔ یہ مشاہدہ کیا گیا کہ یہ کمیت سکون سے حرکت کر کے ۸ ثانیوں میں ۵ فٹ نیچے اترتی ہے ۔ اڑ پہیہ کا گردش کا نصف قطر معلوم کرو اگر دُھرے کا نصف قطر ۲ انچ ہو۔ [۴ء۶ انچ]

(۱۷۰) ۷ ۔ ایک اڑ پہیہ جس کا جمود کا معیار ع ہے زاویئی رفتار سہ سے گردش کر رہا ہے ۔ اس کے دُھرے کا نصف قطر ا ہے اور اثنائے گردش میں ایک ہلکی ڈوری اس کے دُھرے پر لپٹتی جاتی ہے جہاں ڈوری سے ایک کمیت م جو نیچے فرش پر ٹکی ہوئی ہے بندھی ہے ۔ وہ نسبتیں معلوم کرو جن میں پہیہ کی زاویئی رفتار اور نظام کی توانائی بالحرکت فوراً گھٹ جاتے ہیں جبکہ ڈوری تن جاتی ہے ۔

۸ ۔ ایک وزن نصف قطر ب کے ایک دُھرے سے لٹکتا ہے اور اس کو ایک قوت ف سے جو نصف قطر ا کے ایک ہم مرکز پہیہ کے محیط پر مماس وار لگائی گئی ہے توازن میں رکھا گیا ہے ۔ ثابت کرو کہ اگر ف کی بجائے ایک قوت فَ لگائی جائے تو وزن ' اسراع

$$\frac{(\text{فَ} - \text{ف})\ \text{اب}}{\text{ع} + \text{ف}\ \frac{\text{اب}}{\text{ج}}}$$

سے اوپر چڑھیگا جہاں پہیہ اور دُھرے کا جمود کا معیار ع ہے ۔

۹ ۔ دو کمیتیں م_1 اور م_2 ایک ڈوری سے بندھی ہوئی ہیں اور ڈوری ایک چرخی پر سے جیسا کہ ایٹوڈ کی مشین میں ہوتا ہے گزرتی ہے ۔ چرخی کا نصف قطر ا اور جمود کا معیار ع ہے ۔ ثابت کرو کہ جب یہ نظام آزادانہ حرکت کر رہا ہو تو سہاروں پر چرخی کا دباؤ اُس دباؤ سے بقدر

$$\frac{(\text{م}_1 - \text{م}_2)^2\ \text{ج}}{\text{م}_1 + \text{م}_2 + \frac{\text{ع}}{\text{ا}^2}}$$

کے کم ہے جو ہوتا اگر کمیت $\text{م}_1 + \text{م}_2$ دو ضلعوں میں مساویانہ تقسیم ہوتی۔

۱۰۔ ایک مشین میں جس میں رگڑ اور جمود نہیں ہے دو وزن ف اور و جو انتصابی رسیوں سے لٹک رہے ہیں ایک دوسرے کو متوازن کرتے ہیں۔ اگر ان کی بجائے وزن فَ اور وَ رکھے جائیں جو حرکت مابعد میں انتصاباً حرکت کرتے ہیں تو ثابت کرو کہ فَ اور وَ کا مرکز کمیت اسراع

$$\text{ج} \times \frac{(\text{ف}\,\text{وَ} - \text{فَ}\,\text{و})^2}{(\text{ف}^2\,\text{وَ} + \text{فَ}\,\text{و}^2)(\text{فَ} + \text{وَ})}$$

کے ساتھ نیچے اُتریگا۔

۱۱۔ ایک کھمبے کو اِس کے نچلے سرے پر سہارا گیا ہے اور یہ سرا نصف قطر ر کے ایک افقی دائرہ کے گرد مستقل زاوئی رفتار سے چلایا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ کھمبا انتصابی کے ساتھ مستقل میلان عہ قائم رکھ سکتا ہے بشرطیکہ

$$\text{سہ}^2 \left(\frac{\text{ا ر}}{\text{جب عہ}} - \text{ک}^2 \right) = \frac{\text{ج ا}}{\text{جم عہ}}$$

جہاں نچلے سرے کے لحاظ سے گروش کا نصف قطر ک ہے اور اِس سرے سے مرکز کمیت کا فاصلہ ا ہے۔

مثالیں (۱۴)

(مرکب رقاص وغیرہ)

۱۔ ایک یکساں کُرہ جس کا نصف قطر ۱۰ سمر ہے ایک مہین ڈوری سے جس کا طول ایک میٹر ہے لٹکتا ہے۔ مماثل سادہ رقاص کا طول معلوم کرو۔

[۱۰۵۶.۹۵ سمر]

۲۔ ایک پہیہ اپنی کور کے اندرونی رخ پر ایک عرضی افقی دھار پر ٹکا ہوا ہے جس کا فاصلہ مرکز سے ۳ فٹ ۲ انچ ہے۔ دھار کے گرد ایک چھوٹے اہتزاز کا دَور ۶۵ء۲ ثانیہ معلوم ہوا۔ مرکز کے گرد پہیہ کا گردش کا نصف قطر معلوم کرو۔
(مان لو کہ ج = ۲ء۳۲)　　[۲ فٹ ۲ء۱۰ انچ]

(۱۷۱) ۳۔ کمیتوں مر، مَر کے دو مرکب رقاص ایک ہی افقی محور کے گرد جھول سکتے ہیں۔ اِس محور سے مراکزِ ثقل کے فاصلے ھ، ھَ ہیں اور مماثل سادہ رقاصوں کے طول ل، لَ ہیں۔ اگر ان مرکب رقاصوں کو باہم باندھ دیا جائے تو ثابت کرو کہ وہ طول

$$\frac{\text{مر ھ ل} + \text{مَر ھَ لَ}}{\text{مر ھ} + \text{مَر ھَ}}$$

کے ایک سادہ رقاص کے مانند اہتزاز کرینگے۔

۴۔ ایک ڈنڈا جس کو ایک دائرہ کی قوس کی شکل میں خمایا گیا ہے اپنے وسطی نقطہ کے گرد ایک انتصابی مستوی میں جھولتا ہے۔ ثابت کرو کہ مماثل سادہ رقاص کا طول دائرہ کے قطر کے مساوی ہے۔

۵۔ ایک ڈنڈے کو جس کا طول ایک میتر ہے دو انتصابی مساوی ڈوریوں کے ذریعہ جو ڈنڈے کے سِروں سے بندھی ہوئی ہیں افقاً لٹکایا گیا ہے۔ جب وہ اپنے طول کی سمت میں جھولتا ہے تو ایک چھوٹے اہتزاز کا دَور ۱۷ء۳ ثانیہ ہے۔ جب وہ اپنے مرکز میں سے (جو کمیت کا مرکز بھی ہے) گزرنے والے انتصابی کے گرد زاوئی اہتزاز کرتا ہے تو دَور ۸۵ء۱ ثانیہ ہے۔ مرکز کے گرد اس کا گردش کا نصف قطر معلوم کرو۔　　[۲۹ء۲ سمر]

۶۔ ثابت کرو کہ مرکب رقاص میں (شکل ۵۴) پوری کمیت کو دو ذرّوں میں جو و اور ف پر واقع ہوں، اصلی محور کے متوازی کسی محور کے گرد دَور کو تبدیل کئے بغیر، مرتکز سمجھا جا سکتا ہے۔ اِن ذرّوں کی کمیتیں کیا ہیں؟

$$\left[\frac{\text{مر}\,\text{ک}^2}{\text{ک}^2 + \text{ھ}^2}\ ,\ \frac{\text{مر}\,\text{ھ}^2}{\text{ک}^2 + \text{ھ}^2}\right]$$

۷ ۔ ایک مرکب رقاص میں ایک چھوٹا تختہ لگا ہوا ہے ۔ ثابت کرو کہ اس تختہ پر ایک چھوٹا وزن رکھنے کا یہ اثر ہوگا کہ دَور طویل تر ہوگا یا صغیر تر بموجب اس کے کہ تختہ اہتزاز کے مرکز کے نیچے ہو یا اوپر ۔

۸ ۔ دو ذرّوں م اور مَ کو طول ل کے ایک ہلکے ڈنڈے سے مربوط کر کے ان کو ایک ثابت نقطہ و سے دو ڈوریوں کے ذریعہ جن کے طول علی الترتیب ل اور لَ ہیں باندھ دیا گیا ہے ۔ و میں سے گزرنے والے ایک انتصابی مستوی میں حرکت کے لیے توانائی کی مساوات معلوم کرو ۔

اگر نظام کو اس مستوی میں توازن کے محل سے قدرے ہٹایا جائے تو ثابت کرو کہ وہ ایسے دَور کے چھوٹے اہتزاز کریگا جو طول

$$\frac{(م\,ر^{۲} + مَ\,رَ^{۲})}{(م + مَ)\,ه}$$

کے ایک سادہ رقاص کے دَور کے مساوی ہوگا بشرطیکہ

$$ه^{۲} = \frac{م\,ر^{۲} + مَ\,رَ^{۲}}{م + مَ} - \frac{م\,مَ\,ل^{۲}}{(م + مَ)^{۲}}$$

۹ ۔ ایک دائری حلقے کو طول ل کی تین مساوی انتصابی ڈوریوں کے ذریعہ ثابت نقطوں سے اس طرح لٹکایا گیا ہے کہ اُس کا مستوی اُفقی ہے ۔ ثابت کرو کہ مرکز میں سے گزرنے والے انتصابی کے گرد ایک چھوٹے گردشی اہتزاز کا دَور

$$۲\pi\sqrt{\frac{ل}{ج}}$$

ہے ۔

۱۰ ۔ ایک افقی ڈنڈے کو طول ل کی دو مساوی انتصابی ڈوریوں کے ذریعہ (۱۰۲)
لٹکایا گیا ہے جہاں ڈوریاں مرکز کمیت (گ) سے غیر مساوی فاصلوں ا ، ب پر بندھی ہوئی ہیں ۔ ثابت کرو کہ ڈنڈا ، گ میں سے گزرنے والے ایک انتصابی محور کے گرد چھوٹے اہتزاز کر سکتا ہے اور یہ کہ مماثل رقاص کا طول

$$\frac{\text{ک}^{2}\,\text{ل}}{\text{ا ب}}$$

ہے جہاں متذکرہ محور کے گِرد گردش کا نصف قطر ک ہے۔

۱۱۔ ایک یکساں ڈنڈا ۳ فٹ لمبا اپنے اوپر کے سِرے سے جو ثابت ہے لٹک رہا ہے۔ نچلے سِرے کو کیا رفتار دینی چاہیئے تاکہ ڈنڈا غیر قائم توازن کے محل پر عین پہنچ سکے۔ [۲۴ فٹ فی ثانیہ]

۱۲۔ ایک یکساں ڈنڈا ایک انتصابی مستوی میں ایک سِرے کے گِرد عین ایک پوری گردش کرتا ہے۔ قبضہ پر دباؤ (۱) زیر ترین محل میں، (۲) افقی محل میں معلوم کرو۔ [(۱) ۴ م ج، (۲) $\frac{3}{2}$ م ج افقی، $\frac{1}{4}$ م ج انتصابی]

۱۳۔ ایک مرکب رقاص کو سکون سے رہا کیا گیا ہے اس طرح کہ مرکز ثقل اُسی ہموار مستوی پر ہے جس میں محور ہے۔ کِس میلان پر قبضہ پر کا افقی دباؤ بڑے سے بڑا ہوگا۔ [45°]

۱۴۔ ایک کمیت م ایک افقی سقفی دروازہ پر قبضوں کے خط سے فاصلہ لا پر ساکن ہے۔ اگر دروازہ کی کمیت ھ اور قبضوں کے خط کے گِرد اس کا گردش کا نصف قطر ک ہو تو ثابت کرو کہ جب دروازہ کھول دیا جاتا ہے تو اُس پر کمیت م کا ابتدائی دباؤ۔

$$\frac{\text{ھ م ج}\,(\text{ک}^{2} - \text{ھ لا})}{\text{ھ ک}^{2} + \text{م لا}^{2}}$$

میں تبدیل ہوتا ہے بشرطیکہ لا $> \frac{\text{ک}^{2}}{\text{ھ}}$ ۔

۱۵۔ ایک یکساں ناقصی تختی کو جس کے نیم محور ا، ب ہیں ایک ثابت محور کے گِرد جو ایک قطر پر منطبق ہے گھمایا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ اِس محور پر کے تعامل ایک جفت

$$\frac{1}{8}\,\text{ھ}\,\omega^{2}\,(\text{ا}^{2} - \text{ب}^{2})\ \text{جب}\ 2\,\text{طہ}$$

کے مماثل ہیں جہاں ط وہ زاویہ ہے جو ثابت قطر محور لا کے ساتھ بناتا ہے۔

۱۶۔ یکساں موٹائی کا ایک دروازہ جو ۳ فٹ چوڑا ہے ۲ ثانیوں میں بند ہوتا ہے جب اُس کو °۹۰ میں سے کھول کر چھوڑ دیا جائے۔ ثابت کرو کہ قبضوں کا خط انتصابی کے ساتھ تقریباً °۳ کا زاویہ بناتا ہے۔

نواں باب (۱۰۲

استوار جسموں کا علمِ حرکت۔ دو بُعدوں میں حرکت

۱۶۱۔ متوازی محوروں کے گِرد زاوئی معیارِ حرکت اور ان کا مقابلہ۔

اگر ہم کسی مادّی نظام کے زاوئی معیارِ حرکت دو متوازی محوروں کے لحاظ سے جن میں سے ایک، مرکزِ کمیت گ میں سے گزرے لیں اور ان کا مقابلہ کریں تو ہم حسبِ ذیل حرکیاتِ محض کے مسئلہ پر پہنچیں گے۔

کسی محور کے گِرد زاوئی معیارِ حرکت حسبِ ذیل دو زاوئی معیارِ حرکتوں کے مجموعہ کے مساوی ہوتا ہے:

(۱) اگر کُل کمیت کو گ پر جمع شدہ اور اس کے ساتھ متحرک فرض کیا جائے تو اِس کُل کمیت کا دیے ہوئے محور کے گِرد زاوئی معیارِ حرکت

(۲) اگر گ میں سے ایک متوازی محور کھینچا جائے تو اِس محور کے گِرد گ کے لحاظ سے حرکت کا زاوئی معیارِ حرکت۔

فرض کرو کہ ثابت قائم محوروں کے حوالے سے ایک ذرہ م کے محددوں کو حسبِ معمول

لا = لاَ + ضا، ما = ماَ + عا، ی = یَ + طا .... (۱)

لیا گیا ہے تو محوری کے گرد زاوئی معیار حرکت بموجب دفعہ ۵۳

∑ م (لا ما٘ - ما لا٘)

= ∑ م {(لاَ + ضا) (فرماَ/فرت + عا٘) - (ماَ + عا) (فرلاَ/فرت + ضا٘)}

= ∑ (م) × (لاَ فرماَ/فرت - ماَ فرلاَ/فرت) + ∑ م (ضا عا٘ - عا ضا٘)

(۲).........

ہے۔ متروک رقمیں رشتوں

∑ (م ضا) = ۰، ∑ (م عا) = ۰

∑ (م ضا٘) = ۰، ∑ (م عا٘) = ۰

کی وجہ سے معدوم ہوتی ہیں جیسا کہ دفعہ ۶۴ کے مسئلہ میں۔

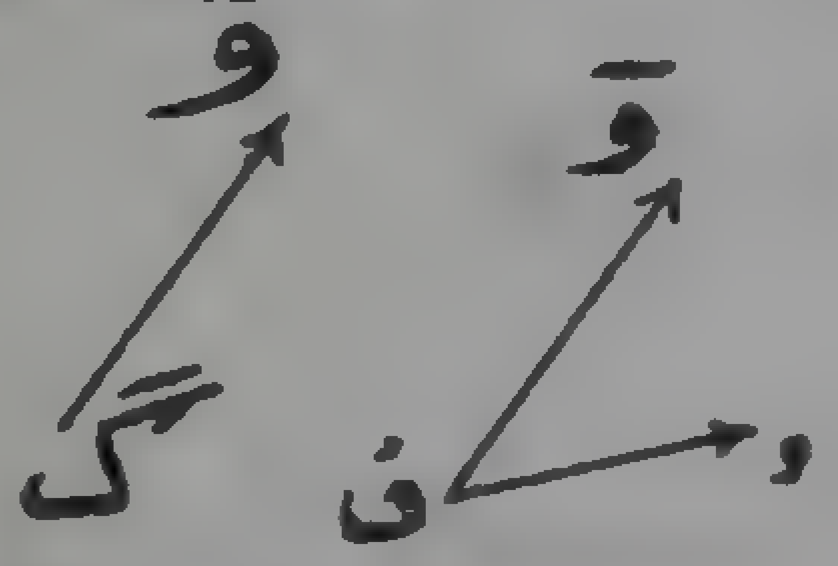
(۱۶۴) (۲) کے آخری رکن میں پہلی رقم، و ی کے گرد کمیت ∑ (م) کا جو گ کے ساتھ متحرک ہے زاوئی معیار حرکت ہے اور دوسری رقم، گ میں سے گزرنے والے و ی کے متوازی خط کے گرد گ کے لحاظ سے حرکت کا زاوئی معیار حرکت ہے۔ اب چونکہ کسی خط کو محوری کے طور پر لیا جا سکتا ہے اس لیے مسئلہ ثابت ہے۔

اس مسئلہ کا سمتی ترقیم میں ثبوت سبق آموز ہے۔ اگر نظام کے کسی ذرہ م کا محل ف ہو تو م کے معیار حرکت (م و) کو ضابطہ

م و = م وَ + م د .... (۳)

کے ذریعہ دو اجزائے ترکیبی میں جو ف میں سے گزریں تحلیل کیا جا سکتا ہے

جہاں گ کی رفتار ق اور گ کے لحاظ سے م کی رفتار و ہے۔ اجزائے ترکیبی م ق، متعلقہ کمیتوں م کے متناسب مقامی متوازی سمتیوں کا ایک سلسلہ ہے اور اس لیے گ میں سے گزرنے والے ایک واحد مقامی سمتی ح (م) × ق کے مماثل ہے۔ اس لیے کسی محور کے گرد معیار حرکت کا معیار، اِس سمتی کے معیار اور سمتیوں م و کے معیاروں کے حاصل جمع کے مجموعہ کے



شکل ۱۰۵

مساوی ہے جہاں سمتیاں م و اُن خطوں میں مقامی فرض کی گئی ہیں جو متعلقہ نقطوں ف میں سے گزرتے ہیں۔ اب چونکہ ح (م و) = ۰ اس لیے تمام متوازی محوروں کے گرد سمتیوں کے اِس آخری سلسلہ کے معیاروں کا مجموعہ وہی ہے۔

(۲) کی ایک مخصوص صورت کے طور پر فرض کرو کہ محوری، گ میں سے گزرتا ہے تو لاَ = ۰ اور ماَ = ۰ رکھنے سے

$$ح\ م\ (لا ما _ ما لا) = ح\ م\ (ضا عا _ عا ضا) \ldots\ldots (۴)$$

پس ایک نظام کے معیار حرکت کا معیار کسی محور کے گرد جو مرکز کمیت میں سے گزرے محسوب کرنے میں کوئی فرق نہیں پڑتا خواہ ہم مختلف ذرّوں کے معیار حرکتوں کو استعمال کریں یا خواہ خود گ کی حرکت کو نظر انداز کریں اور صرف گ کے لحاظ سے معیار حرکتوں کا شمار کریں۔ یہی چیز سمتی ثبوت سے جو ابھی دیا گیا ہے فوراً مستنبط ہوتی ہے۔

مثال۔ مرکب رقاص میں (دفعہ ۵۵) گ میں سے گزرنے والے ایک محور کے گرد جو لٹکاؤ کے محور کے متوازی ہے گ کے لحاظ سے حرکت کا زاویٔ معیار حرکت صریحاً م ک۲ سہ ہے۔ کُل کمیت کے معیار حرکت کا معیار لٹکاؤ کے

محور کے لحاظ سے جب کہ کُل کمیت کو گ پر مرتکز اور اس کے ساتھ متحرک فرض کیا گیا ہو مرھ سہ × ھ ہوگا۔ اس لیے ثابت محور کے گرد کل زاوئی معیار حرکت

مرھ^۲ سہ + مرکہ^۲ سہ = مر (ھ^۲ + کہ^۲) سہ = مرک^۲ سہ

ہے جیسا کہ پہلے معلوم ہو چکا ہے۔

(۱۲۵) ۶۲۔ زاوئی معیار حرکت کی تبدیلی کی شرح

اگر ہم دفعہ ۶۱ کی مساوات (۲) کو ت کے لحاظ سے تفرق کریں تو

فر/فرت Σ م (لا ناَ ـ ما لاَ) = Σ (م) × (لا فر^۲ ما/فرت^۲ ـ ما فر^۲ لا/فرت^۲)

+ فر/فرت Σ م (ضا غاَ ـ عا ضاَ) ....(۱)

جس میں دو رقمیں جو کٹ جاتی ہیں ترک کر دی گئی ہیں[1]۔ اس ضابطہ کی تعبیر

---

[1] یہ ضابطہ دفعہ ۴۶ کے (۴) اور دفعہ ۶۱ کے (۲) کے مانند حسب ذیل مسئلہ کی ایک مخصوص صورت ہے

اگر فہ (لا، ما، ی، لاَ، ماَ، یَ، لاً، ماً، یً)

مظہرہ متغیروں میں دوسرے درجہ کا کوئی متجانس تفاعل ہو اور اگر ہم دفعہ ۶۱ کے اندراج (۱) کو عمل میں لائیں جہاں لا، ما، ی اور ضا، عا، طا ایک مساوی نظام کے کسی ذرہ م سے متعلق ہیں تو

Σ م فہ (لا، ما، ی، لاَ، ماَ، یَ، لاً، ماً، یً)

= Σ (م) × فہ (لاَ، ماَ، یَ، فرلاَ/فرت، فرماَ/فرت، فریَ/فرت، فر^۲لاَ/فرت^۲، فر^۲ماَ/فرت^۲، فر^۲یَ/فرت^۲)

+ Σ م فہ (ضا، عا، طا، ضاَ، عاَ، طاَ، ضاً، عاً، طاً)

دیکھو سکونیات دفعہ ۴۷۔

جو محولہ بالا ضابطہ کی تعبیر کے مثل ہے آسانی سے وضع کی جاسکتی ہے لیکن ہمیں خاص کر اُس مخصوص صورت سے واسطہ ہے جہاں محور وی، گ کے فوری محل میں سے گزرتا ہے۔ اِس مفروضہ پر اوپر کا ضابطہ

$$\frac{فر}{فرت} \sum م (لامأ - مالأ) = \frac{فر}{فرت} \sum م (ضاعأ - عاضأ)$$

(۲) ....

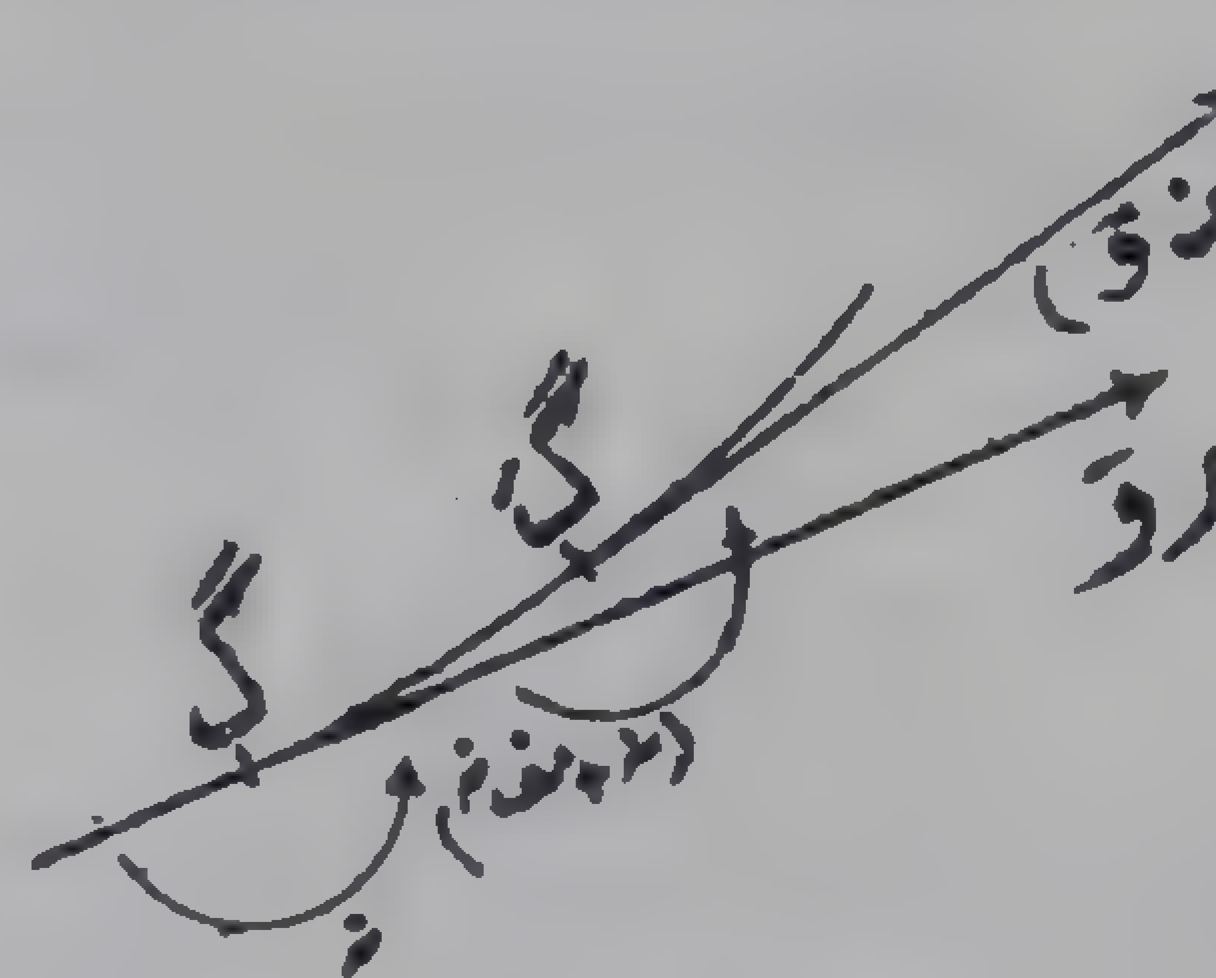
میں تحویل ہوتا ہے جو زیر بحث لمحہ پر درست ہے۔

پس ایک ثابت محور کے گرد جس میں سے مرکز کمیت گ زیر بحث لمحہ پر گزر رہا ہے نظام کے زاوئی معیار حرکت کے اضافہ کی شرح محسوب کرنے میں ہم گ کی حرکت کو نظرانداز کر سکتے ہیں اور ذرّوں کی صرف اُس حرکت کا لحاظ رکھتے ہیں جو گ کے لحاظ سے ہے۔

اس مسئلہ کو کارٹیزی محددوں کی استعانت کے بغیر بھی ثابت کیا جاسکتا ہے۔ سادگی کے مدنظر ہم صرف دو ابعاد میں حرکت کی صورت پر غور کرینگے جس میں مرکز کمیت کا راستہ ایک مستوی منحنی ہوتا ہے۔ فرض کرو کہ لمحوں ت اور ت + مف ت پر مرکز کمیت کے محل علی الترتیب گ اور گَ ہیں

(۱۷۶) اور فرض کرو کہ اس نقطہ کی متناظر رفتاریں ق اور ق + مف ق ہیں۔ فرض کرو کہ وقت ت پر گ کے گرد زاوئی معیار حرکت نہ ہے اور وقت ت + مف ت پر گَ کے گرد نہ + مف نہ۔ ہم دیکھ چکے ہیں (دفعہ ۱۶۱) کہ نہ یا نہ + مف نہ کو محسوب کرنے میں کوئی فرق نہیں پڑتا خواہ ہم نظام کے ذرّوں کے اصلی معیار حرکتوں کو استعمال کریں یا مرکز کمیت کے لحاظ سے حرکت کے معیار حرکتوں کو۔ اب دفعہ ۱۶۱ کی رو سے وقت ت + مف ت پر گ کے گرد زاوئی معیار حرکت حسب ذیل دو مقداروں کا مجموعہ ہے (۱) نہ + مف نہ اور (۲) گگَ میں سے گزرنے والے اُس خط میں جو مرکز کمیت کے راستہ کے مماس وار ہے خطی معیار حرکت $\sum$ (م) × (ق + مف ق) کا گ کے گرد معیار

اب چونکہ اِس خط سے گ کا فاصلہ دوسرے رتبہ کی ایک چھوٹی مقدار ہے



شکل ۲۵

اس لیے یہ آخری معیار بالآخر قابل نظر انداز ہے اور اس لیے محل گ کے گرد زاوئی معیار حرکت کا اضافہ وقت مف ننہ ین صرف مف نہ ہے۔

بعض اہم حرکیاتی نتیجے فوراً مستنبط ہوتے ہیں۔ ہم دیکھ چکے ہیں کہ اگر کسی قسم کا ایک جیلی نظام بیرونی قوت سے آزاد ہو تو مرکز کمیت مستقل رفتار سے ایک خط مستقیم مرتسم کریگا۔ اب اس کے علاوہ ہمیں یہ معلوم ہوتا ہے کہ نہ صرف کسی ثابت محور کے گرد زاوئی معیار حرکت مستقل ہوتا ہے بلکہ مرکز کمیت کے لحاظ سے حرکت کا زاوئی معیارِ حرکت بھی کسی محور کے گرد جو اس نقطہ میں سے گزرے اور اس کے ساتھ حرکت کرے (سمت میں مستقل رہ کر) مستقل ہوتا ہے۔

مثلاً نظام شمسی کے مختلف ارکان کی کمیتیں اور اضافی رفتاریں، مرکز کمیت میں سے گزرنے والے کسی محور کے لحاظ سے نظام کے زاوئی معیار حرکت کو متعین کرتی ہیں اور یہ زاوئی معیار حرکت مستقل ہے خواہ نظام بہ حیثیت مجموعی حرکت میں ہو یا نہ ہو۔

نیز اگر زمین کا جمود کا معیار اس کے گردش کے محور کے لحاظ سے ع ہو اور اس کی زاوئی رفتار سہ ہو تو حاصل ضرب ع سہ مستقل ہوتا ہے

اور زمین کی حرکت انتقال سے متاثر نہیں ہوتا۔ ظاہر ہے کہ یہاں ممکن ابطائی
(۱۷۷) قوتوں اور محور کی سمت میں تبدیلیوں کو نظر انداز کیا گیا ہے۔ اگر اچانک یا
تدریجی طبیعی تبدیلیوں کے باعث جمود کا معیار اور زاویُ رفتار علی الترتیب
عَ اور سَہ میں بدل جائیں تو

$$\text{عَ سَہ} = \text{ع سہ} \qquad \text{(۳)}$$

چنانچہ سرد ہو کر یکساں طور پر سکڑنے میں ع میں تخفیف ہو گی اور اس لیے
سہ میں اضافہ ہو گا یعنے دن کا طول گھٹ جائیگا۔

مثال ۔ دو ذرّے م_1 اور م_2 جو طول ا کی ایک ڈوری سے مربوط
ہیں ایک مستوی میں حرکت میں ہیں
اگر ڈوری کی زاویُ رفتار سہ ہو تو مرکز کمیت گ کے لحاظ سے حرکت کا
زاویُ معیار حرکت گ کے گرد

$$(\text{م}_1 \text{ر}_1^2 + \text{م}_2 \text{ر}_2^2)\, \text{سہ} \qquad \text{(۴)}$$

ہے جہاں گ سے ذرّوں کے فاصلے ر_1 اور ر_2 ہیں۔ پس اگر کوئی بیرونی قوتیں
نہیں ہیں یا اگر بیرونی قوتیں (جیساکہ معمولی جاذبہ کی صورت میں) گ کے گرد
صفر معیار رکھتی ہیں تو زاویُ رفتار سہ مستقل ہے (دیکھو دفعہ ۴۲)۔
نیز اگر بیرونی قوتیں تمام ذرّوں میں وہی اسراع پیدا کرتی ہیں (جیسا
کہ جاذبہ کی صورت میں) تو وہ اضافی حرکت پر متاثر نہیں ہونگی۔ پس اگر
ڈوری کا تناؤ ت ہو تو

$$\text{ت} = \text{م}_1 \text{سہ}^2 \text{ر}_1 = \frac{\text{م}_1 \text{م}_2}{\text{م}_1 + \text{م}_2} \text{سہ}^2 \text{ا} \qquad \text{(۵)}$$

۶۳۔ استوار جسموں پر اطلاق۔

اب ہم بالخصوص ایک استوار نظام کی صورت پر اِس قید کے تحت غور کرینگے کہ اُس کی حرکت دو بُعدوں میں ہے یعنے اِس کے ہر ذرّہ کا راستہ ایک ثابت مستوی کے متوازی ہے۔ دفعہ ۵۹ کے ضابطوں سے یہ واضح ہوگا کہ کوئی جسم اِس طریقہ پر بالعموم منتقلاً حرکت نہیں کریگا جب تک کہ مرکزِ کمیت میں سے گزرنے والا وہ خط جو مذکورہ مستوی پر عمود ہے جسم کا جمود کا صدر محور نہ ہو یا جب تک کہ خاص قید کرنیوالی قوتیں لگائی نہ جائیں۔

ایک استوار جسم جو دو بُعدوں میں حرکت پذیر ہو آزادی کے تین درجے رکھتا ہے اور اس لیے اس کے محل کی تخصیص کے لیے تین محدّدوں کی ضرورت ہے (سکونیات دفعہ ۱۳)۔ بالعموم سب سے زیادہ سہولت اِس میں ہوتی ہے کہ مرکزِ کمیت گ کے کارٹیزی محدّد (لا، ما) اور وہ زاویہ ط استعمال کئے جائیں جس میں سے جسم کسی معیاری محل سے گردش کرچکا ہے۔

(۱۷۸ اگر جسم کی کمیت م ہو تو خطی معیارِ حرکت کے اجزائے ترکیبی م لاَ، م ماَ، م یٔ (دفعہ ۴۵) ہونگے اور گ کے گرد زاوئی معیارِ حرکت ع طَ ہوگا جہاں گ میں سے گزرنے والے اُس محور کے گرد جو حرکت کے مستوی پر عمود ہے جمود کا معیار ع ہے۔ یہ آخری جملہ دفعہ ۵۴ سے ماخوذ ہوتا ہے کیونکہ گ کے گرد زاوئی معیارِ حرکت کو محسوب کرنے میں صرف حرکتِ اضافی کا لحاظ کرنے کی ضرورت ہے۔

پس اگر بیرونی قوتوں کو سکونیات کے طریقوں سے گ پر ایک قوت (لا، ما) اور ایک جفت ن میں تحویل شدہ فرض کیا جائے تو

$$\frac{\text{ف}}{\text{فت}}\,\text{م}\,\dot{\text{لا}} = \text{لا}،\quad \frac{\text{ف}}{\text{فت}}\,\text{م}\,\dot{\text{ما}} = \text{ما} \quad \ldots\ldots\ldots (۱)$$

اور $\frac{\text{فر}}{\text{فرت}}$ ع طٖ = ن ....(۲)

اِن مساواتوں سے یہ واضح ہے کہ انتقال اور گردش کی حرکتیں ایک دوسرے سے آزاد ہیں۔ اِس اصول کو سب سے پہلے یولر نے ۱۷۴۹ء میں جہازوں کی حرکت کے سلسلے میں بیان کیا تھا۔

اب ہم چند دلچسپ مسئلے حل کر سکتے ہیں:

مثال ۱۔ ایک جہاز کے چھوٹے اہتزازوں میں جو اس کے مرکز کمیت میں سے گزرنے والے طولی محور کے گرد ہوں

ن = ۔ مرج ب طہ ....(۳)

حاصل ہوتا ہے جہاں مرکز ما بعد کا ارتفاع ب ہے (سکونیات دفعہ ۱۰۲)۔ اس لیے ع = مرکہ۲ رکھنے سے

کہ۲ طٖ = ۔ ج ب طہ ....(۴)

اس لیے لڑھکنے کا دَور، طول $\frac{\text{کہ}^2}{\text{ب}}$ کے ایک سادہ رقاص کا دَور ہے۔

مثال ۲۔ ایک گردشی جسم میلان عہ کے ایک مستوی پر نیچے لڑھکتا ہے اور اس کا محور افقی رہتا ہے۔ یہ مان لیا گیا ہے کہ نقطہ تماس پر کا تعامل ایک واحد قوت میں تحویل پذیر ہے یعنے کوئی رگڑ کا جفت نہیں ہے۔

فرض کرو کہ جسم کے اُس دائرہ کا نصف قطر ا ہے جو مستوی کے ساتھ تماس میں لڑھکتا ہے اور فرض کرو کہ محور تشاکل کے گِرد گردش کا نصف قطر کہ ہے۔ فرض کرو کہ مرکز کمیت (گ) کی رفتار مستوی کے متوازی ۶ ہے جہاں مثبت سمت نیچے وار ہے اور جسم کی زاویائی رفتار سہ ہے۔ چونکہ جسم نقطہ تماس کے گِرد جو فوری مرکز ہے (سکونیات دفعہ ۱۵) گھوم رہا ہے اس لیے

۶ = سہ ا ....(۵)

مستوی کے متوازی اور عمود وار تحلیل کرنے پر

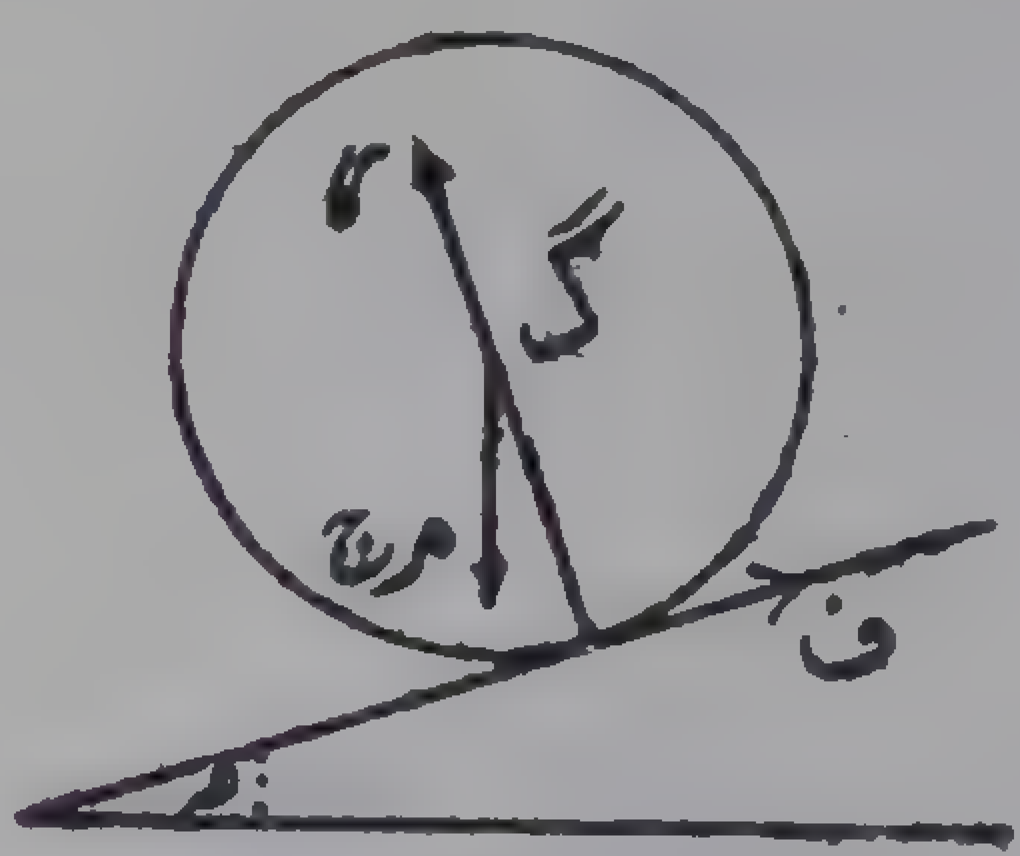
$$\text{م}\,\frac{\text{فر}^{2}\text{ی}}{\text{فزت}^{2}} = \text{م ج جب عہ} - \text{ف}\,،\quad \cdot = \text{م ج جم عہ} - \text{ر} \quad \ldots\ldots(۶)$$

جہاں جسم پر مستوی کے تعامل کے عمادی اور مماسی اجزائے ترکیبی ف اور ر ہیں ۔
نیز گ کے گرد معیار لینے سے

$$\text{م}\,\text{ک}^{2}\,\frac{\text{فر}^{2}\text{سہ}}{\text{فزت}^{2}} = \text{ف ا} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(۷)$$

ف اور سہ کو ساقط کرنے پر

$$\frac{\text{فر}^{2}\text{ی}}{\text{فزت}^{2}} = \frac{\text{ا}^{2}}{\text{ک}^{2}+\text{ا}^{2}}\,\text{ج جب عہ} \quad \ldots\ldots(۸)$$



شکل ۵۳

اس لیے گ کا اسراع اس اسراع سے جو بے رگڑ پھسلن کی صورت میں ہوتا نسبت $\frac{\text{ا}^{2}}{\text{ک}^{2}+\text{ا}^{2}}$ میں کم ہے ۔ متجانس کرہ ($\text{ک}^{2} = \frac{۲}{۵}\,\text{ا}^{2}$) کی صورت میں یہ نسبت $\frac{۵}{۷}$ ہے، ایک یکساں دائری قرص یا ٹھوس اسطوانہ ($\text{ک}^{2} = \frac{۱}{۲}\,\text{ا}^{2}$) کی صورت میں وہ $\frac{۲}{۳}$ ہے، ایک دائری حلقہ یا پتلے اسطوانی خول ($\text{ک}^{2} = \text{ا}^{2}$) کی صورت میں وہ $\frac{۱}{۲}$ ہے۔

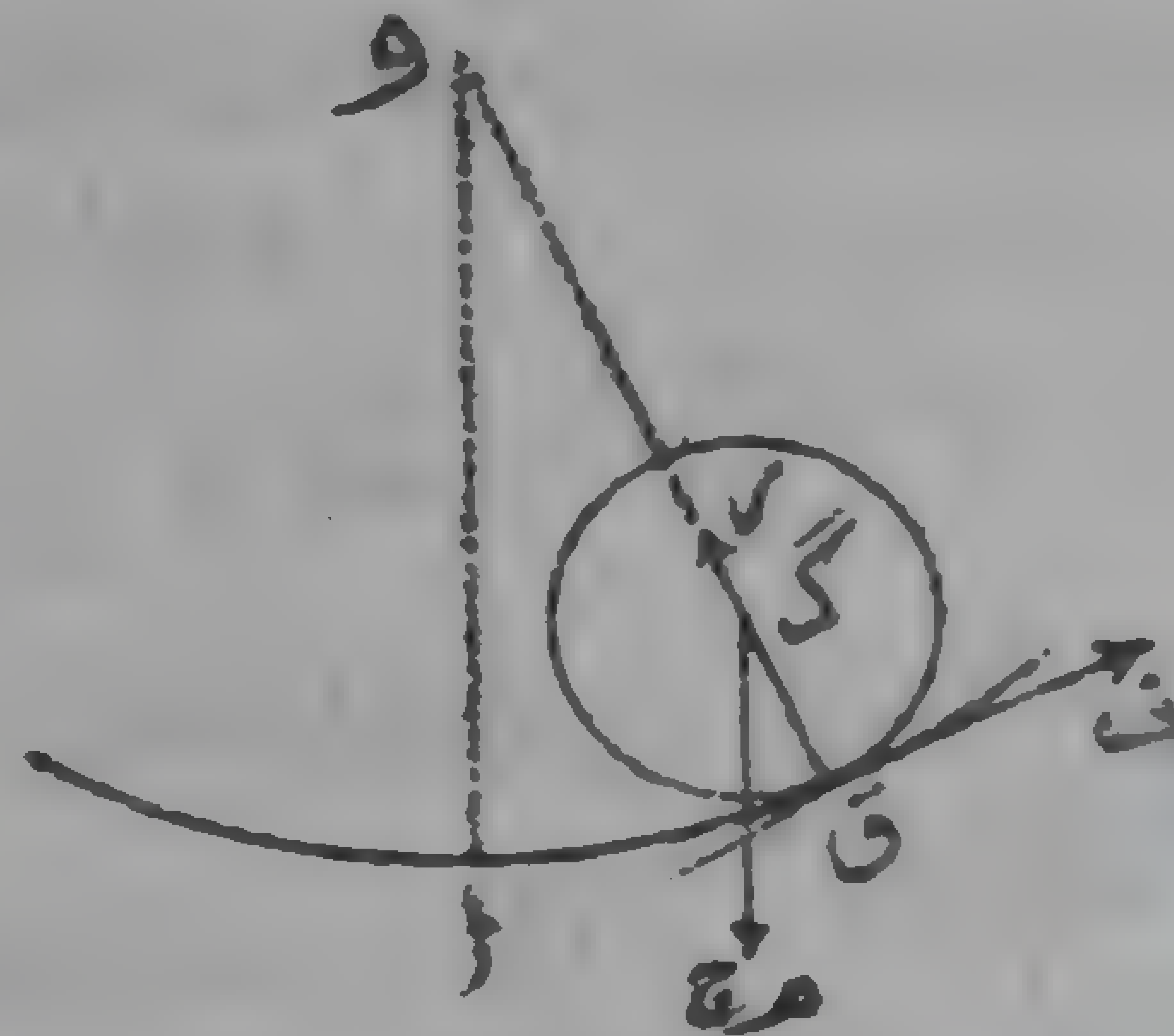
نیز (۶) اور (۸) سے

$$\text{ف} = \frac{\text{ک}^{2}}{\text{ک}^{2}+\text{ا}^{2}}\,\text{م ج جب عہ}\,،\quad \text{ر} = \text{م ج جم عہ} \quad \ldots\ldots(۹)$$

اگر ہم پھسلواں رگڑ کے معمولی قانون کو مان لیں یعنے یہ کہ ف، مہ ر سے متجاوز نہیں ہو سکتا جہاں مہ رگڑ کی قدر ہے تو وہ شرط کہ کوئی پھسلن وقوع پذیر نہ ہو یہ ہے کہ

$$\text{مس عہ} \ngtr \left(۱ + \frac{\text{ا}^{2}}{\text{ک}^{2}}\right)\text{مہ} \quad \ldots\ldots\ldots(۱۰)$$

مثال ۳ ۔ ایک حرکت پذیر اسطوانہ ایک ثابت کھو کھلے اسطوانہ کے اندر لڑھکتا ہے، اسطوانوں کی تراشیں دائری ہیں اور تشاکل کے محور متوازی اور افقی ہیں۔



شکل ۵۴

شکل ایک ایسی تراش کو تعبیر کرتی ہے جو طولوں کے عمود وار مستوی سے منقطع
ہوتی ہے۔ نقطہ و ثابت اسطوانے کے محور کو تعبیر کرتا ہے اور و ا ایک انتصابی (۱۰۰)
نصف قطر ہے اور و ق وہ نصف قطر ہے جو متحرک اسطوانہ کے مرکز ثقل گ
میں سے گزرتا ہے۔

فرض کرو کہ و ا = و ق = ب، گ ق = ا، اس لیے متحرک جسم کا نصف قطر ا ہے۔ اگر زاویہ ا و ق کو ط سے تعبیر کیا جائے تو گ کی رفتار (ب ۔ ا) ط̇ ہے کیونکہ یہ نقطہ نصف قطر (ب ۔ ا) کا دائرہ زاویائی رفتار ط̇ سے مرتسم کر رہا ہے۔ لیکن اگر متحرک جسم کی گردش کی زاویائی رفتار س ہو تو وہی رفتار س × ا سے تعبیر ہو گی کیونکہ ق فوری مرکز ہے۔ اس لیے

س ا = (ب ۔ ا) ط̇ .... (۱۱)

اگر ق پر مماسی تعامل ف ہو (جیسا کہ شکل میں دکھایا گیا ہے) تو گ کے طریق پر تحلیل کرنے سے

م (ب ۔ ا) ط̈ = ۔ م ج جب ط + ف .... (۱۲)

نیز گ کے گِرد معیار لینے سے

$$\text{مرکہ}^2\,\frac{\text{فرسہ}}{\text{فرت}} = -\text{ف ا} \qquad \ldots\ldots\ldots(۱۳)$$

اب ف اور سہ کو ساقط کرنے پر

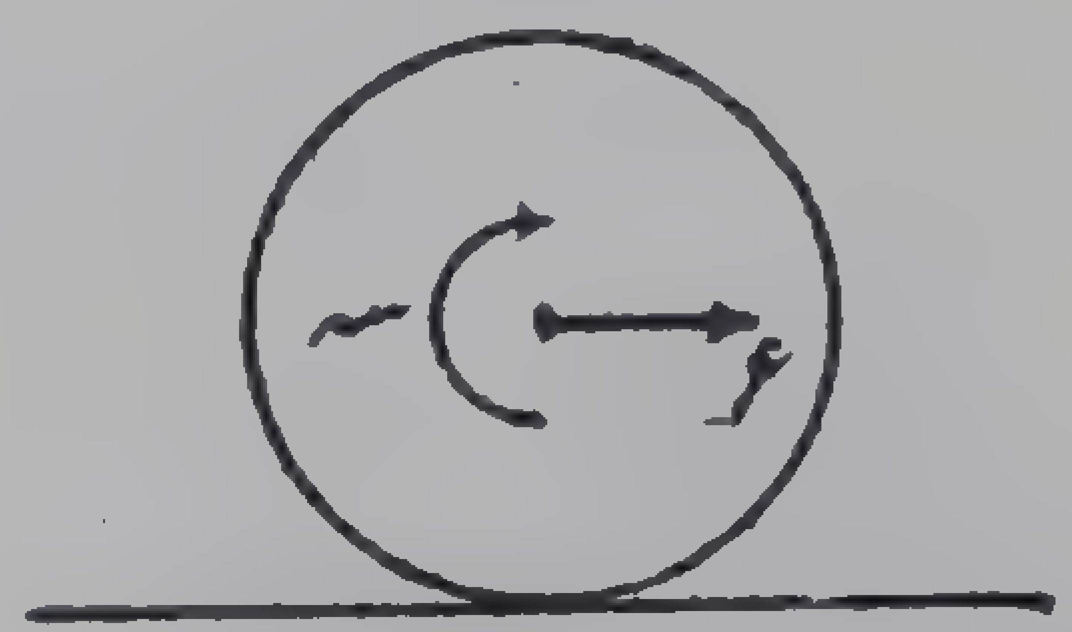
$$\left(۱ + \frac{\text{کہ}^2}{\text{ا}^2}\right)(\text{ب} - \text{ا})\,\ddot{\text{ط}} = -\text{ج جب ط} \qquad \ldots\ldots\ldots(۱۴)$$

اس لیے گ کی حرکت، طول

$$\text{ل} = \left(۱ + \frac{\text{کہ}^2}{\text{ا}^2}\right)(\text{ب} - \text{ا}) \qquad \ldots\ldots\ldots(۱۵)$$

کے ایک سادہ رقاص کے لنگر کی حرکت کے ٹھیک مانند ہے۔

مثال ۴ ۔ ایک کرہ (یا قرص، حلقہ، وغیرہ جس کا مستوی انتصابی ہے) کو اس طرح پھینکا گیا ہے کہ وہ ایک افقی مستوی پر لڑھکتا اور پھسلتا ہے۔
فرض کرو کہ مرکز کی ابتدائی رفتار ع اور مرکز کے گرد ابتدائی زاویائی رفتار سہ ہے۔ اگر ع = ا سہ جہاں ا نصف قطر ہے تو فوری مرکز نقطہ تماس پر رہے اور جسم بغیر پھسلے خالص لڑھکنے کی حرکت جاری رکھیگا۔ اگر یہ شرط پوری نہ ہو تو اولاً نقطہ تماس پر پھسلن یا Skidding ہوگی اور رگڑ کی ایک قوت مہ مرج وقوع پذیر ہوگی جو وہاں اضافی حرکت کے مزاحم ہوگی، مہ رگڑ کی قدر کو تعبیر کرتا ہے۔



شکل ۵۵

اول فرض کرو کہ ع > ا سہ۔
حرکت کی مساواتیں پہلے

$$\left\{\begin{array}{l} \text{مر}\dot{\text{غ}} = -\text{مہ مرج}، \\ \text{مرکہ}^2\,\dot{\text{سہ}} = \text{مہ مرج ا} \end{array}\right. \qquad \ldots\ldots\ldots(۱۶)$$

ہیں۔ اس لیے

$$\text{ع} = \text{ع}_0 - \text{مہ ج ت}\ ،\ \text{سہ} = \text{سہ}_0 + \frac{\text{مہ ج ا ت}}{\text{ک}^2} \quad \ldots\ldots(۱۷)$$

یہ ضابطے درست رہینگے یہاں تک کہ ع = ا سہ یعنے یہاں تک کہ

$$\text{ت} = \frac{\text{ع}_0 - \text{ا سہ}_0}{\text{مہ ج}\left(1 + \frac{\text{ا}^2}{\text{ک}^2}\right)} \quad \ldots\ldots(۱۸)$$

اور اس وقت

$$\text{ع} = \frac{\text{ا}^2\text{ع}_0 + \text{ک}^2\text{ا سہ}_0}{\text{ا}^2 + \text{ک}^2} \quad \ldots\ldots(۱۹)$$

اب جسم اس کے مساوی مستقل رفتار کے ساتھ لڑھکنے لگیگا ۔ توانائی بالحرکت (۱۸۱)
کا نقصان

$$\tfrac{1}{2}\,\text{مر}\left(\text{ع}_0^2 + \text{ک}^2\text{سہ}_0^2\right) - \tfrac{1}{2}\,\text{مر}\left(\text{ا}^2 + \text{ک}^2\right)\text{سہ}^2$$

$$= \tfrac{1}{2}\,\frac{\text{مر ک}^2}{\text{ا}^2 + \text{ک}^2}\left(\text{ع}_0 - \text{ا سہ}_0\right)^2 \quad \ldots\ldots(۲۰)$$

ہے ۔ یہ مشاہدہ طلب ہے کہ نیتجے (۱۹) اور (۲۰) مہ پر منحصر نہیں ہیں ۔
صورت ع۰ < ا سہ۰ کے لیے نیتجے اوپر کے ضابطوں میں مہ کی علامت بدلنے سے معلوم ہونگے ۔

۶۴ ۔ توانائی کی مساوات ۔

دفعہ ۴۶ میں یہ ثابت کیا گیا تھا کہ کسی مادی نظام کی توانائی بالحرکت (۱) کُل کمیت کی توانائی بالحرکت جب کہ اِس کمیت کو مرکز کمیت پر مرتکز اور اس نقطے کے ساتھ متحرک فرض کیا گیا ہو اور (۲) مرکز کمیت کے لحاظ سے حرکت کی توانائی بالحرکت کے مجموعے کے مساوی ہوتی ہے ۔ پس ایک استوار

جسم کی صورت میں جو دو بُعدوں میں حرکت کر رہا ہو اگر مرکز کمیت کی رفتار (ع، و) اور زاوی رفتار سہ ہو تو توانائی بالحرکت

$$\tfrac{1}{2}\,\text{م}\,(\text{ع}^2+\text{و}^2)+\tfrac{1}{2}\,\text{ع}\,\text{سہ}^2 \qquad \ldots\ldots (\text{۱})$$

ہوگی جہاں جسم کی کمیت م ہے اور اُس کے جمود کا معیار ایک محور کے گرد جو مرکز کمیت میں سے گزرتا ہے اور حرکت کے مستوی پر عمود ہے ع ہے۔

اب حرکت کی مساواتوں (دفعہ ۹۳ (۱)، (۲)) کو شکل

$$\left.\begin{aligned} &\text{م}\,\frac{\text{فرع}}{\text{فرت}}=\text{لا}،\quad \text{م}\,\frac{\text{فرو}}{\text{فرت}}=\text{ما}،\\ &\text{ع}\,\frac{\text{فرسہ}}{\text{فرت}}=\text{ن}\end{aligned}\right\} \qquad \ldots\ldots (\text{۲})$$

میں لکھنے سے

$$\text{م}\left(\text{ع}\,\frac{\text{فرع}}{\text{فرت}}+\text{و}\,\frac{\text{فرو}}{\text{فرت}}\right)+\text{ع}\,\text{سہ}\,\frac{\text{فرسہ}}{\text{فرت}}$$

$$=\text{لا}\,\text{ع}+\text{ما}\,\text{و}+\text{ن}\,\text{سہ} \qquad \ldots\ldots (\text{۳})$$

یا

$$\frac{\text{فر}}{\text{فرت}}\left\{\tfrac{1}{2}\,\text{م}\,(\text{ع}^2+\text{و}^2)+\tfrac{1}{2}\,\text{ع}\,\text{سہ}^2\right\}$$

$$=\text{لا}\,\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}}+\text{ما}\,\frac{\text{فرما}}{\text{فرت}}+\text{ن}\,\frac{\text{فرطہ}}{\text{فرت}} \qquad \ldots\ldots (\text{۴})$$

حاصل ہوتا ہے۔

جملہ

$$\text{لا صف لا}+\text{ما صف ما}+\text{ن صف طہ}$$

اُس کام کو تعبیر کرتا ہے جو بیرونی قوتیں جسم کے ایک صغیر ہٹاؤ میں کرتی ہیں

[سکونیات دفعہ ۶۲] ۔ اس لیے مساوات (۴) سے یہ بیان ہوتا ہے کہ توانائی بالحرکت ہر لمحہ پر ایک ایسی شرح سے بڑھ رہی ہے جو اس کام کی شرح کے مساوی ہے جو جسم پر ہو رہا ہے ۔ اس لیے وقت کے کسی محدود وقفہ میں توانائی بالحرکت کا کل اضافہ اُس کام کے مساوی ہے جو اِس وقفہ میں بیرونی قوتیں جسم پر کرتی ہیں ۔ (۱۸۲)

اِس نتیجہ کے اطلاق میں ہم شروع ہی سے اُن تمام قوتوں کو نظرانداز کر سکتے ہیں جو کام نہیں کرتیں مثلاً ثابت چکنی سطحوں کے تعامل، نا امتداد پذیر ڈوریوں کے تناؤ وغیرہ [سکونیات دفعہ ۵۲]

نیز اگر جسم ایسی بیرونی قوتوں کے تحت ہو جو بہ حیثیت مجموعی ایک دائری عمل میں جس کسے جسم اپنے ابتدائی مقام پر ہٹاؤں کے کسی سلسلہ کے بعد واپس ہو کوئی کام نہیں کرتیں تو ہم توانائی بالقوہ کے تخیل (جیساکہ دفعہ ۳۰ میں) کو اختیار کر سکتے ہیں یعنے وہ کام جو یہ قوتیں کسی ہٹاؤ میں کرتی ہیں توانائی بالقوہ کی تخفیف کے مماثل ہوتا ہے ۔

ایک جسم کی جو دو بُعدوں میں حرکت کر رہا ہو توانائی بالحرکت کے لیے ایک جملہ فوراً اِس واقعہ کے مدنظر لکھ لیا جا سکتا ہے کہ جسم کسی نہ کسی نقطہ کے گرد جو فوری مرکز ہے گردش کر رہا ہے [سکونیات دفعہ ۱۵] ۔ اگر جمود کا معیار اس نقطہ کے گرد ع ہو اور زاویئی رفتار سہ ہو تو توانائی بالقوہ $\frac{1}{2}$ ع سہ^2 ہوگی ۔ چونکہ فوری مرکز بالعموم ایک ثابت نقطہ نہیں ہوتا اس لیے ع کی اور نیز سہ کی قیمتیں تبدیل ہو سکتی ہیں جب کہ حرکت جاری ہو ۔

مثال ۱ ۔ مرکب رقاص (دفعہ ۵۵) میں توانائی بالحرکت $\frac{1}{2}$ م رک^2 ط$^{\cdot 2}$ اور توانائی بالقوہ ۔ م ج ہ جم ط + مستقل ہے ۔ اس لیے

$\frac{1}{2}$ م رک^2 ط$^{\cdot 2}$ ۔ م ج ہ جم ط = مستقل .... (۵)

مثال ۲ ۔ ایک گردشی مجسم کی صورت میں جو ایک مائل مستوی پر لڑھک رہا ہو

نقطہ تماس کے گرد جمود کا معیار م (کہ² + ا²) ہے اور اس لیے توانائی بالحرکت

$$\frac{1}{2}\,\text{م}\,(\text{کہ}^2 + \text{ا}^2)\,\text{سہ}^2$$

ہے اس لیے اگر لا وہ فاصلہ ہو جو مستوی کے نیچے وار طے ہوا ہے تو

$$\frac{1}{2}\,\text{م}\,(\text{کہ}^2 + \text{ا}^2)\,\text{سہ}^2 = \text{م ج لا جب ع} + \text{مستقل} \qquad \ldots\ldots(6)$$

یا سہ = $\frac{\text{ع}}{\text{ا}}$ رکھنے سے

$$\text{ع}^2 = \frac{2\,\text{ج}\,\text{ا}^2\,\text{لا جب ع}}{\text{کہ}^2 + \text{ا}^2} + \text{مستقل} \qquad \ldots\ldots(7)$$

اس لیے مرکز کمیت کا اسراع

$$\text{ع}\,\frac{\text{فرع}}{\text{فرت}} = \frac{\text{ا}^2}{\text{کہ}^2 + \text{ا}^2}\,\text{ج جب ع} \qquad \ldots\ldots(8)$$

ہے جیسا کہ پہلے معلوم کیا جا چکا ہے۔

مثال ۳۔ ایک ڈنڈا ا ب اس طرح پھسلتا ہے کہ اس کا نچلا سرا ایک چکنے افقی مستوی پر ہے۔ چونکہ ڈنڈے پر کوئی افقی قوت نہیں ہے اس لیے مرکز کمیت کا کوئی افقی اسراع نہیں ہے۔ اس لیے اُس کی افقی رفتار مستقل ہے اور اس کو نظر انداز کیا جا سکتا ہے۔

(۱۸۳) فرض کرو کہ کمیت م، نچلے سرے ا سے گ کا فاصلہ ا، اور گ کے گرد گردش کا نصف قطر کہ ہے۔ اگر افقی مستوی کے اوپر گ کا ارتفاع گ ن، ی ہو اور انتصابی سے ڈنڈے کا میلان طہ ہو تو توانائی کی مساوات

$$\frac{1}{2}\,\text{م}\,\dot{\text{ی}}^2 + \frac{1}{2}\,\text{م}\,\text{کہ}^2\,\dot{\text{طہ}}^2 + \text{م ج ی} = \text{مستقل} \qquad \ldots\ldots(9)$$

ہے۔ اب چونکہ

$$\text{ی} = \text{ا جم طہ} \qquad \ldots\ldots(10)$$

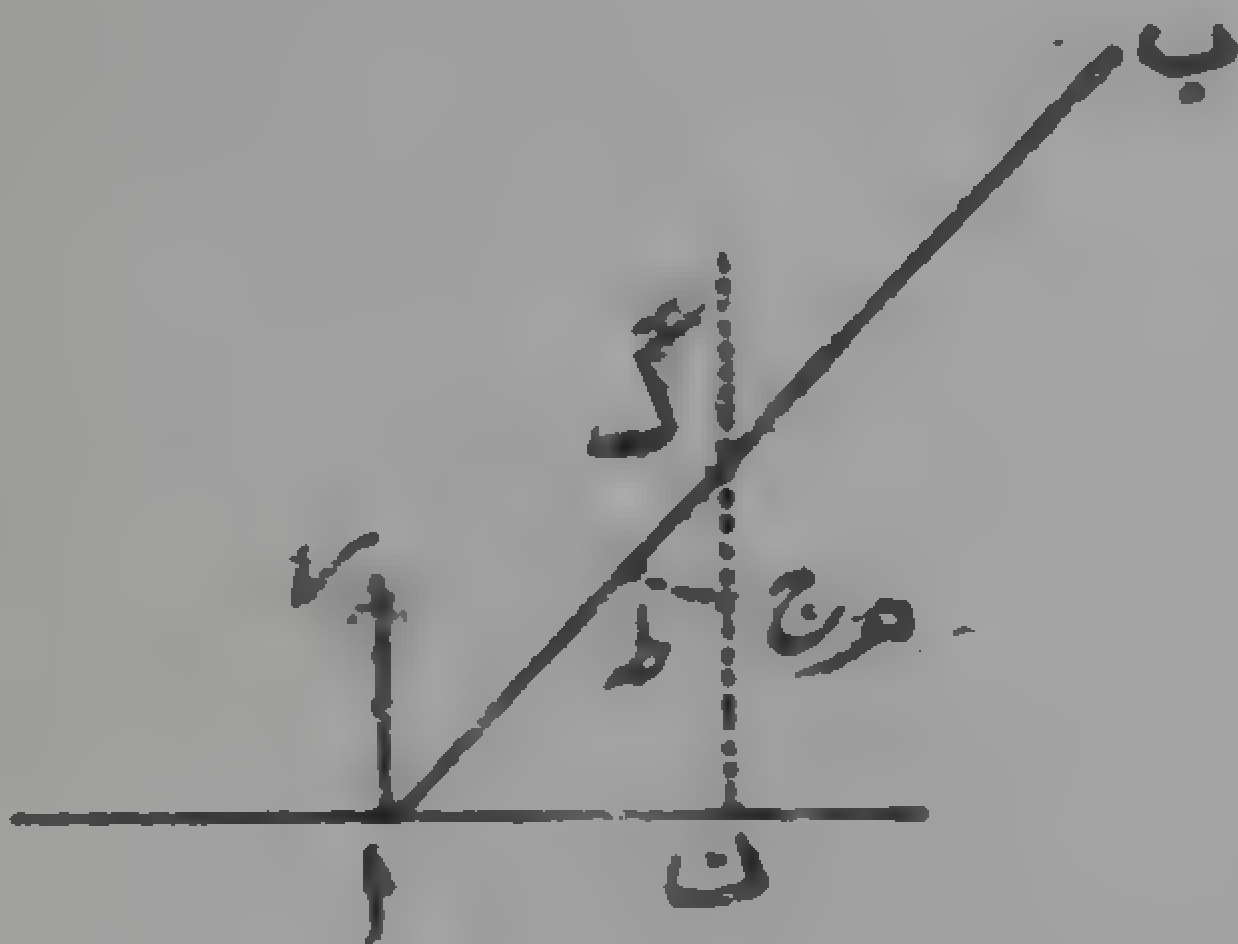
اس لیے

$$\frac{1}{2}\,(\text{کہ}^2 + \text{ا}^2\,\text{جب}^2\,\text{طہ})\,\dot{\text{طہ}}^2 + \text{ج ا جم طہ} = \text{مستقل} \qquad \ldots\ldots(11)$$

جہاں مستقل، ابتدائی شرطوں پر منحصر ہے ۔ اگر ڈنڈا انتصابی محل میں سکون سے ابھی متحرک کیا گیا ہو تو $\text{ط} = 0$ کے لیے $\dot{\text{ط}} = 0$ ۔ اور اس لیے

$$\tfrac{1}{2}\left(\text{کہ}^2 + \text{ا}^2\,\text{جب}^2\,\text{ط}\right)\dot{\text{ط}}^2$$

$$= \text{ج}\,\text{ا}\,(1 - \text{جم}\,\text{ط}) \quad \ldots\ldots (12)$$



شکل ۵٦

اس سے کسی بعد کے محل میں زاوئی رفتار معلوم ہوتی ہے ۔

انتصابی دباؤ سا جو ستوی عائد کرتا ہے معلوم کرنے کے لیے گ کے گرد معیار نو تو

$$\text{مر}\,\text{کہ}^2\,\ddot{\text{ط}} = \text{سا}\,\text{ا}\,\text{جب}\,\text{ط} \quad \ldots\ldots (13)$$

اب (۱۲) کو ت کے لحاظ سے تفرق کرنے اور $\dot{\text{ط}}$ سے تقسیم کرنے پر

$$\left(\text{کہ}^2 + \text{ا}^2\,\text{جب}^2\,\text{ط}\right)\ddot{\text{ط}} + \text{ا}^2\,\text{جب}\,\text{ط}\,\text{جم}\,\text{ط}\,\dot{\text{ط}}^2 = \text{ج}\,\text{ا}\,\text{جب}\,\text{ط} \quad \ldots\ldots (14)$$

حاصل ہوتا ہے اور (۱۲)، (۱۳)، اور (۱۴) سے $\dot{\text{ط}}$ اور $\ddot{\text{ط}}$ کو ساقط کر کے سا کو معلوم کیا جا سکتا ہے ۔

مثلاً ڈنڈے کے عین افقی ہونے سے پہلے دباؤ معلوم کرنے کے لیے رکھو $\text{ط} = \frac{\pi}{2}$ تو

$$\ddot{\text{ط}} = \frac{\text{ج}\,\text{ا}}{\text{کہ}^2 + \text{ا}^2}\,,\quad \text{سا} = \frac{\text{مر}\,\text{کہ}^2}{\text{ا}}\,\ddot{\text{ط}} = \frac{\text{کہ}^2}{\text{کہ}^2 + \text{ا}^2}\,\text{مر}\,\text{ج} \quad \ldots\ldots (15)$$

۶۵ ـ ایک نظام کا عام نظریہ جبکہ نظام کو آزادی کا ایک درجہ حاصل ہو ۔

پچھلی بہت سی مثالوں میں یہ خصوصیت مشترک ہے کہ زیر بحث استوار

جسم ہر صورت میں آزادی کا صرف ایک درجہ رکھتا ہے یعنے وہ مختلف محل جو وہ اختیار کرسکتا ہے سب کے سب ایک واحد متغیر عنصر یا "محدد" (جیسا کہ عام مفہوم میں کہا جاسکتا ہے) کو مناسب قیمتیں دینے سے مشخص ہوسکتے ہیں چنانچہ توانائی کی مساوات جب وہ اطلاق پذیر ہو حرکت کو متعین کرنے کے لیے کافی ہے اگر ابتدائی شرطیں دی گئی ہوں۔

اِس طریقہ کی توسیع صریحاً کسی تحفظی نظام پر کی جاسکتی ہے جب کہ وہ
۸۴ ایسے قیود کے تحت ہو کہ اس کو آزادی کا صرف ایک درجہ حاصل ہو۔ پس اِس سوال پر عام طریقہ سے بحث کرنا سہولت بخش ہے۔

قیود کے باعث نظام کا کوئی ذرّہ م ایک معیّن راستہ پر صرف آگے یا پیچھے حرکت کرسکتا ہے۔ اگر طہ وہ متغیر ہو جس سے نظام کی تشکیل مشخص ہوتی ہے اور اگر اِس راستہ پر تغیر مف طہ کے متناظر م کا ہٹاؤ مف س ہو تو

$$\text{مف س} = \text{عہ مف طہ} \qquad \ldots\ldots\ldots (1)$$

جہاں عہ ایک سر ہے جو بالعموم مخصوص تشکیل (طہ) پر جس سے ہٹاؤ واقع ہوا ہے منحصر ہوتا ہے اور بلا شبہ نظام کے ایک ذرّہ سے دوسرے تک متغیر ہوتا ہے۔ پس مف ت سے تقسیم کرنے پر م کی رفتار

$$\text{و} = \dot{\text{س}} = \text{عہ}\,\dot{\text{طہ}} \qquad \ldots\ldots\ldots (2)$$

حاصل ہوتی ہے۔ اس لیے توانائی بالحرکت

$$\tfrac{1}{2}\Sigma(\text{م}\,\text{و}^2) = \tfrac{1}{2}\,\text{ا}\,\dot{\text{طہ}}^2 \qquad \ldots\ldots\ldots (3)$$

ہے جہاں

$$\text{ا} = \Sigma(\text{م}\,\text{عہ}^2) \qquad \ldots\ldots\ldots (4)$$

اور حاصل جمع نظام کے تمام ذرّوں پر حاوی ہے۔

سر ا کو نظام کا جمود کا سر کہتے ہیں اور وہ لازماً مثبت ہوتا ہے۔

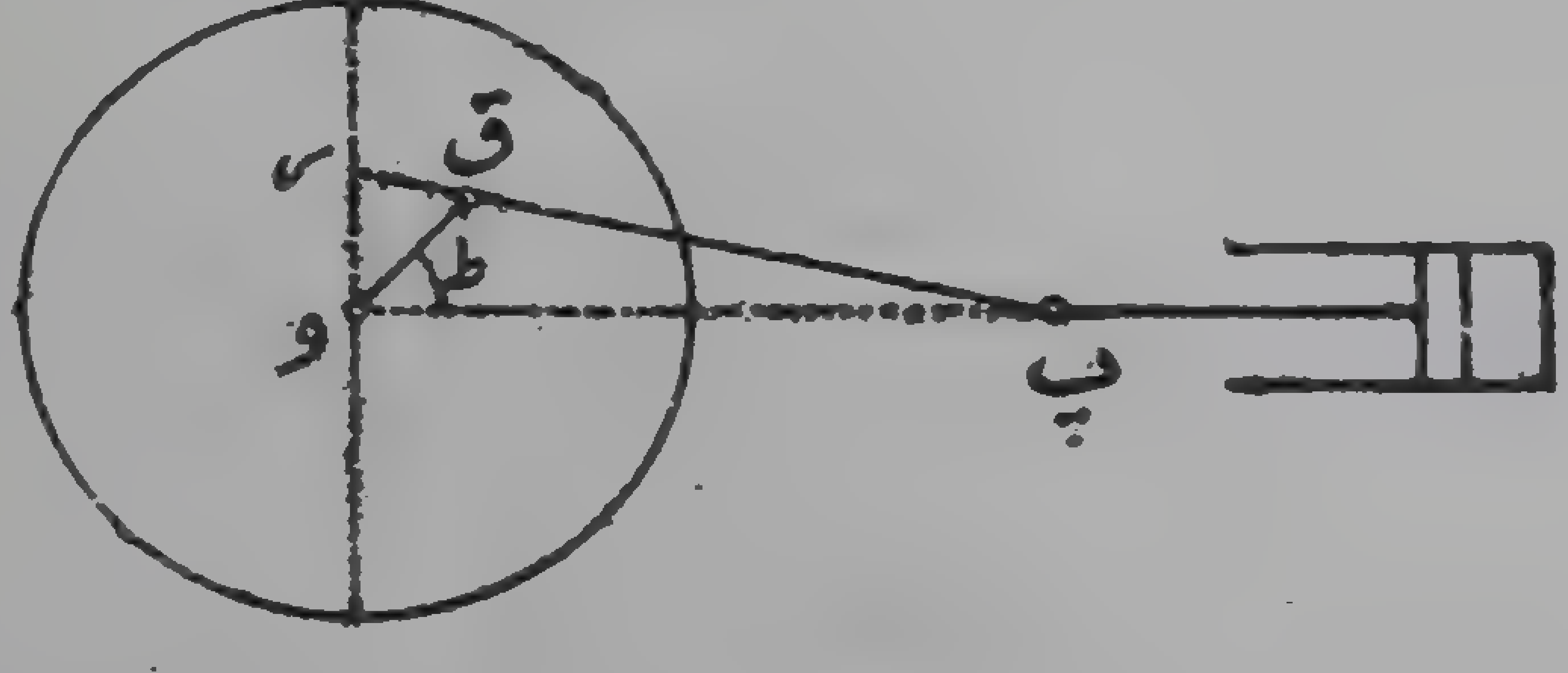
وہ بالعموم ط کا ایک تفاعل ہوتا ہے اور اس لیے مختلف تشکیلوں میں مختلف ہوتا ہے۔

مثلاً ایک استوار جسم کی صورت میں جو دو اُبعادوں میں حرکت کر رہا ہو اگر ط اُس زاویہ کو تعبیر کرے جس میں سے جسم کسی معیاری محل سے گھوم چکا ہے تو (۱) میں سرعہ، گردش کے فوری محور سے ذرّہ م کا فاصلہ ہوگا اور اس لیے ا' اِس خط کے گرد جمود کا معیار (بالعموم متغیر) ہوگا۔

ایک اور مثال کے طور پر، ہم وہ نظام لے سکتے ہیں جس میں ایک بھاپ انجن کا فشارہ، واصل ڈنڈا، اور اڑ پہیہ ہوتا ہے۔ فرض کرو کہ اڑ پہیہ کا جمود کا معیار ع اور فشارہ کی کمیت م ہے۔ سادگی کے مدنظر ہم واصل ڈنڈے کے جمود کو نظر انداز کرتے ہیں۔ اگر ط وہ زاویہ ہو جس کو شکل میں دکھایا گیا ہے تو فشارہ کی رفتار و س × ط̇ [سکونیات دفعہ ۱۵] ہے اور اس کی توانائی بالحرکت

$$\frac{1}{2}\left(\text{ع} + \text{م} \times \text{و س}^2\right)\dot{\text{ط}}^2$$

ہے۔ اس لیے جمود کا سر ع + م × و س² ہے۔ اُڑ پہیہ پر تجربہ کرنے والے
(۱۸۵) مشاہد کو یہ نظر آئیگا کہ اڑ پہیہ اِس مقدار کا جمود کا متغیر معیار رکھتا ہے۔



شکل ۵۷

اِس نظام کی تشکیل فاصلہ و پ کے ذریعہ بھی مشخص ہو سکتی ہے اس کو لا سے

تعبیر کرو تو

$$\text{لا} = - \text{و} \text{ر} \times \text{ط}$$

اور اب توانائی بالحرکت کا جملہ

$$\frac{1}{2} \left(\text{م} + \frac{1}{\text{و} \text{ر}^2} \right) \text{لا}^2 \qquad \ldots\ldots\ldots (5)$$

ہے۔ اِس نقطہ نظر سے جمود کا سر م + $\frac{1}{\text{و}\text{ر}^2}$ ہے، یہ فشارہ کے جمود کو جیسا کہ اڑپہیہ سے واضح ہوتا ہے، تعبیر کرتا ہے۔ اُن نقطوں پر جہاں ط = ۰ یا π یہ ظاہری جمود[1] لامتناہی ہوتا ہے۔

چند اور مثالیں ذیل میں درج ہیں۔

مثال ا۔ کمیت م کی ایک واگن ہے جس میں ن مساوی پہیئے لگے ہوئے ہیں جن میں سے ہر ایک کی کمیت م ہے۔

فرض کرو کہ ہر پہیہ کا نصف قطر ا اور مرکز کے گرد گردش کا نصف قطر کہ ہے۔ جب واگن رفتار ع سے حرکت کر رہی ہو تو ایک پہیہ کی زاوئی رفتار $\frac{\text{ع}}{\text{ا}}$ ہو گی اور اس لیے ہر ایک پہیہ کی توانائی بالحرکت

$$\frac{1}{2} \text{م} \left(\text{ع}^2 + \frac{\text{ک}^2}{\text{ا}^2} \text{ع}^2 \right)$$

ہو گی۔ اس لیے کُل توانائی بالحرکت

$$\frac{1}{2} \left\{ \text{م} + \text{ن} \text{م} \left(1 + \frac{\text{ک}^2}{\text{ا}^2} \right) \right\} \text{ع}^2 \qquad \ldots\ldots\ldots (6)$$

ہے۔ جملہ

$$\text{م} + \text{ن} \text{م} \left(1 + \frac{\text{ک}^2}{\text{ا}^2} \right)$$

سے واگن کے ظاہری جمود کی پیمائش ہوتی ہے۔

---

[1] رینکن نے اس کو Reduced inertia بھی کہا ہے۔

(۱۸۶) **مثال ۲** ۔ ایک مرغولی پیچ سے ایک وزن سہارا ہوا ہے جو انتصاباً اہتزاز کرتا ہے (شکل ۵ صفحہ)۔ اس کی جمود کی رعایت حسب ذیل طریقہ پر تقریباً رکھی جا سکتی ہے۔

ہم یہ مان لیتے ہیں کہ پیچ ایکساں طور پر تنا ہوا ہے[1] چنانچہ کوئی نقطہ جس کا فاصلہ اوپر کے سرے سے غیر تنی ہوئی حالت میں ی ہو فاصلہ $\frac{ی}{ل} \times لا$ میں سے نیچے وار ہٹتا ہے جہاں وزن کا نیچے وار ہٹاؤ لا ہے اور پیچ کا کُل طول ل ہے۔ اگر پیچ کی کُل کمیت م ہو تو طول کے عنصر مف ی کی کمیت $\frac{م\, مف\, ی}{ل}$ ہوگی اور اس لیے اس کی توانائی بالحرکت

$$\frac{1}{2}\,\frac{م\, مف\, ی}{ل}\left(\frac{ی}{ل}\,\dot{لا}\right)^2$$

ہے۔ اس لیے کُل توانائی بالحرکت

$$\frac{1}{2}\,مر\,\dot{لا}^2 + \frac{1}{2}\,\frac{م\,\dot{لا}^2}{ل^3}\int_0^ل ی^2\, مف\, ی = \frac{1}{2}\left(مر + \frac{1}{3}م\right)\dot{لا}^2 \quad \ldots\ldots(۷)$$

جہاں لٹکے ہوئے وزن کی کمیت مر ہے۔ اس طرح پیچ کے جمود کی رعایت اس طور پر رکھی جا سکتی ہے کہ اس کی کمیت کا ایک ثلث لٹکی ہوئی کمیت میں جمع کیا جائے۔

۶۶۔ توازن کے گرد اہتزاز۔ قائمیت۔

اگر اس قسم کا نظام جس کا ذکر اوپر آچکا ہے تخفظی ہو اور اگر توانائی بالقوہ قہ سے تعبیر ہو تو بیرونی قوتیں نہ ہونے کی صورت میں

$$\frac{1}{2}\,\text{آ}\,\dot{ط}^2 + قہ = \text{مستقل} \quad \ldots\ldots\ldots(۱)$$

---

[1] یہ شرط عملاً پوری ہوگی اگر خود پیچ کے آزاد ارتعاش کے دَور، لٹکے ہوئے وزن کے اہتزاز کے دَور کے مقابلہ میں چھوٹے ہوں۔

اس کو ت کے لحاظ سے تفرق کرنے اور طہ سے تقسیم کرنے سے

$$\text{ا}\,\ddot{\text{طہ}} + \frac{۱}{۲}\,\frac{\text{فرا}}{\text{فرطہ}}\,\dot{\text{طہ}}^{۲} = -\,\frac{\text{فرقہ}}{\text{فرطہ}} \qquad \ldots\ldots(۲)$$

یہ نظام کی حرکت کی مساوات ہے جس میں تمام تعاملوں کو ساقط کیا جاچکا ہے کیونکہ وہ بہ حیثیت مجموعی کوئی کام نہیں کرتے۔

نظام کے توازن کی تشکیلوں کو معلوم کرنے کے لیے ہم $\dot{\text{طہ}} = \ddot{\text{طہ}} = ۰$ رکھتے ہیں تو

$$\frac{\text{فرقہ}}{\text{فرطہ}} = ۰ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(۳)$$

حاصل ہوتا ہے یعنے توازن کی ممکن تشکیلیں طہ کی ایسی قیمتوں کے متناظر ہوتی ہیں کہ توانائی بالقوہ چھوٹے ہٹاؤں کے لیے مقیم ہوتی ہے۔

توازن کی نوعیت کا امتحان کرنے کے لیے ہم فرض کرینگے کہ محدد
(۱۸۷ طہ میں (ایک مستقل کے جمع کرنے سے) ایسی ترمیم کی گئی ہے کہ وہ زیر بحث تشکیل میں معدوم ہوتا ہے۔ تب طہ کی چھوٹی قیمتوں کے لیے قہ کی قیمت کو شکل

$$\text{قہ} = \text{قہ}_{۰} + \frac{۱}{۲}\,\text{ا}\,\text{طہ}^{۲} + \ldots, \qquad \ldots\ldots(۴)$$

میں پھیلایا جاسکتا ہے جس میں طہ میں پہلے درجہ کی رقم غائب ہے کیونکہ بموجب فرض طہ = ۰ کے لیے مساوات (۳) پوری ہوتی ہے۔ پس توازن کے محل سے خفیف ہٹاؤ پر غور کرنے سے

$$\text{ا}\,\ddot{\text{طہ}} = -\,\text{ا}\,\text{طہ}\ \text{تقریباً} \qquad \ldots\ldots(۵)$$

حاصل ہوتا ہے، (۲) کی دوسری رقم کو ترک کردیا گیا ہے کیونکہ وہ دوسرے رتبہ کی چھوٹی مقدار ہے۔ نیز سر ا کو مستقل اور اس کی قیمت توازن کے مساوی سمجھی جاسکتی ہے کیونکہ اس سے مساوات میں صرف دوسرے رتبہ کی

خطا واقع ہوتی ہے۔[1]

اگر ا مثبت ہو تو اِس کا حل

$$ط = ج \, جم \,(ن ت + صہ) \quad \text{..........} (۶)$$

ہے جہاں

$$ن = \sqrt{\frac{ا'}{ا}} \quad \text{..........} (۷)$$

اور مستقل ا' ، ا اختیاری ہیں۔ ہر ذرہ م اپنے راستہ پر آگے پیچھے اہتزاز کرتا ہے اور اس کا ہٹاؤ دفعہ ۶۵ کی ترقیم میں،

$$س = عہ \, ط = عہ \, ج \, جم \,(ن ت + صہ) \quad \text{.....} (۸)$$

سے حاصل ہوتا ہے جہاں عہ ایک سر ہے جو ذرّہ بہ ذرّہ متغیر ہوتا ہے۔ دَور $\frac{۲\pi}{ن}$ نظام کی ترکیب سے متعین ہوتا ہے اور اُس نسبت پر منحصر ہوتا ہے جو "قائمیت کے سر" ا' کو جمود کے سر کے ساتھ ہے۔

اگر ا منفی ہو تو (۵) کا حل

$$ط = ج \, و^{ن ت} + جَ \, و^{-ن ت} \quad \text{........} (۹)$$

ہے جہاں

$$ن = \sqrt{-\frac{ا'}{ا}} \quad \text{..........} (۱۰)$$

پس اگر ابتدائی شرطوں کو خاص طور پر اس طرح مرتب نہ کیا گیا ہو کہ ج = ۰ تو ط کی قیمت بالآخر اس قدر بڑی ہو جائیگی کہ تقرب جایز نہ رہیگا۔

[1] اُس استوار جسم کی صورت میں جو دو بُعدوں میں اہتزاز کر رہا ہو فوری محور کے گرد (گویا کہ وہ جسم میں اور فضا میں ثابت ہے) معیار لینے سے (۵) کے مماثل نتیجہ حاصل ہوتا ہے۔

اس لیے توازن کو قائم یا غیر قائم کہتے ہیں بموجب اس کے کہ اُ مثبت یا منفی ہو یعنے بموجب اس کے کہ قہ کی قیمت توازن اَقل یا اعظم ہو۔

اگر نظام پر بیرونی قوتیں عمل کریں تو وہ کام جو وہ ایک صغیر ہٹاؤ میں کرتی ہیں شکل طا مف طہ میں بیان ہو سکتا ہے۔ تب مساوات (۱) کی بجائے مساوات

$$\frac{\text{فر}}{\text{فرت}}\left(\frac{1}{2}\,\text{ا}\,\dot{\text{ط}}^{2}+\text{قہ}\right)=\text{طا}\,\dot{\text{ط}} \quad \ldots\ldots(۱۱)$$

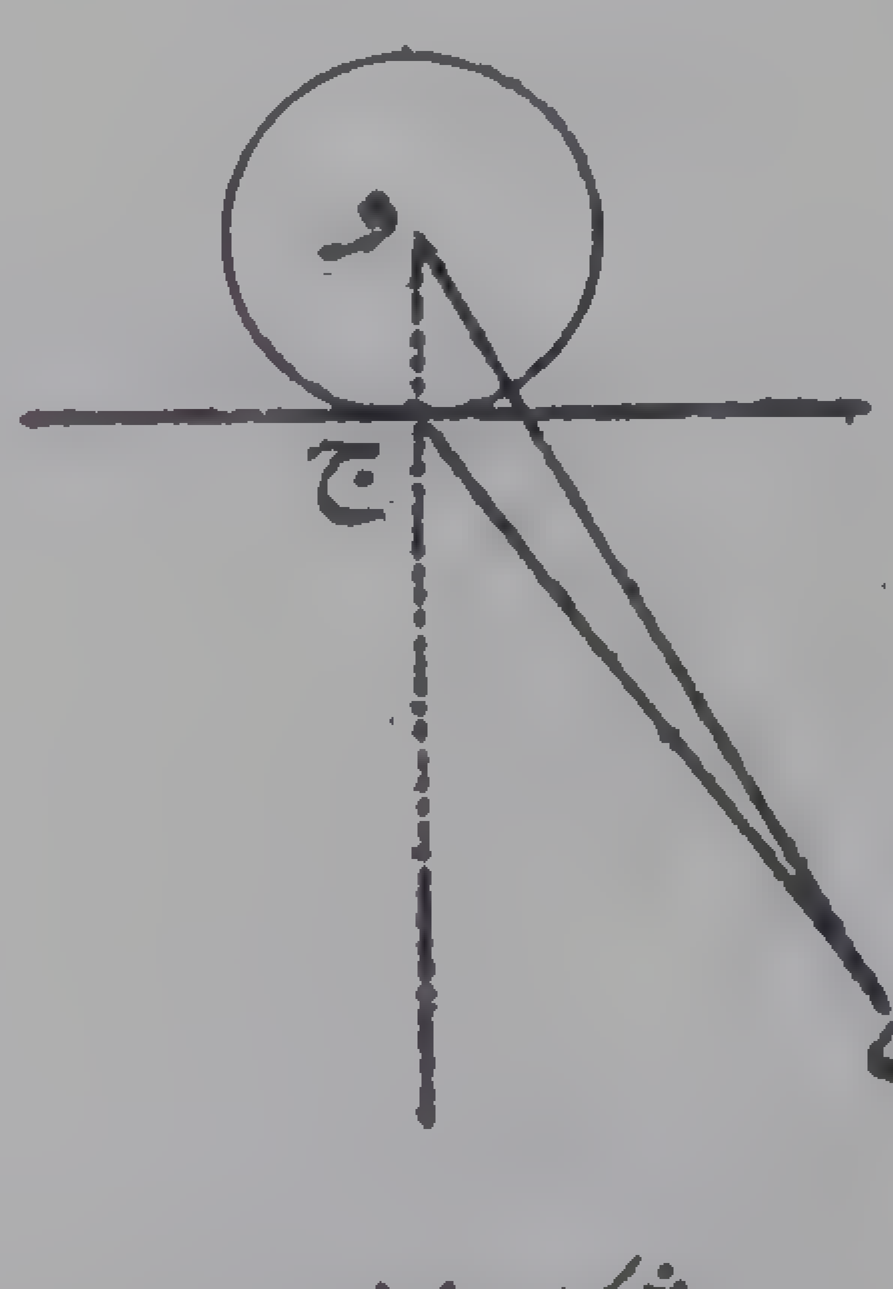
حاصل ہوتی ہے۔ تفرق کرنے اور طۂ سے تقسیم کرنے پر

$$\text{ا}\,\ddot{\text{ط}}+\frac{1}{2}\,\frac{\text{فر ا}}{\text{فر طہ}}\,\dot{\text{ط}}^{2}=-\frac{\text{فر قہ}}{\text{فر طہ}}+\text{طا} \quad \ldots\ldots(۱۲)$$

مقدار طا کو نظام پر عمل کرنے والی "تعمیمی قوت" کہتے ہیں۔ اس کی نوعیت محدد طہ کی نوعیت پر منحصر ہوگی۔ اگر طہ ایک خط ہو تو طا کے ابعاد ایک قوت (اس لفظ کے معمولی مفہوم میں) کے ابعاد ہونگے۔ اگر طہ ایک زاویہ ہو تو طا ایک جفت کی نوعیت کا ہوگا اور علیٰ ہذا القیاس۔

مثال ۱۔

نصف قطر ا کا ایک مستدیر اسطوانہ جس کا مرکز کمیت محور سے فاصلہ حہ پر ہے ایک افقی مستوی پر لڑھکتا ہے۔ اِس مسئلہ میں اس مرکب رقاص کی صورت شامل ہے جس میں دھار کی بجائے ایک اسطوانی الپن ہو جو افقی سہاروں پر لڑھکتی ہو[1] (شکل ۵۸)۔



شکل ۵۸

فرض کرو کہ اسطوانہ کا محور و سے تماس کا خط ج سے، اور مرکز کمیت گ سے تعبیر ہوتے ہیں اور فرض کرو کہ وگ کا میلان انتصابی وج کے ساتھ طہ ہے۔ اگر گ میں سے گزرنے والے ایک محور کے گرد جو

[1] اِس مسئلہ پر لیولرنے بحث کی ہے۔ (سنہ ۱۷۵۶ء)۔

استوانے کے محور کے متوازی ہے گردش کا نصف قطر کہ ہو تو فوری محور (ج) کے گرد جمود کا معیار م (ک² + ج گ²) ہے اور اس لیے توانائی بالحرکت

$$\tfrac{1}{2}\,\text{م}\,(\text{ک}^2 + \text{ج گ}^2)\,\dot{\text{ط}}^2$$

$$= \tfrac{1}{2}\,\text{م}\,(\text{ک}^2 + \text{ا}^2 - 2\,\text{ا ھ جم ط} + \text{ھ}^2)\,\dot{\text{ط}}^2 \quad \ldots\ldots (13)$$

ہے ۔ چنانچہ توانائی کی مساوات

$$\tfrac{1}{2}\,\text{م}\,(\text{ک}^2 + \text{ا}^2 - 2\,\text{ا ھ جم ط} + \text{ھ}^2)\,\dot{\text{ط}}^2$$

$$= \text{م ج ھ جم ط} + \text{مستقل} \quad \ldots\ldots\ldots (14)$$

ہے ۔

عام نظریہ میں ہم یہ دیکھ چکے ہیں کہ چھوٹے اہتزازوں کی صورت میں جمود کے سر کی قیمت میں ہم ط = ۰ رکھ سکتے ہیں اور یہ کہ توانائی بالقوہ کی قیمت
(۱۸۹) صرف دوسرے رتبہ کی چھوٹی مقداروں تک مطلوب ہوتی ہے ۔ اس لیے بائیں جانب

$$\text{جم ط} = 1 - \tfrac{1}{2}\,\text{ط}^2$$

رکھنے سے

$$\left\{\text{ک}^2 + (\text{ھ} - \text{ا})^2\right\}\dot{\text{ط}}^2 + \text{ج ھ ط}^2 = \text{مستقل} \quad \ldots\ldots (15)$$

اور تفرق کرنے سے

$$\left\{\text{ک}^2 + (\text{ھ} - \text{ا})^2\right\}\ddot{\text{ط}} + \text{ج ھ ط} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (16)$$

اس لیے مماثل سادہ رقاص کا طول

$$\text{ل} = \frac{\text{ک}^2 + (\text{ھ} - \text{ا})^2}{\text{ھ}} \quad \ldots\ldots\ldots (17)$$

ہے ۔

صریحاً یہ نتیجے کسی ایسے گردشی جسم کی صورت پر صادق آتے ہیں جو تشاکل کے ایک انتصابی مستوی کے متوازی اور محور کے علی القوائم لڑھک رہا ہو ۔ نصف

قطر ا کے ایک ایکساں ٹھوس نیم کرہ کی صورت میں

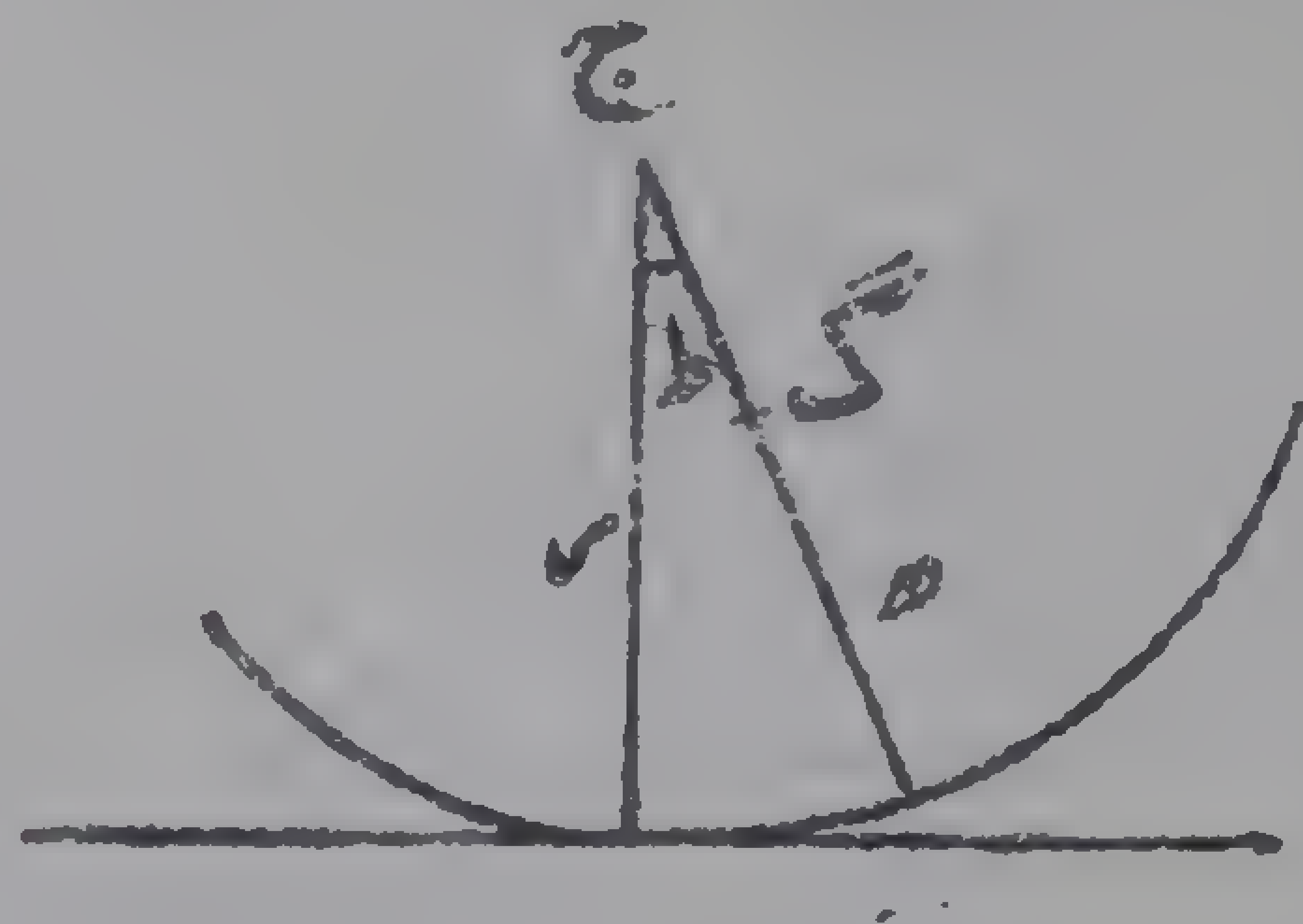
$$کہ^2 = \frac{۲}{۵} ا^2 - (\frac{۳}{۸} ا)^2 ، ھ = \frac{۳}{۸} ا \quad .... (۱۸)$$

اس لیے

$$ل = ۱٫۷۳ ا$$

مثال ۲۔ کسی شکل کی تراش کا اسطوانہ ایک افقی مستوی پر چھولتا ہے اور اس طرح توازن کے ایک محل کے گرد چھوٹے اہتزاز کرتا ہے۔

توازن کے محل میں اس کا مرکز ثقل گ اُس انتصابی میں ہے جو خط تماس میں سے گزرتا ہے۔ فرض کرو کہ اُس کا فاصلہ خط تماس کے اوپر ھ ہے۔ جب اسطوانہ اِس محل سے ایک چھوٹے زاویہ ط میں سے لڑھکتا ہے تو وہ انتصابی جو نئے خط تماس میں سے گزرتا ہے اور گ میں سے گزرتی ہوئی عمودی تراش کے مستوی میں ہے گ میں سے گزرنے والے اُس خط سے جو ابتداءً انتصابی تھا کسی نقطہ ج پر ملیگا۔ اب علم ہندسہ صغاری سے یہ معلوم ہے کہ اِن دو متقاطع عادوں کے طولوں میں فرق صرف نکسیر ے رتبہ کی ایک چھوٹی مقدار ہے۔ ان طولوں کو ر سے تعبیر کیا جائے تو



شکل ۵۹

توانائی بالقوہ کا اضافہ، دوسرے رتبہ تک

$$م ج (ر - ھ) (۱ - جم ط) = \frac{۱}{۲} م ج (ر - ھ) ط^2 \quad ..... (۱۹)$$

ہے جہاں س کو اب ابتدائی نقطہ تماس پر عمودی تراش کا نصف قطر انحناء[1] سمجھا جاسکتا ہے ۔ اس لیے توازن کامل قائم ہے اگر $ھ < س$ [سکونیات دفعہ ۵۹] (۱۹۰)
نیز چونکہ توانائی بالحرکت، کافی تقریب تک،

$$\frac{1}{2} م \left(ک^2 + ھ^2\right) ط^2 \qquad ....(۳۰)$$

ہے جہاں گ میں سے گزرنے والے ایک طولی محور کے گرد گردش کا نصف قطر ک ہے اس لیے معادل سادہ رقاص کا طول

$$ل = \frac{ک^2 + ھ^2}{س - ھ}$$

ہے ۔

(۱۷) یا (۲۱) سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ مرکب رقاص میں، اگر دھار کو خفیف طور پر گول بنایا گیا ہو اور اس طرح اس کا نصف قطر انحناء ا ہو، ل کی قیمت

$$\frac{ک^2 + ھ^2}{ھ} \quad سے \quad \frac{ک^2 + ھ^2}{ھ + ا}$$

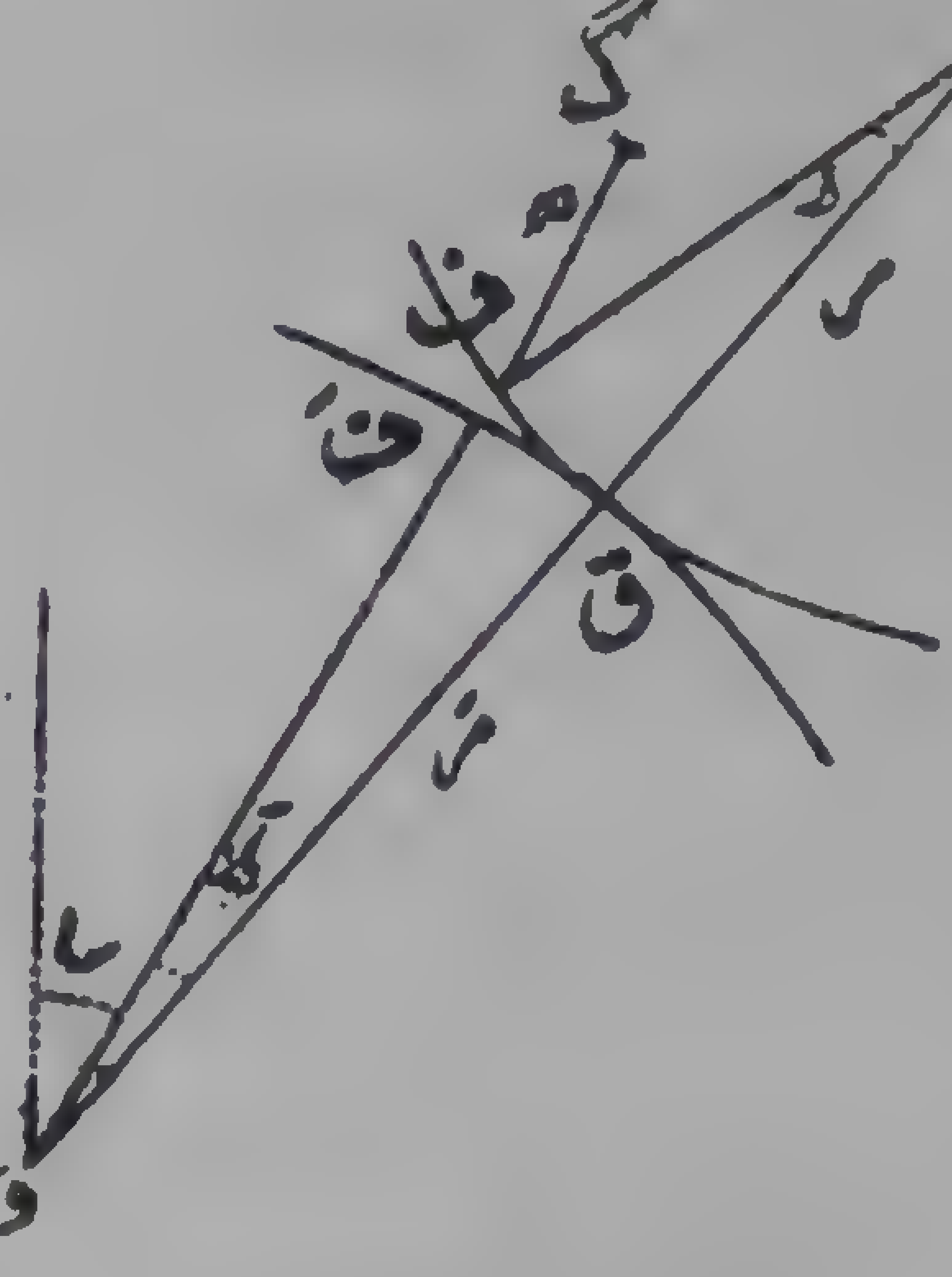
میں بدل جاتی ہے اگر ھ اب اُس فاصلہ کو تعبیر کرے جو گ سے دھار تک ہے یعنے ل، تقریباً نسبت $ا - ا \backslash ھ$ میں گھٹ جاتا ہے ۔ ج کو متعین کرنے کے لیے جو ضابطے ہیں اُن میں اِس کی رعایت اس طرح رکھی جاسکتی ہے کہ $ت^2$ (دَور کا مربع) کی مشاہدہ کردہ قیمتوں کو نسبت $ا + ا \backslash ھ$ میں بدلا جائے ۔ یہ تصحیح آسانی سے مشاہدہ کی خطاؤں کے اندر آسکتی ہے ۔

مثال ۳ ۔ اگر ایک اسطوانہ دوسرے اسطوانہ پر ہو تو اِس عام تر صورت پر بھی اسی طرح بحث کی جاسکتی ہے ۔

شکل سے وہ انتصابی تراش تعبیر ہوتی ہے جو طولوں کے عمودوار ایک

---

[1] نصف قطر انحناء اور س میں صرف پہلے رتبہ کی ایک چھوٹی مقدار کا فرق ہے ۔



شکل ۱۱۰

مستوی سے جو مرکز ثقل گ میں سے گزرتا ہے منقطع ہوتی ہے۔ فرض کرو کہ نچلے منحنی پر ف وہ نقطہ ہے جو توازن کے محل میں نقطہ تماس ہے اور اس نقطہ پر کا مماس انتصابی سے زاویہ سا بناتا ہے فرض کرو کہ ق وہ نقطہ تماس ہے جب کہ اوپر کا اسطوانہ زاویہ فہ میں سے گردش کر چکتا ہے اور فَ اوپر کے منحنی کا وہ نقطہ ہے جو ابتداً ف پر منطبق تھا۔ فرض کرو کہ ف اور فَ پر اِن دو منحنیوں کے عماد ق پر کے مشترک عماد سے علی الترتیب نقطوں و اور وَ پر ملتے ہیں تو ہم

وف = وق = ر، وَفَ = وَق = رَ، ف گ = ھ ....(۲۲)

لکھ سکتے ہیں جہاں متقاطع عمادوں کی تخمین میں جو خطا ہوئی ہے اس کو مساوی سمجھا گیا ہے۔ نیز فرض کرو کہ طہ اور طہَ اُن زاویوں کو تعبیر کرتے ہیں جو مساوی قوسیں ف ق فَ ق علی الترتیب و، وَ پر بناتی ہیں۔

چونکہ عماد ف و اور فَ وَ ابتداً ایک ہی خط میں تھے اس لیے

طہ + طہَ = فہ ....(۲۳)

جہاں فہ وہ زاویہ ہے جس میں سے اوپر کا اسطوانہ گھوم چکا ہے۔ لیکن

ر طہ = رَ طہَ تقریباً ....(۲۴)

اس لیے

طہ = (رَ فہ)/(ر + رَ)، طہَ = (ر فہ)/(ر + رَ) ....(۲۵)

چونکہ ف گ، زاویہ فہ میں سے گردش کر چکا ہے اس لیے وَ کی ہموار مستوی سطح کے اوپر گ کا ارتفاع

وَ و جم (سا + طَہ) ـ وف جم (سا + فہ) + ف گ جم فہ

= (سا + سَ) {(۱ ـ ۱/۲ طَہ^۲) جم سا ـ طَہ جب سا}

ـ س {(۱ ـ ۱/۲ فہ^۲) جم سا ـ فہ جب سا} + ھ (۱ ـ ۱/۲ فہ^۲)

(۲۶)......

ہے ـ طَہ، فہ میں پہلے رتبہ کی رقمیں (۲۵) کی وجہ سے کٹ جاتی ہیں۔ اِس طرح ہٹاؤ کی وجہ سے توانائی بالقوہ کا اضافہ

۱/۲ مرج × (س سَ جم سا ـ ھ (س + سَ)) / (س + سَ) فہ^۲ ...... (۲۷)

ہے۔ جہاں س اور سَ کو اب اِن دو منحنیوں کے علی الترتیب نقطوں فَ اور ف پر کے نصف قطر انحناء سمجھا جا سکتا ہے۔

جملہ (۲۷) مثبت ہے اور اس لیے توازن کا محل قائم ہوگا اگر

جم سا / ھ > ۱/س + ۱/سَ .... (۲۸)

اور یہ وہ ضابطہ ہے جو بالعموم استعمال کیا جاتا ہے [سکونیات دفعہ ۵۹]

توانائی بالحرکت

۱/۲ مہ (کہ^۲ + ھ^۲) فہ^۲ .... (۲۹)

ہے جہاں گ میں سے گزرنے والے ایک طولی خط کے گرد گردش کا نصف قطر کہ ہے۔ اس لیے معادل سادہ رقاص کا طول

ل = (کہ^۲ + ھ^۲) (۱/س + ۱/سَ) / (جم سا ـ ھ (۱/س + ۱/سَ)) ...... (۳۰)

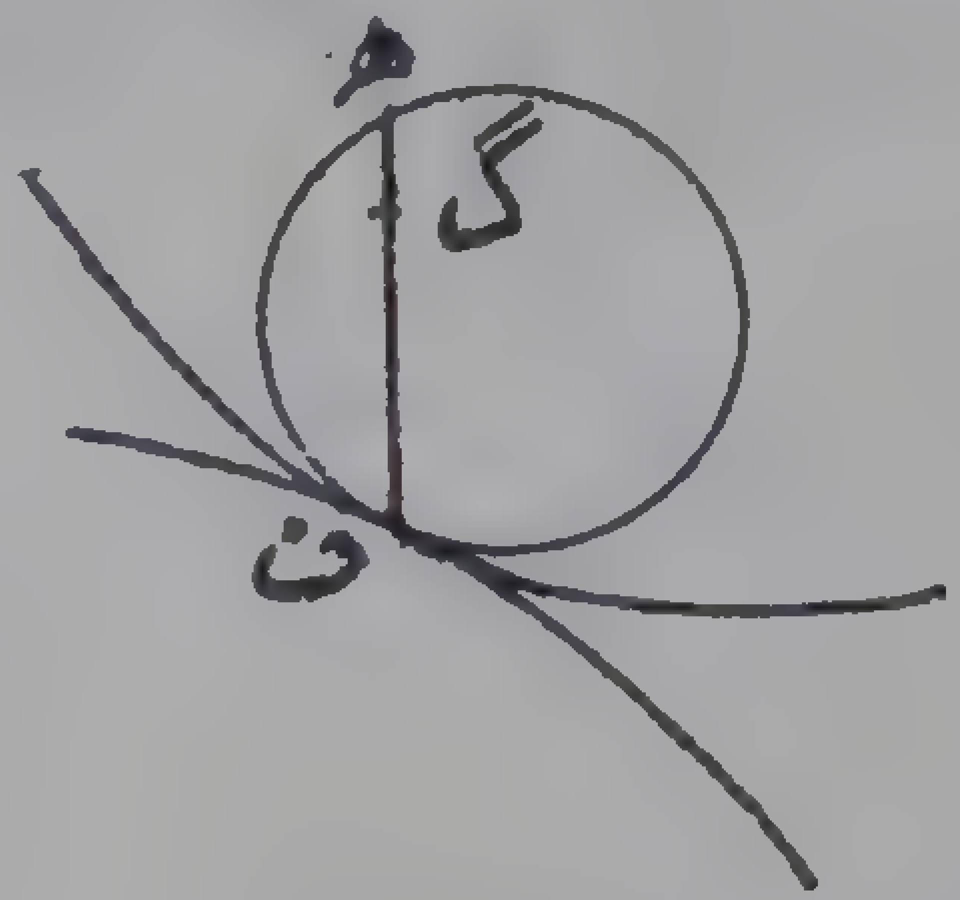
ہے۔

اگر ہم قطر ق کا ایک دائرہ حسب شکل (۶۱) کھینچیں ایسا کہ

$$\frac{1}{\text{ق}} = \frac{1}{\text{س}} + \frac{1}{\text{سَ}} \qquad (۳۱)$$

یعنے اُس کا انحناء دیے ہوئے منحنیوں کے انحناؤں کے مجموعہ کا دُگنا ہو اور
وہ نچلے منحنی کو ابتدائی نقطہ تماس پر مس کرے اور اگر ف گ اپنے ابتدائی محل میں
اس دائرہ سے ھ پر ملے تو ف ھ = ق جم سا۔ تب (۲۸) سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ
توازن قائم یا غیر قائم ہوگا بموجب اس کے کہ گ، ھ کے نیچے یا اوپر ہو۔ گردونیوں
کے نظریہ میں اِس دائرہ کو "انعطافوں کا دائرہ" کہتے ہیں۔ اُن نقطوں کے
راستے جن کو لڑھکنے والا منحنی لے جاتا ہے ف کے لحاظ سے محدب یا مقعر ہوتے
(۱۹۲) ہیں بموجب اس کے کہ وہ اِس دائرہ کے اندر یا باہر واقع ہوں اور خود دائرہ پر کے
نقطے اپنے متعلقہ راستوں پر انعطافوں کے نقطوں پر ہوتے ہیں۔ نیز (۳۰) سے

$$\text{ل} = \frac{\text{ک}^2 + \text{ھ}^2}{\text{ھ گ}} \qquad (۳۲)$$



شکل ۶۱

علامتوں س، سَ، ھ کو اُس صورت
میں جس کو شکل میں دکھایا گیا ہے مثبت لیا گیا ہے
ان نتیجوں میں دوسری صورتیں شامل ہو جائینگی اگر
علامت کی مناسب تبدیلیاں عمل میں لائی جائیں۔

یہ پوری تحقیق ایک استوار جسم کی کسی
صورت پر جب کہ اس کو ایک انتصابی مستوی
کے متوازی حرکت کا آزادی کا ایک درجہ حاصل ہو
اطلاق پذیر ہوگی بشرطیکہ صرف جاذبہ ہی وہ قوت
ہو جو کام کرتی ہے۔ تب شکل کے دو منحنی دو قطب منحنی (یعنے جسم میں اور فضاء میں فوری
مرکز کے طریق) ہوتے ہیں جو حرکیات محض کے ایک مسئلہ کی رُو سے جسم کی کسی حرکت
میں ایک دوسرے کے ساتھ تماس میں لڑھکتے ہیں [سکونیات دفعہ ۱۶، ۵۹]۔

۶۷- رقاص کے قسری اہتزاز- زلزلہ نگار۔

ایک مرکب رقاص کے قسری اہتزازوں (شکل ۴۵) پر جو سہارے و کے ایک مقررہ افقی حرکت کی وجہ سے ہوں حسب ذیل طریقہ پر بحث کیجا سکتی ہے۔

چونکہ اہتزازوں کو چھوٹا فرض کیا گیا ہے اس لیے و پر کے تعامل کا انتصابی جزو ترکیبی تقریباً م ج ہوگا کیونکہ مرکز کمیت گ کا انتصابی ہٹاؤ دوسرے رتبہ کا ہے۔ اس لیے اگر رقاص پر سہارے کا افقی تعامل لا ہو تو گ کے گرد معیار لینے سے

م کہ² (فر² ط / فرت²) = - م ج ھ ط - لا ھ .... (۱)

باقی ترقیم وہی ہے جو دفعہ ۵۵ میں استعمال کی جا چکی ہے۔ اگر و کا افقی ہٹاؤ (۱۹۳)
ضا ہو تو گ کا افقی ہٹاؤ ضا + ھ ط ہوگا۔ اس لیے

م (فر² / فرت²) (ضا + ھ ط) = لا .... (۲)

اب لا کو ساقط کرنے پر

ل (فر² ط / فرت²) + ج ط = - (فر² ضا / فرت²) .... (۳)

جہاں ل = ھ + کہ² / ھ - اگر

لا = ضا + ل ط .... (۴)

رکھا جائے اور اس طرح لا' اہتزاز کے مرکز کے افقی ہٹاؤ کو تعبیر کرے تو اوپر کی مساوات

(فر² لا / فرت²) + (ج / ل) لا = (ج / ل) ضا .... (۵)

ہو جاتی ہے جیسا کہ طول ل کے ایک سادہ رقاص کی صورت میں حاصل ہوتی ہے۔
{ دفعہ ۱۳ مساوات (۱۴) }۔
اگر

$$ن^{2} = \frac{ج}{ل} \qquad \ldots\ldots\ldots (6)$$

رکھا جائے اور اس طرح $\frac{2\pi}{ن}$ آزاد ارتعاش کا دور ہو تو سہارے کے نقطہ کے سادہ موسیقی ارتعاش

$$ضا = ج \; جم \; ب ت \qquad \ldots\ldots\ldots (7)$$

کی وجہ سے قسری اہتزاز

$$ط = \frac{ب^{2} \, ضا}{(ن^{2} - ب^{2}) \, ل} \qquad \ldots\ldots\ldots (8)$$

یا

$$لا = \frac{ضا}{1 - ب^{2} / ن^{2}} \qquad \ldots\ldots\ldots (9)$$

ہے۔

صریحاً یہ ضابطے دفعہ ۵۵ کے "افقی رقاص" پر صادق آتے ہیں بشرطیکہ ہم ج کی بجائے ج جب بہ رکھیں جہاں لٹکاؤ کے محور کا میلان انتصابی سے بہ ہے چنانچہ (۶) کی بجائے

$$ن^{2} = (ج \; جب \; بہ) / ل \qquad \ldots\ldots\ldots (10)$$

لکھا جا سکتا ہے۔

(۹) سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ اگر ن کے مقابلہ میں ب بڑا ہو تو ضا کے مقابلہ میں لا چھوٹا ہو گا۔ اس لیے عائد کردہ ارتعاشوں کی صورت میں جو رقاص کے فطری ارتعاشوں کے مقابلہ میں تیز ہوتے ہیں اہتزاز کا مرکز (جس حد تک کہ قسری اہتزازوں کا تعلق ہے) بڑی حد تک ساکن ہوتا ہے۔

یہ امور زلزلہ نگاروں کے نظریہ سے بھی تعلق رکھتے ہیں۔ زلزلہ نگار وہ آلہ ہے جو زمین کی سطح کی حرکت کے کسی ایک جزو ترکیبی کو اتنی صحت کے ساتھ مندرج کرتا ہے جتنی ممکن ہے خواہ یہ حرکت زلزلوں کی وجہ سے ہو یا کسی اور سبب سے۔ اس کو کامل صحت کے ساتھ عمل میں لانے کے لیے یہ ضروری ہے کہ کوئی جسم حوالے کی اساس کے طور پر موجود ہو اور وہ خود جس حد تک کہ زیر بحث جزو ترکیبی کا تعلق ہے حرکت میں کوئی حصہ نہ لے اور اس لیے اُس کو اضافی طور پر تعدیلی توازن میں ہونا چاہیے۔ بلاشبہ یہ ناقابل عمل ہے کیونکہ کچھ نہ کچھ قائمیت لازمی ہے، لیکن اگر اضافی ہٹاؤ کی وجہ سے جو قوت عود عمل میں آتی
ہے وہ خفیف ہو اور اس لیے آزاد ارتعاش کا دَور طویل ہو تو جسم صرف (۱۹۴)
خفیف طور پر ارتعاشوں سے جو مقابلتاً تیز ہونگے متاثر ہوگا۔ کافی طول کا ایک سادہ رقاص جس کی حرکت ایک انتصابی مستوی میں مقید ہو اس شرط کو پورا کریگا جس حد تک کہ ہٹاؤ کے کسی افقی جزو ترکیبی کا تعلق ہے۔ لیکن زیادہ سہولت کے مدنظر کوئی ”افقی رقاص“ استعمال کیا جاتا ہے جس میں لٹکاؤ کا محور انتصابی کے ساتھ ایک بہت ہی چھوٹا زاویہ بناتا ہے۔ اس طریقہ پر ہمیں کوئی ۳۰۰ یا ۴۰۰ فٹ لمبے ایک سادہ رقاص کا معادل حاصل ہوتا ہے مثلاً اُس آلہ پر غور کرو جس کو شکل (۶۲) میں دکھایا گیا ہے۔ (ب ایک



شکل ۶۲

ہلکا ڈنڈا ہے جو ا پر ایک مخروطی نوک میں ختم ہوتا ہے اور یہ نوک ایک ثابت سطح پر ہے۔ ڈنڈے سے ایک وزن و لگا ہوا ہے جو ایک باریک تار کے ذریعہ نقطہ ج سے بندھا ہوا ہے اور ج تقریباً اُسی انتصابی میں ہے جس میں ا ہے۔ تب گردش کا محور اج ہے۔ اب جس چیز کا فی الواقع مشاہدہ کیا جاتا ہے وہ آلہ کے فریم کے لحاظ سے ڈنڈے کے کسی نقطہ ف کا ہٹاؤ ہے۔ اس کی تکبیر مناظری یا میکانیکی ذریعوں سے کی جاتی ہے اور اس کو کاغذ کے ایک ایکساں طور پر متحرک پٹی پر مرتسم کیا جاتا ہے' اس طرح ایک مکانی زمانی منحنی حاصل ہوتا ہے۔ لیکن بدقسمتی سے ترسیم کا پیمانہ ارتعاش کے تعدد کے ساتھ متغیر ہوتا ہے چنانچہ ف کا اضافی ہٹاؤ

$$\text{لَط} = -\frac{1}{1-\frac{\text{ن}^2}{\text{ب}^2}} \times \frac{\text{لَ}}{\text{ل}} \times \text{ضا} \quad \text{.........} \quad (11)$$

ہے جہاں ا سے ف کا فاصلہ لَ ہے۔ کافی تیز ارتعاشوں کی صورت میں
(۱۱) کا پہلا جزو ضربی تقریباً اکائی کے مساوی ہوتا ہے اور اس لیے پیمانہ مستقل ہوتا (195
ہے لیکن نسبت $\frac{\text{ب}}{\text{ن}}$ کی چھوٹی قیمتوں کے لیے ترسیم میں مختلف درجوں کے بگاڑ پیدا ہوتے ہیں۔

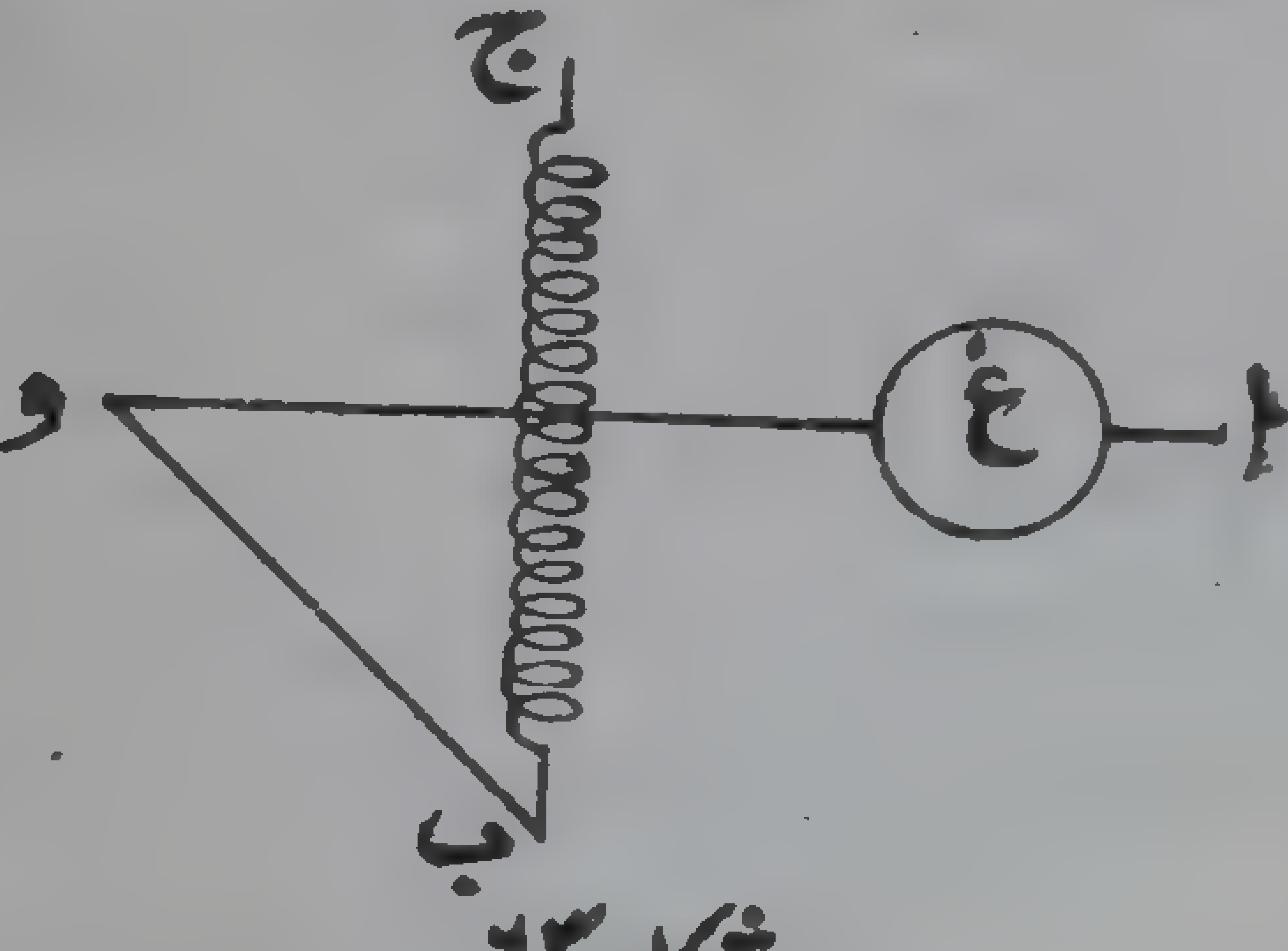
اس کے برعکس زمین کا اصلی ہٹاؤ (ضا) معلوم کرنے کے لیے ف کے اضافی ہٹاؤ کو

$$-\left(1-\frac{\text{ن}^2}{\text{ب}^2}\right)\frac{\text{ل}}{\text{لَ}}$$

سے ضرب دینا چاہیے۔ یہ طریقہ بلاشبہ ترسیم کے صرف ایسے حصوں پر اطلاق پذیر ہے جو تقریباً سادہ موسیقی اہتزازوں کے سلسلہ پر مشتمل ہوتے ہیں جیساکہ زلزلہ کی "اعظم ہیئت" کے قرب میں ہوا کرتا ہے۔

کسی کامل زلزلہ پیما رصدگاہ میں کم و بیش اوپر کے نمونے کے دو آلے

ہوتے ہیں ایک حرکت کے ش ۔ ج جزو ترکیبی کے لیے اور دوسرا م ۔ غ جزو ترکیبی کے لیے ۔ انتصابی جزو ترکیبی کے لیے کسی دوسرے ذریعہ کی ضرورت



شکل ۶۴

ہوتی ہے ۔ ایونگ Ewing کی مجوزہ شکل میں ایک استوار فریم (جس کے لازمی حصہ کو شکل میں ا و ب سے تعبیر کیا گیا ہے) و پر کے ایک افقی محور کے گرد گھوم سکتا ہے ۔ بازو و ا سے جو تقریباً افقی ہے ایک وزن و ثبت ہے اور نقطہ ب جو بازو و ب پر ہے ایک مرغولی پیچ کے ذریعہ ایک ثابت نقطہ ج سے بندھا ہوا ہے ۔ اگر وزن کو اس کے توازن کے محل سے قدرے دبا دیا جائے تو و کے گرد جاذبہ کا معیار بمشکل تبدیل ہوگا لیکن پیچ کا تناؤ بڑھ جائیگا ۔ اور و کے گرد اس کا زور گھٹیگا ۔ حالات کو اس طرح ٹھیک کیا جاتا ہے کہ پہلا اثر دوسرے پر بہت ہی کم غالب آئے چنانچہ قوت عود چھوٹی اور آزاد اہتزاز کا دور طویل ہوتا ہے ۔ پس اس ترتیب (۱۹۶) کی حرکیاتی خصوصیات لازمی طور پر وہی ہیں جو پچھلی صورت میں تھیں اور محور و کے ایک قسری انتصابی اہتزاز کے تحت اس پر وہی اصول[1] کارفرما ہوتے ہیں ۔

اب تک صرف قسری اہتزازوں کا ذکر رہا ہے ۔ لیکن فی الواقع آزاد

---

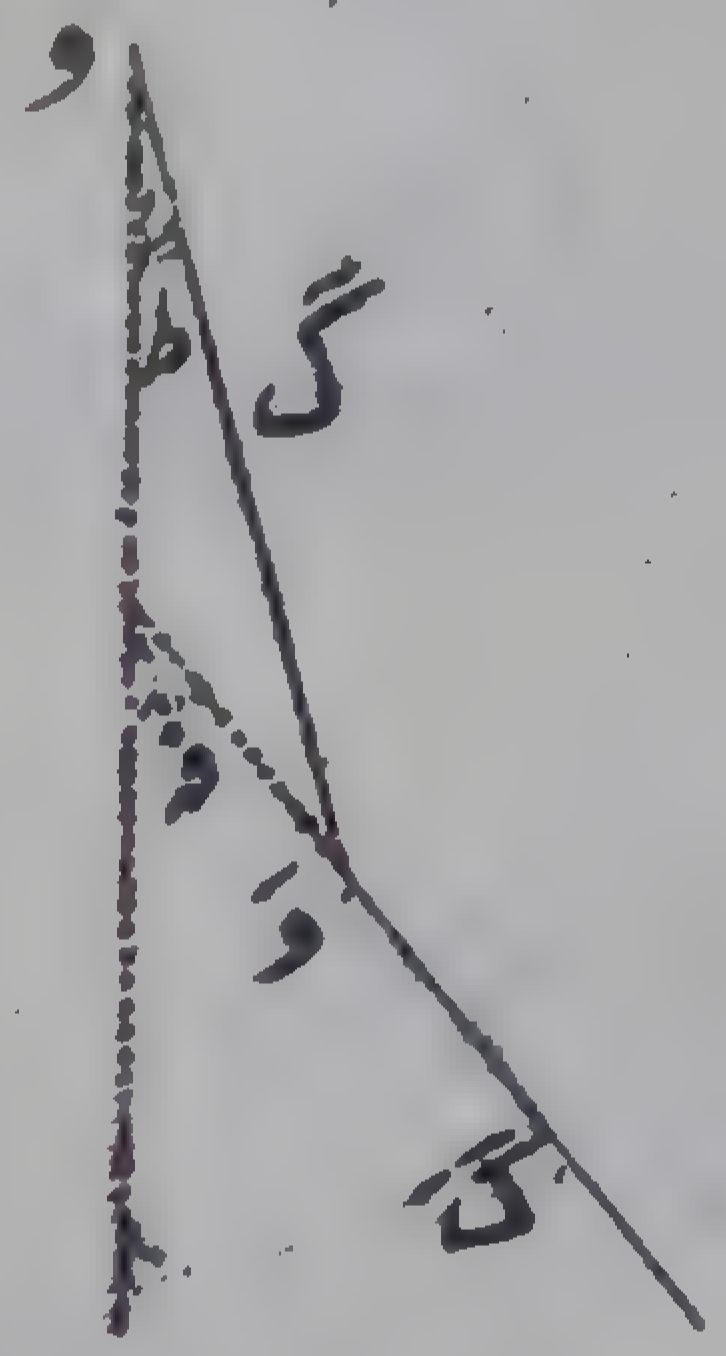
[1] اُس نظام کے قسری اہتزازوں کا عام نظریہ جس کو آزادی کے دو درجے حاصل ہوں دفعہ ۱۱۱ میں مذکور ہے ۔

اہتزاز بھی پیدا ہو جاتے ہیں جیسا کہ دفعہ ۱۳ میں سمجھایا جا چکا ہے۔ یہ اہتزاز ترسیم کو درہم برہم کر سکتے ہیں تاوقتیکہ کوئی خاص قسری انتظام نہ کیا جائے اس پر بارھویں باب (دفعہ ۹۵) میں غور کیا جائیگا۔

یہاں یہ کہہ دینا ضروری ہے کہ جدید ترین زلزلہ نگاروں میں خواہ وہ افقی ہوں یا انتصابی، ترسیم یا اندراج ایک مختلف اصول پر عمل میں آتا ہے۔ رقاص میں باریک تار کے پچھے لگے ہوئے ہوتے ہیں جن میں برقی رَووں کو املے سے پیدا کیا جاتا ہے جب کہ وہ ثابت مقناطیسوں کے قطبوں کے درمیان جھولتے ہیں۔ اِن رَووں کو سست گام آئینہ دار رَو پیماؤں میں سے لے جاتے ہیں جس کا آئینہ روشنی کے داغ کو سریع التاثیر کاغذ کی متحرک پٹی پر منعکس کرتا ہے۔ اس لیے اندراجات رقاص کی زاویئی رفتار پر نہ کہ زاویئی ہٹاؤ پر منحصر ہوتے ہیں۔

۶۸۔ مرکب نظاموں کے اہتزاز۔

وہ مسئلے جو آزادی کے ایک سے زیادہ درجے رکھنے والے نظاموں سے متعلق ہوتے ہیں صریحاً کچھ پیچیدہ ہوتے ہیں خصوصاً جب کہ اُن پر راست طریقوں سے بحث کی جاتی ہے۔ حسب ذیل اس قسم کی سادہ ترین مثال ہے جو صریحاً دفعہ ۴۴' اکی توسیع ہے۔



شکل ۶۴

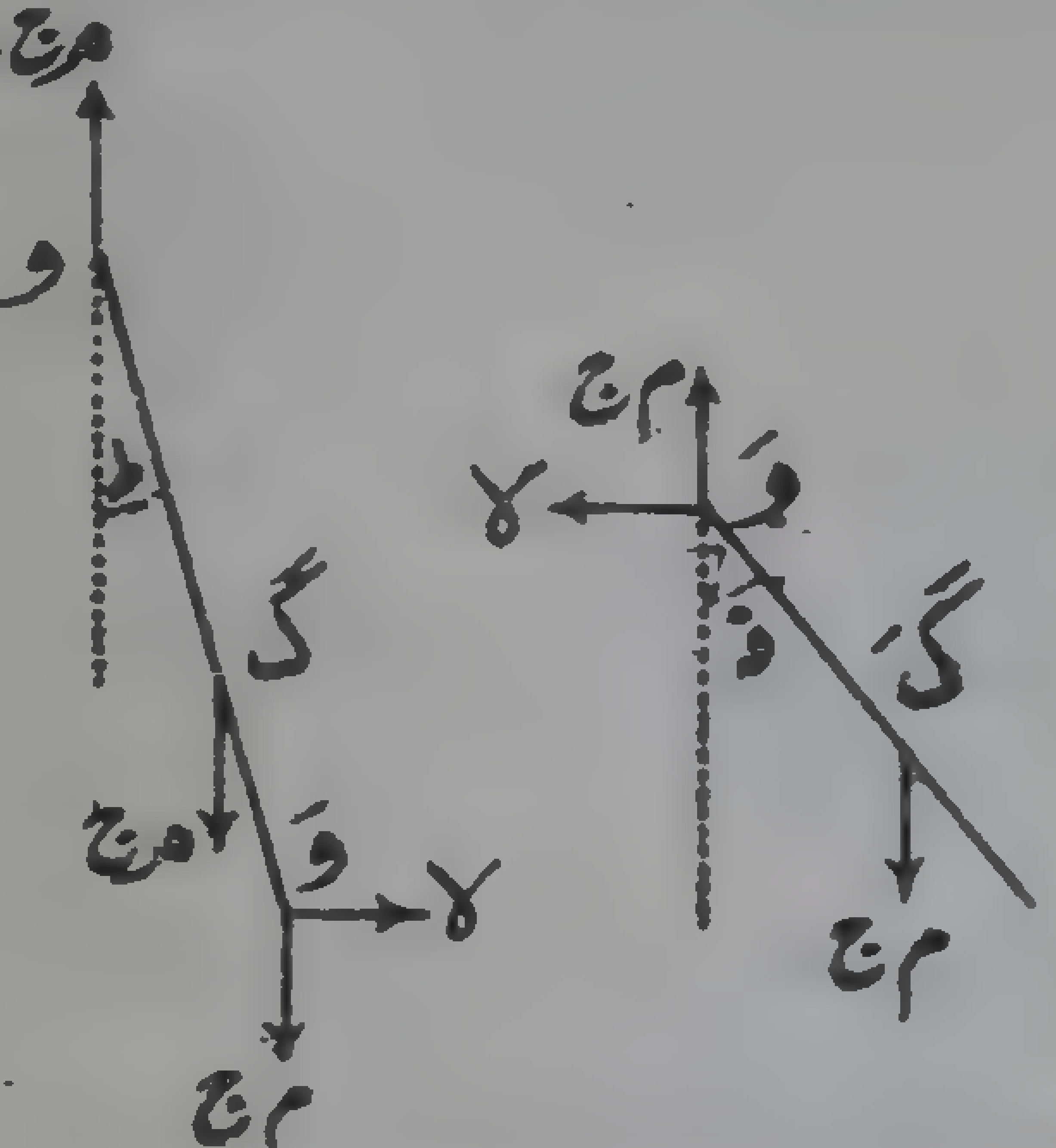
کمیت م کا ایک جسم ایک افقی محور و کے گرد آزادانہ گھوم سکتا ہے اور ایک کمیت مَ کا ایک دوسرا جسم اس سے ایک متوازی محور وَ کے ذریعہ لٹکا ہوا ہے۔ سادگی کے مدنظر یہ مان لیا گیا ہے کہ اوپر کے جسم کا کمیت کا مرکز محوروں و اور وَ کے مستوی میں واقع ہے۔ شکل اُس ظِل کو تعبیر کرتی ہے جو اِن محوروں کے

عمودوار ایک انتصابی مستوی پر رہے ـ فرض کرو کہ

وگ = ھ، وَوَ = ا، وَگَ = ب .... (۱)

(۱۹۷) جہاں نچلے جسم کا مرکز کمیت گَ ہے ـ فرض کرو کہ و کے گرد اوپر کے جسم کا گردش کا نصف قطر ک اور گَ کے گرد نچلے جسم کا گردش کا نصف قطر کہ ہے ـ انتصابی کے ساتھ وگ اور وَگَ کے میلان علی الترتیب ط اور فہ سے تعبیر کئے گئے ہیں ـ

توازن کے محل کے گرد چھوٹے اہتزازوں کی صورت میں جس میں گَ اُسی انتصابی مستوی میں ہے جس میں محور و اور وَ ہیں مر پر م کے تعامل کا انتصابی جزو ترکیبی تقریباً م ج ہوگا ـ افقی جزو ترکیبی کو لا سے تعبیر کرو جیسا کہ شکل (۶۵) میں دکھایا گیا ہے اور اوپر کے جسم کے لیے و کے گرد معیار لو تو پہلے رتبہ تک



شکل ۶۵

مرکَ² طؔ = ـ مرج ھ ط

+ لا ا ـ م ج ا ط ... (۲)

نیز چونکہ و میں سے گزرنے والے انتصابی مستوی سے گَ کا افقی ہٹاؤ ا ط + ب فہ ہے اس لیے

م (ا طؔ + ب فؔہ) = ـ لا .... (۳)

نیز نچلے جسم کے لیے گَ کے گرد معیار لینے سے

م کہ² فؔہ = لا ب ـ م ج ب فہ .... (۴)

پس لا کو ساقط کرنے پر حسب ذیل مساواتیں حاصل ہوتی ہیں

(۵) (مکٌ² + م اً²) ظ + (مھ + م ا) ج ط + م ا ب فہ = ۰،
اب ظ + (کہ² + ب²) فہ + ج ب فہ = ۰

لکھو

(مکٌ² + م اً²) / (مھ + م ا) = ل ، (کہ² + ب²) / ب = لَ .....(۶)

یعنے ل اُس سادہ رقاص کا طول ہے جو اوپر کے جسم کے معادل ہے جب کہ ایک ذرہ م اُس کے ساتھ و پر لگا دیا جائے، اور لَ نچلے جسم کے اہتزازوں سے متعلق ہے جب کہ محور وَ ثابت ہو۔ اب مساواتوں (۵) کو

(مھ + م ا)(ل ظ + ج ط) + م ا ب فہ = ۰،
ا ظ + لَ فہ + ج فہ = ۰ ......(۷)

لکھا جا سکتا ہے۔

(۹۸) اس کا حل اُسی طریقہ پر حاصل کیا جا سکتا ہے جو دفعہ ۴۴ میں مذکور ہے
اگر ہم مان لیں

ط = ا جم (ن ت + صہ)، فہ = ب جم (ن ت + صہ) ...(۸)

تو اوپر کی مساواتیں پوری ہونگی اگر

(مھ + م ا)(ن² ل - ج) ا + م ا ب ن² ب = ۰
ن² ا ا + (ن² لَ - ج) ب = ۰ ...(۹)

اب نسبت ا/ب کو ساقط کرنے پر

(مھ + م ا)(ن² ل - ج)(ن² لَ - ج) - م اً ب ن⁴ = ۰ (۱۰)

یہ آسانی سے ثابت ہو سکتا ہے کہ ن² میں اس دو درجی کی اصلیں حقیقی،

مثبت اور نامساوی ہیں۔ اُن کو $ن_۱^۲$ اور $ن_۲^۲$ سے تعبیر کیا جائے تو مکمل حل

$$\left.\begin{array}{l} \text{طہ} = \text{ا}_۱ \,\text{جم}\,(\text{ن}_۱\text{ت} + \text{صہ}_۱) + \text{ا}_۲ \,\text{جم}\,(\text{ن}_۲\text{ت} + \text{صہ}_۲) \\ \text{فہ} = \text{ب}_۱ \,\text{جم}\,(\text{ن}_۱\text{ت} + \text{صہ}_۱) + \text{ب}_۲ \,\text{جم}\,(\text{ن}_۲\text{ت} + \text{صہ}_۲) \end{array}\right\} \quad \ldots (11)$$

ہے جہاں مستقلوں $ا_۱$، $ا_۲$، $صہ_۱$، $صہ_۲$ کو اختیاری سمجھا جا سکتا ہے اور نسبتیں $\frac{ب_۱}{ا_۱}$ اور $\frac{ب_۲}{ا_۲}$ بہت ہی آسانی سے مساواتوں (۹) کی دوسری مساوات سے حاصل ہوتی ہیں جب کہ $ن^۲$ کی متعلقہ قیمتیں درج کر دی گئی ہوں۔ اس حل کی تعبیر اس تعبیر کے مانند ہے جو دفعہ ۴۴ میں مذکور ہے۔

اگر ہم

$$\text{لہ} = \frac{\text{ج}}{\text{ن}^۲} \quad \ldots\ldots (12)$$

لکھیں اور اس طرح لہ اُس سادہ رقاص کا طول ہو جس کا دَور وہی ہے جو ہمارے نظام کا طبعی اسلوب ہے تو مساوات (۱۰) کو

$$(\text{لہ} - \text{ل})(\text{لہ} - \text{لَ}) = \frac{\text{م}\,\text{ا}^۲\,\text{ب}}{\text{مہ} + \text{م}\,\text{و}} \quad \ldots\ldots (13)$$

لکھا جا سکتا ہے۔ اس لیے لہ کی ایک قیمت مقداروں ل اور لَ میں سے جو بڑی ہے اُس سے بڑی ہے اور دوسری قیمت مقداروں ل اور لَ میں سے جو چھوٹی ہے اُس سے چھوٹی ہے۔ چونکہ (۹) کی رو سے

$$\frac{\text{ب}}{\text{ا}} = \frac{\text{ا}}{\text{لہ} - \text{لَ}} \quad \ldots\ldots (14)$$

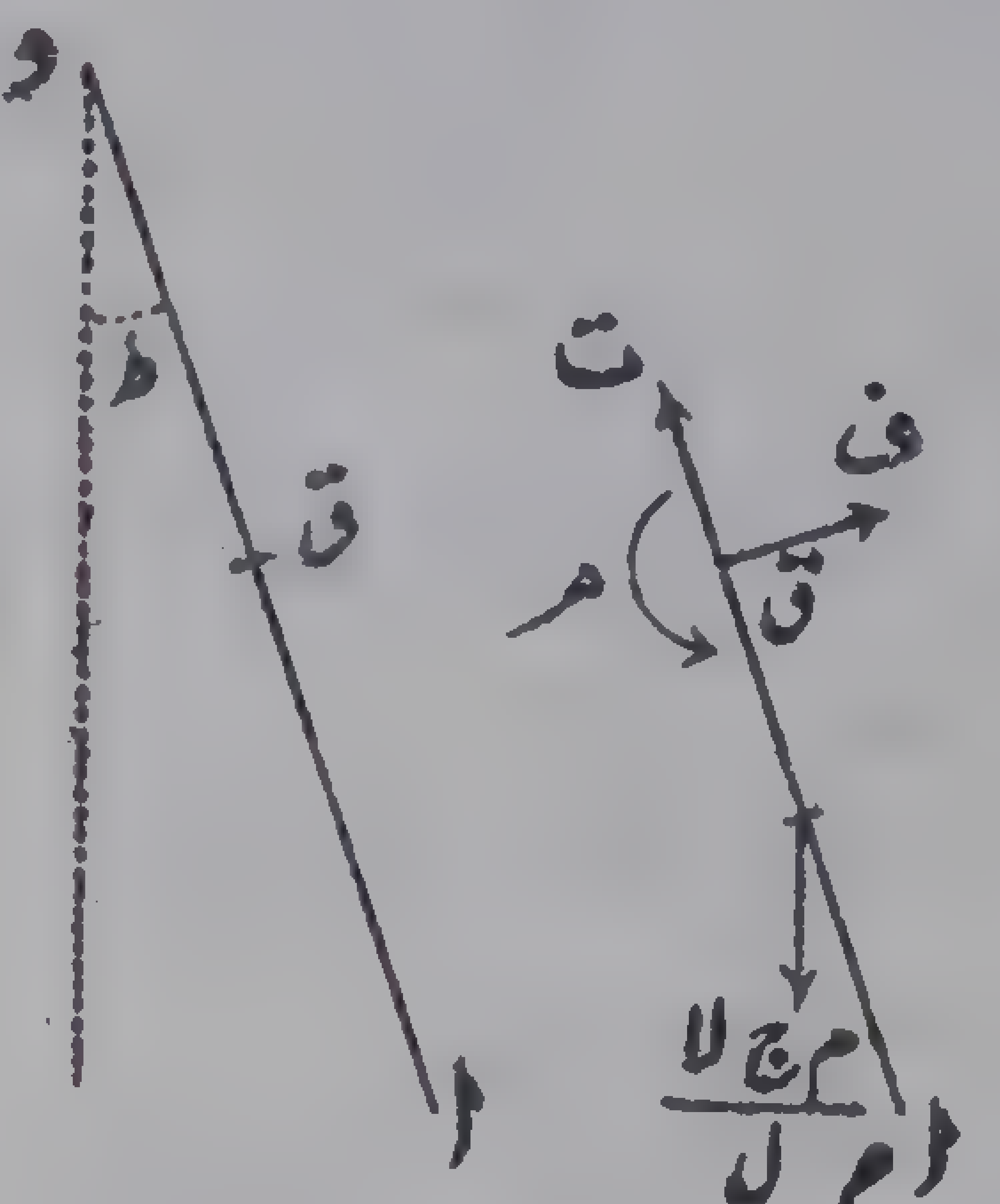
اس لیے یہ معلوم ہوتا ہے کہ دو طبعی اسلوبوں میں سے جو سُست ہے اُس میں طہ اور فہ ایک ہی علامت کے ہیں اور تیز اسلوب میں علامتیں مختلف ہیں۔ دیکھو دفعہ ۴۴۔

۶۹۔ متحرک جسم میں زور۔

کسی متحرک جسم میں زوروں کو معلوم کرنے کا مسئلہ لچک کے مسئلہ سے تعلق رکھتا ہے جو بالعموم بہت مشکل ہوتا ہے۔ ایک متحرک ڈنڈے کے جزئی زور اور

خماؤ کے معیار کے سوالوں پر سکونیات کے معمولی طریقوں سے بحث کی جا سکتی ہے (سکونیات دفعہ ۲۷) بشرطیکہ موثر قوتوں کا لحاظ رکھا جائے۔ ذیل میں ایک مثال درج ہے۔

فرض کرو کہ کمیت م اور طول ل کا ایک ڈنڈا ہے جو ایک رقاص کے مانند ایک سِرے کے گرد جھول رہا ہے۔ فرض کرو کہ آزاد سِرا ا شکل (۶۶) ہے اور اس سے فاصلہ لا پر نقطہ ق ہے۔



شکل ۶۶

تب وہ زور جو نقطہ ق پر کی تراش کے آر پار عمل کرتے ہیں تناؤ ت، عرضی جزئی زور ف، اور خماؤ کے معیار ھ کے معادل ہیں۔ ہم فرض کریں گے کہ ان کی مثبت سمتیں وہ ہیں جو شکل میں دکھائی گئی ہیں۔ قطعہ ق ا کی کمیت $\frac{\text{م لا}}{\text{ل}}$ ہے اور اس کا مرکز نصف قطر ل ـ $\frac{1}{2}$ لا کے ایک دائرہ پر حرکت کرتا ہے۔ اس لیے اگر انتصابی کے ساتھ ڈنڈے کا میلان طہ ہو تو طول کی اور اس کے علی القوائم سمتوں میں تحلیل کرنے سے

$$\frac{\text{م لا}}{\text{ل}}\left(\text{ل} - \tfrac{1}{2}\,\text{لا}\right)\dot{\text{ط}}^{2} = \text{ت} - \frac{\text{م ج لا}}{\text{ل}}\,\text{جم ط} \quad \ldots\ldots(1)$$

$$\frac{\text{م لا}}{\text{ل}}\left(\text{ل} - \tfrac{1}{2}\,\text{لا}\right)\ddot{\text{ط}} = \text{ف} - \frac{\text{م ج لا}}{\text{ل}}\,\text{جب ط} \quad \ldots\ldots(2)$$

یہاں یہ مشاہدہ طلب ہے کہ جب، لا = ل تو یہ مساواتیں دفعہ ۶ کی مساواتوں کے مطابق ہیں اگر ترقیم کے فرق کا لحاظ رکھا جائے۔ نیز اق کا جمود کا معیار اُس کے مرکز سے لحاظ سے

$$\frac{\text{م لا}}{\text{ل}} \times \frac{1}{12}\,\text{لا}^2$$

ہے، اس لیے زاویٔ حرکت پر غور کرنے سے

$$\frac{1}{12}\,\frac{\text{م لا}^3}{\text{ل}}\,\ddot{\text{ط}} = \text{مر} - \text{فا} \times \frac{1}{2}\,\text{لا} \qquad \ldots\ldots\ldots (۳)$$

لیکن دفعہ ۵۵ کی مساوات (۱) میں ع = $\frac{1}{3}$ مر ل^2، ھ = $\frac{1}{2}$ ل رکھنے سے[1]

$$\ddot{\text{ط}} = -\frac{3}{2}\,\frac{\text{ج}}{\text{ل}}\,\text{جب ط} \qquad \ldots\ldots\ldots (۴)$$

حاصل ہوتا ہے۔ (۲) اور (۳) میں درج کرنے سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ ۲۰۰)

$$\text{ف} = \frac{\text{م ج جب ط}}{4\,\text{ل}^2}\,\text{لا}\,(3\,\text{لا} - 2\,\text{ل}) \qquad \ldots\ldots\ldots (۵)$$

$$\text{مر} = \frac{\text{م ج جب ط}}{4\,\text{ل}^2}\,\text{لا}^2\,(\text{لا} - \text{ل}) \qquad \ldots\ldots\ldots (۶)$$

یہ قیمتیں صرف ڈنڈے کے محل پر منحصر ہیں۔ لیکن تناؤ میں جو

$$\text{ت} = \frac{\text{م ج لا}}{\text{ل}}\,\text{جم ط} + \frac{\text{م لا}}{\text{ل}}\left(\text{ل} - \frac{1}{2}\,\text{لا}\right)\dot{\text{ط}}^2 \qquad \ldots\ldots\ldots (۷)$$

ہے ابتدائی شرطیں شامل ہونگی۔ جب، لا = ل تو ف = $\frac{1}{4}$ م ج جب ط جو دفعہ ۶۰ (۷) کے مطابق ہے۔

اُن حسابوں میں جو اوپر کے مانند ہوتے ہیں یہ مان لیا جاتا ہے کہ ڈنڈا مطلقاً استوار ہے۔ یہ ارتعاشی حرکتوں کی صورت میں جایز ہے اگر دور، لچک کے ارتعاش کے آزاد دَوروں میں سے کسی کے مقابلہ میں طویل ہو۔ جب یہ شرط پوری نہ ہو تو لچکی میلان کے اثر کی رعایت رکھنی ہوگی اور اس لیے نتیجے اُس سے بہت مختلف ہونگے جو اوپر درج ہیں۔

[1] یا اوپر کی مساواتوں (۲) اور (۳) میں مر = ۰ اور لا = ل رکھنے اور ف کو ساقط کرنے سے۔

۷۰ - ابتدائی تعامل -

بعض دلچسپ مسئلوں میں ایک جسم یا جسموں کے ایک نظام کو کسی ایسے محل سے سکون سے چھوڑ دیا جاتا ہے جو توازن کا نہیں ہوتا اور یہ معلوم کرنا ہوتا ہے کہ مختلف نقطوں کے ابتدائی اسراع یا رکاوٹوں کے ابتدائی تعامل کیا ہیں۔

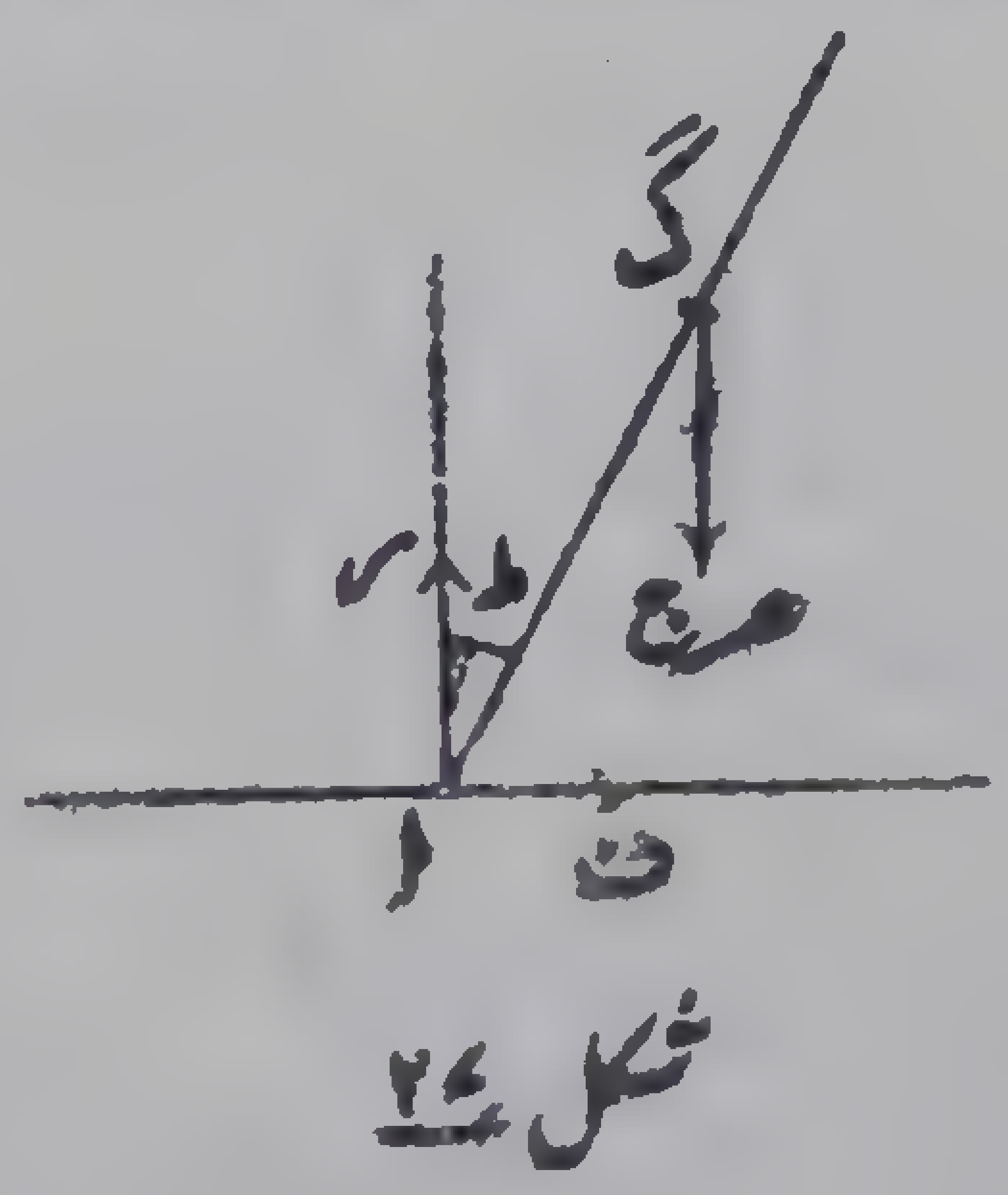
ایسے سوال مقابلتاً آسان ہوتے ہیں کیونکہ ابتدائی رفتاریں معدوم ہوتی ہیں اور اس لیے حرکت کی مساواتوں کو تکمل کرنے کی ضرورت نہیں ہوتی۔ مثلاً طول ل کے ایک سادہ رقاص کی صورت میں جو انتصابی سے میلان طہ پر سکون سے چھوڑ دیا گیا ہو نصف قطری اسراع - ل طہ۲ معدوم ہوتا ہے اور اس لیے ڈوری کا ابتدائی تناؤ تا

تا = م ج جم طہ ....(۱)

ہے۔

لیکن بعض صورتوں میں توانائی کی مساوات ایک درمیانی کڑی کے طور پر فائدہ مند ہوتی ہے کیونکہ عمل تفرق سے اس سے ایک ایسی مساوات حاصل ہوتی ہے جس میں ابتدائی اسراع شریک ہوتے ہیں اور نامعلوم تعامل داخل نہیں ہوتے۔ چند مثالیں ذیل میں درج ہیں۔

مثال ۱۔ ایک ڈنڈا جس کا نچلا سرا ا ایک کھردرے افقی مستوی پر ٹکا ہوا (۲۰۱)



شکل ۲۷

ہے انتصابی سے میلان طہ پر سکون سے چھوڑ دیا گیا ہے۔ مستوی کے ابتدائی تعامل کے افقی اور انتصابی اجزائے ترکیبی (ف ' ر) معلوم کرو۔

یہ فی الحقیقت دفعہ ۶۰ کے مسئلہ کی ایک مخصوص صورت ہے لیکن ہم یہاں اس کو بہت آسانی سے حل کر سکتے ہیں۔

فرض کرو کہ ا سے مرکز کمیت گ کا

فاصلہ ا اور گ کے گرد گردش کا نصف قطر کہ ہے ۔ ا کے گرد معیار لینے سے

$$\text{م}\,(\text{کہ}^2 + \text{ا}^2)\,\ddot{\text{ط}} = \text{م ج ا جب ط} \quad \ldots\ldots (۲)$$

نیز چونکہ گ کا اسراع ' اگ کے علی القوائم ' ا $\ddot{\text{ط}}$ ہے اس لیے افقاً اور انتصاباً تحلیل کرنے سے

$$\text{م ا}\,\ddot{\text{ط}}\,\text{جم ط} = \text{ف} ،\ \text{م ا}\,\ddot{\text{ط}}\,\text{جب ط} = \text{م ج} - \text{ر} \quad \ldots (۳)$$

اس لیے

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\text{ف}}{\text{م ج}} = \dfrac{\text{ا}^2}{\text{کہ}^2+\text{ا}^2}\,\text{جب ط جم ط} \\[2ex] \dfrac{\text{ر}}{\text{م ج}} = \dfrac{\text{کہ}^2+\text{ا}^2\,\text{جم}^2\,\text{ط}}{\text{کہ}^2+\text{ا}^2} \end{array}\right. \quad \ldots\ldots (۴)$$

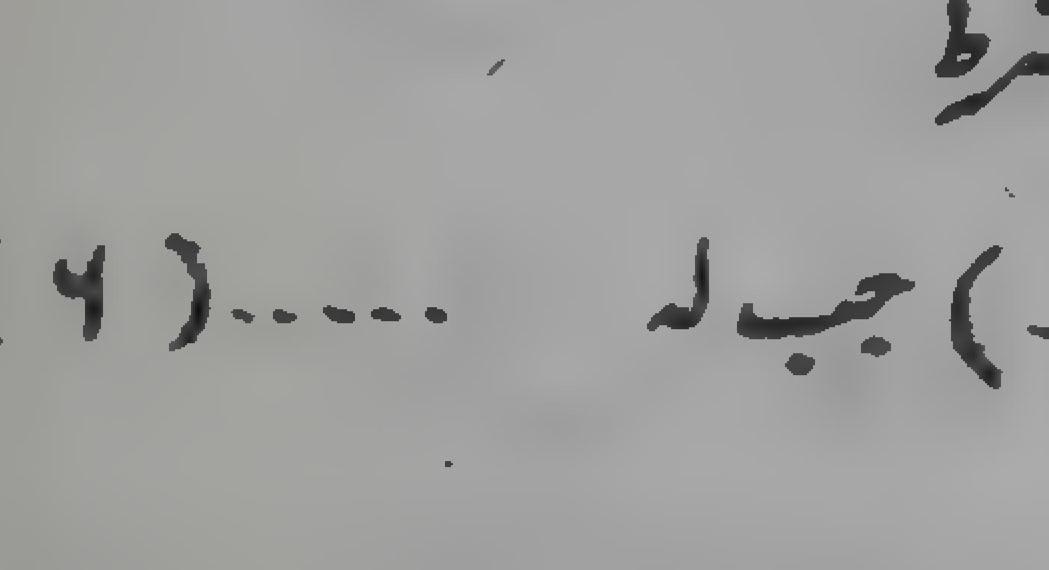
اگر ہم رگڑ کا معمولی قانون تسلیم کرلیں تو نچلا سِرا پھسلنا شروع نہیں کریگا اِلّا آنکہ

$$\text{جب ط جم ط} > \text{مہ}\left(\text{جم}^2\,\text{ط} + \frac{\text{کہ}^2}{\text{ا}^2}\right) \quad \ldots\ldots (۵)$$

جہاں مہ رگڑ کی قدر ہے ۔ اگر مہ = مس لہ تو یہ شرط

$$\text{جب}\,(۲\,\text{ط} - \text{لہ}) \not< \left(۱ + \frac{۲\,\text{کہ}^2}{\text{ا}^2}\right)\text{جب لہ} \quad \ldots (۶)$$

ہو جاتی ہے ۔



شکل ۱۶

مثال ۲۔ کسی شکل کی تراش کا ایک اسطوانی ٹھوس جسم جو ایک کھردرے افقی مستوی پر لڑھکنے میں آزاد ہے ایک دیے ہوئے محل میں سکون سے چھوڑ دیا گیا ہے۔

شکل اُس تراش کو تعبیر کرتی ہے جو مرکز کمیت گ میں سے گزرنے والا ایک مستوی اسطوانے

طول کے علی القوائم، منقطع کرتا ہے۔ فرض کرو کہ اِس تراش کا نقطہ تماس ٻ ہے اور گ سے مستوی پر عمود گ ن ہے۔ فرض کرو کہ

گ ٻ = ر، گ ن = ی، ٻ ن = ق ......(۷)

اور گ میں سے گزرنے والے ایک طولی محور کے گرد گردش کا نصف قطر کہ ہے۔

جب جسم ٻ کے گرد زاوئی رفتار سہ سے گھومتا ہے تو گ کی رفتار سہ ر کے افقی اور انتصابی اجزائے ترکیبی علی الترتیب

− سہ ی، سہ ق

ہیں۔ پس تفرق کرنے اور یٔ اور قٔ والی رقموں کو ترک کرنے سے جو ابتداً معدوم ہوتی ہیں گ کے ابتدائی افقی اور انتصابی اسراع علی الترتیب

− سۂ ی، سۂ ق

حاصل ہوتے ہیں۔ پس اگر مستوی کے تعامل کے افقی اور انتصابی اجزائے ترکیبی (۲۰۲)
ف، ما ہوں تو

ف = − م سۂ ی، ما − م ج = م سۂ ق ......(۸)

نیز توانائی کی مساوات جو پوری حرکت میں درست رہتی ہے

$$\frac{1}{2}\,\text{م}\,(\text{کہ}^2+\text{ر}^2)\,\text{سہ}^2+\text{م ج ی}=\text{مستقل} \quad ......(۹)$$

ہے۔ اس کوت کے لحاظ سے تفرق کرنے، یٔ = سہ ق رکھنے اور سہ سے تقسیم کرنے پر ابتداً

$$(\text{کہ}^2+\text{ر}^2)\,\text{سۂ}=-\text{ج ق} \quad ......(۱۰)$$

اور (۸) میں درج کرنے پر

$$\frac{\text{ف}}{\text{م ج}}=\frac{\text{ق ی}}{\text{کہ}^2+\text{ر}^2}\,،\quad \frac{\text{ما}}{\text{م ج}}=\frac{\text{کہ}^2+\text{ی}^2}{\text{کہ}^2+\text{ر}^2} \quad ......(۱۱)$$

اِس مسئلہ میں مثال ۱ مخصوص صورت کے طور پر شامل ہے۔

مثال ۳۔ فرض کرو کہ حالات وہی ہیں جو مثال ۲ میں مذکور ہیں بجز

اس کے کہ افقی مستوی چکنا ہے۔

اب چونکہ گ ایک انتصابی خط میں حرکت کرتا ہے اس لیے فوری مرکز پ میں سے گزرنے والے انتصابی اور گ میں سے گزرنے والے افقی کے نقطۂ تقاطع پر ہے۔ اس لیے توانائی کی مساوات

$$\frac{1}{2} \text{م} (\text{کہ}^2 + \text{ق}^2) \text{سہ}^2 + \text{م ج ی} = \text{مستقل} \qquad \text{......... (۱۲)}$$

ہے۔ گ کی انتصابی رفتار اب بھی ی = سہ ق سے حاصل ہوتی ہے، پس (۱۲) کو تفرق کرنے اور سہ سے تقسیم کرنے پر ابتداً

$$(\text{کہ}^2 + \text{ق}^2) \dot{\text{سہ}} + \text{ج ق} = 0 \qquad \text{.......... (۱۳)}$$

حاصل ہوتا ہے۔

نیز چونکہ گ کا ابتدائی انتصابی اسراع سہ ق ہے اس لیے

$$\text{م} \dot{\text{سہ}} \text{ق} = \text{ر} - \text{م ج} \qquad \text{........ (۱۴)}$$

جہاں مستوی کا تعامل ر ہے۔ اس لیے

$$\frac{\text{ر}}{\text{م ج}} = \frac{\text{کہ}^2}{\text{کہ}^2 + \text{ق}^2} \qquad \text{......... (۱۵)}$$

۷۱۔ فوری دھکے

فوری دھکوں کے مسئلوں میں ہمیں صرف قوتوں کے وقتی تکملوں سے واسطہ رہیگا جو دھکہ کے لا انتہا چھوٹے عرصہ پر لئے گئے ہوں، دیکھو دفعہ ۱۴۔

ایک استوار جسم کی صورت میں جو دو بعدوں میں حرکت پذیر ہو فرض کرو کہ مرکز کمیت گ کی رفتار دھکہ سے عین پہلے (ع، د) اور عین بعد (عَ، دَ) ہے۔ نیز فرض کرو کہ جسم کی متناظر زاویئی رفتاریں سہ، سہَ ہیں۔ اگر محوروں لا اور ما کے متوازی بیرونی قوتوں کے وقتی تکملے علی الترتیب ضا اور عا

ہوں اور گ کے گِرد اِن قوتوں کے معیار کا وقتی تکملہ نہ ہو تو خطی اور زاویُ معیار حرکت کے اصولوں سے مساواتیں

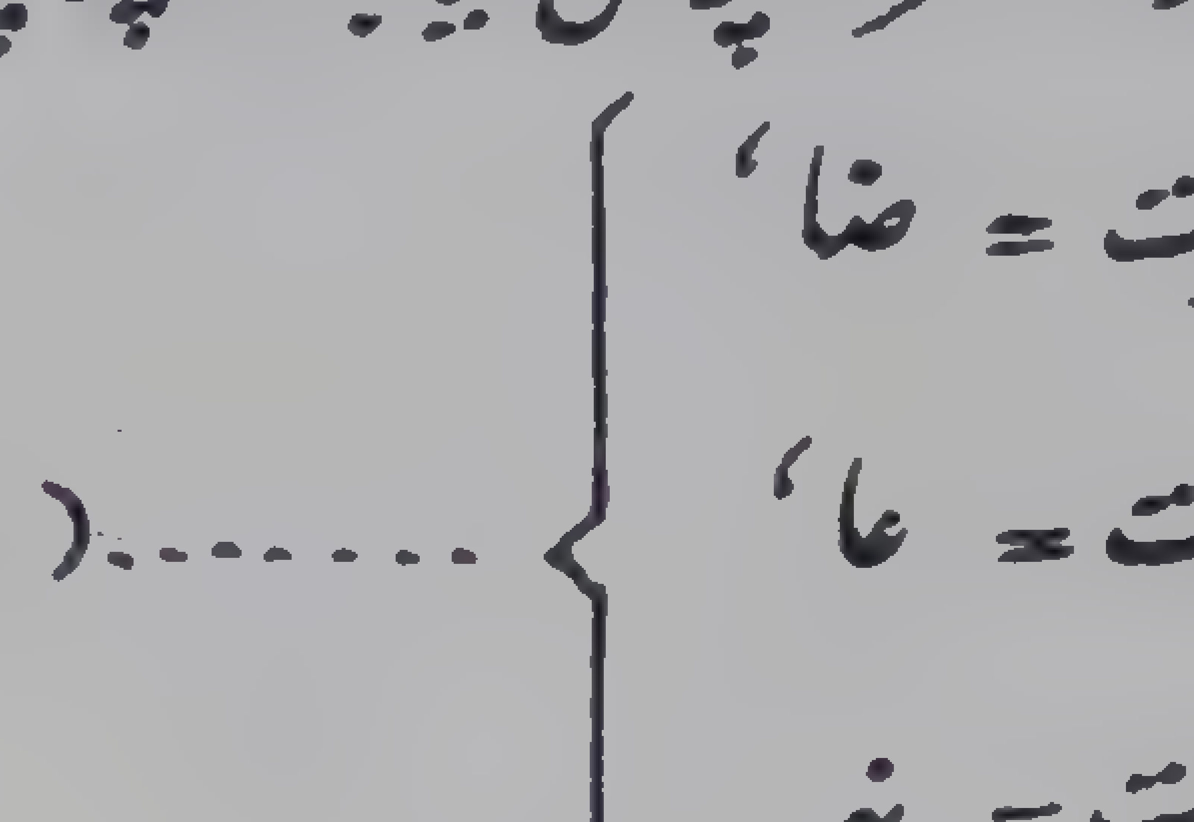
م (عَ - ع) = ضا، م (وَ - و) = عا
ع (سَہ - سہ) = نہ ......(۱)

فوراً حاصل ہوتی ہیں جہاں جسم کی کمیت م ہے اور گ میں سے گزرنے والے ایک محور کے گِرد جو مستوی لا ما پر عمود ہے جمود کا معیار ع ہے۔

یہ مساواتیں دفعہ ۶۳ کی مساواتوں (۱) اور (۲) سے بھی اخذ کی جا سکتی ہیں اگر ان کو دھکہ کے لا انتہا چھوٹے عرصہ پر تکمل کیا جائے، چنانچہ

م عَ - م ع = ∫ لا فرت = ضا،
م وَ - م و = ∫ ما فرت = عا، ......(۲)
ع سَہ - ع سہ = ∫ ن فرت = نہ

مثلاً فرض کرو کہ ایک استوار جسم ساکن ہے لیکن حرکت کرنے میں آزاد ہے اور اُس پر ایک دھکہ ضا ایسے مستوی میں لگتا ہے جو مرکز کمیت گ پر جمود کا ایک صدر مستوی ہے۔ یہ واضح ہے کہ گ ایک ایسے خط میں حرکت کرنا شروع کریگا جو دھکہ کے متوازی ہے فرض کرو کہ اس کی ابتدائی رفتار عَ ہے اور فرض کرو کہ سَہ وہ زاویُ رفتار ہے جو جسم کو ایصال ہوئی ہے۔ اگر گ ف کو دھکے کے خط پر عمود کھینچا جائے تو



شکل ۶۹

م عَ = ضا، ع سَہ = ضا × گ ف ......(۳)

اگر گ ف کو و تک خارج کیا جائے تو جسم کے نقطہ و کی ابتدائی رفتار

$$ء - سہ \times گ و = \frac{ضا}{م} \left(۱ - \frac{گ و \times گ ف}{کہ^۲}\right) \quad ......(۴)$$

ہوگی جہاں گ کے گرد گردش کا نصف قطر کہ ہے۔ یہ معدوم ہوگا یعنے ابتدائی گردش کا فوری مرکز و ہوگا اگر

$$گ ف \times گ و = کہ^۲ \quad ....(۵)$$

اگر جسم و پر ثابت ہو لیکن اس نقطہ کے گرد گردش کرنے میں آزاد ہو تو اس نقطہ پر بالعموم ایک دھکہ دار دباؤ (فرض کرو ضا۱) ہوگا اور جسم پر اس کے مساوی اور مخالف دھکہ دار تعامل (-ضا۱) ہوگا۔ یہ مساوات (۲۰۴)

$$ضا - ضا_۱ = م ءَ = م سہَ \times و گ \quad ....(۶)$$

سے متعین ہوگا جہاں سہ کو و کے گرد معیار لینے سے معلوم کرنا ہوگا چنانچہ

$$م (کہ^۲ + و گ^۲) سہ = ضا \times و ف \quad (۷)$$

اس لیے

$$\frac{ضا_۱}{ضا} = ۱ - \frac{م سہ \times و گ}{ضا} = ۱ - \frac{و ف \times و گ}{کہ^۲ + و گ^۲}$$

$$= \frac{کہ^۲ - گ و \times گ ف}{کہ^۲ + و گ^۲} \quad ....(۸)$$

اس لیے محور و پر دھکہ معدوم ہوگا اگر رشتہ (۵) پورا ہو اور یہ پچھلی تحقیق کے مطابق ہے۔

اگر و دیا گیا ہو اور ف کو اس طرح منتخب کیا گیا ہو کہ وہ اس شرط کو پورا کرے تو ف کو و کے لحاظ سے "زد کا مرکز" کہتے ہیں۔ یہ مشاہدہ طلب ہے کہ و اور ف کے درمیان رشتہ اس رشتہ کے معادل ہے جو مرکب رقاص میں اہتزاز اور لٹکاؤ کے مرکزوں کو مربوط کرتا ہے۔

جب وہ مستوی جس میں دھکہ اور مرکز کمیت ہے مرکز کمیت پر صدر مستوی نہ ہو تو جسم (اگر وہ آزاد ہے) اس مستوی کے عمود وار محور کے گرد گردش کرنا شروع نہیں کریگا۔ اگر وہ ایک دیے ہوئے محور کے گرد گردش کرنے کے لیے مجبور ہے تو وہاں تعامل بالعموم ایک واحد قوت میں تحویل نہیں ہونگے۔ اس کے علاوہ محور میں سے گزرنے والے کی مستوی میں ایک جفت ہوگا جو محور کو سہاروں سے باہر کھینچنے کا میلان رکھیگا۔ ہم ان بیانوں کے ثبوت میں نہیں پڑتے لیکن ایک خاص صورت پر مثال ۳ میں بحث کی گئی ہے۔

مثال ۱۔ ایک ایکساں ڈنڈے کی صورت میں جس کا طول ۲ ا ہے اور جو ایک سرے کے گرد گھومنے میں آزاد ہے ز د کا مرکز اس سرے سے فاصلہ

$$ا + \frac{ک^2}{ا} = \frac{4}{3} ا$$

پر ہوگا۔

نیز میز کے اوپر وہ ارتفاع جس پر بلیرڈ کے ایک گولہ پر افقی ضرب پڑنی چاہیے تاکہ وہ پھسل نہ سکے

$$ا + \frac{ک^2}{ا} = \frac{7}{5} ا$$

ہے جہاں گولے کا نصف قطر ا ہے۔ یہ کنارہ کا ارتفاع ہونا چاہیے۔

مثال ۲۔ دو مشابہ ڈنڈے ا ب اور ب ج جو ب پر چکنے قبضوں (۲۰۵)
کے ذریعہ جوڑے گئے ہیں ایک خط مستقیم میں ساکن ہیں۔ ج پر ایک ضرب ف، ب ج کے علی القوائم لگائی گئی ہے، اس سے جو حرکت کی ابتداء ہوتی ہے اس کو معلوم کرو۔

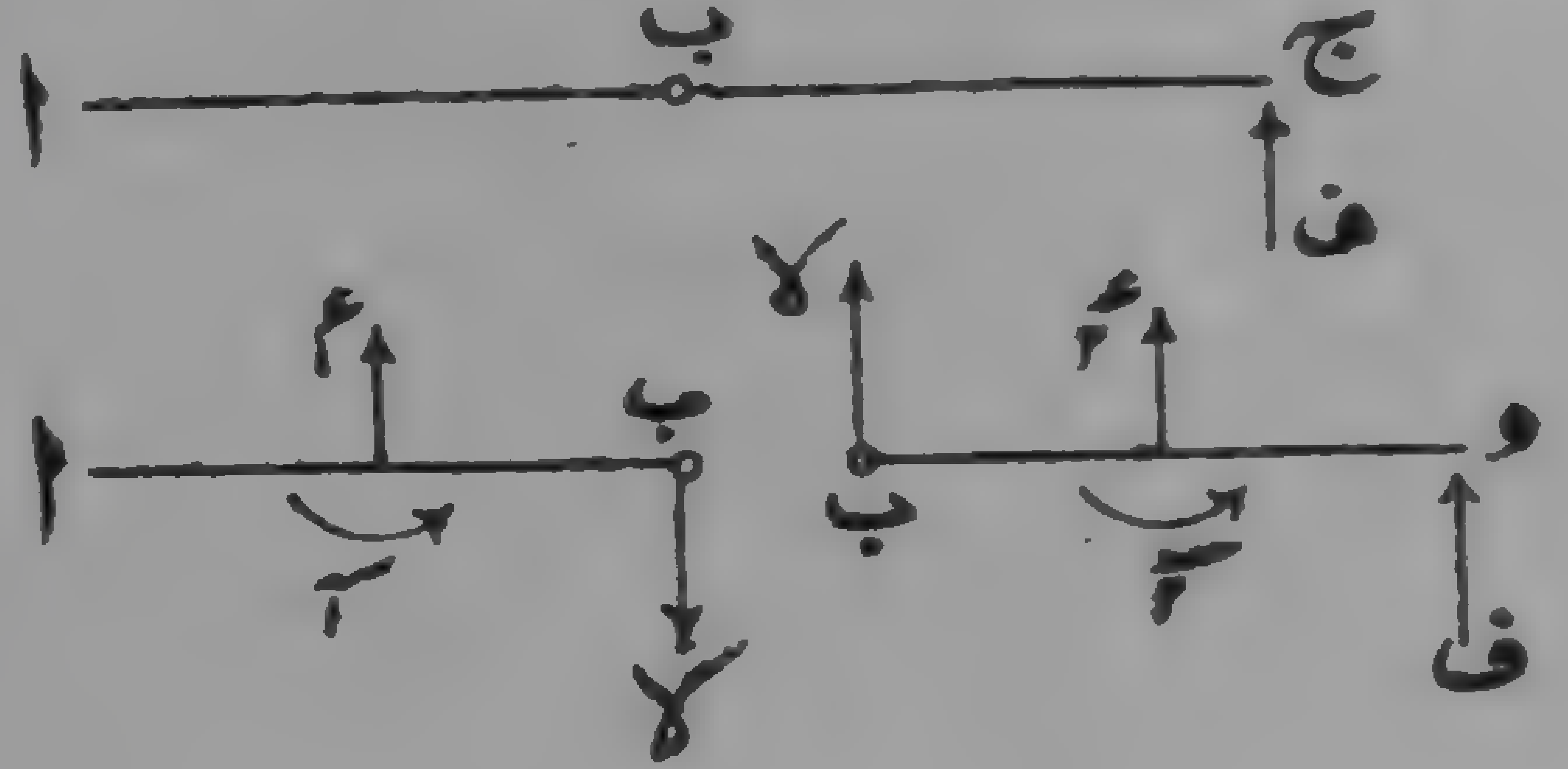
سادگی کے مدنظر ہم ڈنڈوں کے مراکز کمیت کو ان کے وسطی نقطوں پر تسلیم کرتے ہیں۔ فرض کرو کہ ہر ڈنڈے کا طول ۲ ا، مرکز کے گرد گردش کا نصف قطر ک، اور اس کی کمیت م ہے۔

جوڑ ب پر فرض کرو کہ ڈنڈوں پر دھکہ وار دباؤ ± لا ہیں۔ فرض کرو کہ

اب اور ب ج کے مرکزوں کی ابتدائی رفتاریں علی الترتیب $ع_۱$ اور $ع_۲$ ہیں اور ابتدائی زاوی رفتاریں $سہ_۱$ اور $سہ_۲$ ہیں جن کی مثبت جہتیں شکل میں دکھائی گئی ہیں۔
تحلیل کرنے اور مرکزوں کے گرد معیار لینے سے

$$\text{م}\,ع_۱ = -\text{لا}\,،\quad \text{م}\,\text{کہ}^۲\,سہ_۱ = -\text{لا}\,\text{ا} \quad \text{......(۹)}$$

$$\text{م}\,ع_۲ = \text{ف} + \text{لا}\,،\quad \text{م}\,\text{کہ}^۲\,سہ_۲ = \text{ف}\,\text{ا} - \text{لا}\,\text{ا} \quad \text{......(۱۰)}$$



شکل منے

نیز جوڑ ب کی رفتار جب کہ اس کو پہلے ڈنڈے کا ایک نقطہ سمجھا جائے $ع_۱ + سہ_۱\,\text{ا}$ ہے اور جب اس کو دوسرے ڈنڈے کا نقطہ سمجھا جائے $ع_۲ - سہ_۲\,\text{ا}$ ہے۔ اس لیے

$$ع_۱ + سہ_۱\,\text{ا} = ع_۲ - سہ_۲\,\text{ا} \quad \text{.........(۱۱)}$$

اِن پانچ مساواتوں سے $ع_۱$، $ع_۲$، $سہ_۱$، $سہ_۲$، لا متعین ہونگے۔ اگر ہم بقیہ نامعلوم مقداروں کو (۹) اور (۱۰) سے لا کی رقوم میں بیان کریں تو

$$\text{لا} = \frac{۱}{۲}\,\frac{\text{ا}^۲ - \text{کہ}^۲}{\text{ا}^۲ + \text{کہ}^۲} \times \text{ف} \quad \text{.......(۱۲)}$$

اس لیے

$$\left.\begin{aligned} ع_۱ &= -\frac{۱}{۲}\,\frac{\text{ا}^۲ - \text{کہ}^۲}{\text{ا}^۲ + \text{کہ}^۲} \times \frac{\text{ف}}{\text{م}} \\ \text{ا}\,سہ_۱ &= -\frac{۱}{۲}\,\frac{\text{ا}^۲\,(\text{ا}^۲ - \text{کہ}^۲)}{\text{کہ}^۲\,(\text{ا}^۲ + \text{کہ}^۲)} \times \frac{\text{ف}}{\text{م}} \end{aligned}\right\} \quad \text{......(۱۳)}$$

$$\left.\begin{aligned} \text{ع}_2 &= \frac{1}{2}\,\frac{3\text{ا}^2 + \text{که}^2}{\text{ا}^2 + \text{که}^2} \times \frac{\text{ف}}{\text{م}} \\ \text{اسہ}_2 &= \frac{1}{2}\,\frac{\text{ا}^2(\text{ا}^2 + 3\text{که}^2)}{\text{که}^2(\text{ا}^2 + \text{که}^2)} \times \frac{\text{ف}}{\text{م}} \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots (۱۴)$$

صورتیں کہ = ۰، کہ = ا مشاہدہ طلب ہیں، ان کی ہندسی تعبیر بھی بیان کرو۔

(۲۰۶) اگر ڈنڈے ایکساں ہوں تو $\text{که}^2 = \frac{1}{2}\text{ا}^2$ اور

$$\text{ع}_1 = -\frac{1}{4}\frac{\text{ف}}{\text{م}} ،\quad \text{اسہ}_1 = -\frac{3}{4}\frac{\text{ف}}{\text{م}} \quad \cdots\cdots\cdots (۱۵)$$

اور

$$\text{ع}_2 = \frac{5}{4}\frac{\text{ف}}{\text{م}} ،\quad \text{اسہ}_2 = \frac{9}{4}\frac{\text{ف}}{\text{م}} \quad \cdots\cdots\cdots (۱۶)$$

ع₁ اور سہ₁ کی منفی قیمتوں سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ ا ب کی حرکت انتقال اور گردش کی سمتیں اُن سمتوں کے مخالف ہیں جن کو شکل میں دکھایا گیا ہے۔

مثال ۳ ۔ ایک مستوی پترا ایک دیے ہوئے محور کے گرد جو اُس کے مستوی میں ہے گھومنے میں آزاد ہے۔ اس کے ایک دیے ہوئے نقطہ پر ایک دھکہ اس کے علی القوائم پڑتا ہے۔ محور پر تعامل معلوم کرو۔

فرض کرو کہ پترے کے مستوی میں قائم محور و لا، و ما ہیں جن میں سے و ما گردش کے محور پر منطبق ہے۔ اگر (عہ، بہ) وہ نقطہ ہو جس پر دھکہ (عا) لگتا ہے تو و لا، و ما کے گرد دھکے کے معیار علی الترتیب عا بہ اور ۔ عا عہ ہونگے جہاں علامتیں معمولی قرار داد کے مطابق لی گئی ہیں۔ اگر ابتدائی زاویئی رفتار سہ ہو تو (لا، ما) پر کے ذرّہ م کا معیار حرکت ۔ م سہ لا ہے اور و لا، و ما کے گرد اس کے معیار ۔ م سہ لا ما، م سہ لا² ہیں۔ اس لیے پترے کا خطی معیار حرکت

$$-\text{سہ}\,\Sigma\,(\text{م لا})$$

ہے اور و لا، و ما کے گرد معیار حرکت کے معیار

$$-\text{سہ}\,\Sigma\,(\text{م لا ما})،\ \text{سہ}\,\Sigma\,(\text{م لا}^2)$$

ہیں۔

محور پر بیئرنگ کے دھکہ دار تعاملوں کا ہندسی مجموعہ ایک قوت عا مستوی کے عمود وار ہوگی جو مساوات

− سہ Σ (م لا) = عا + عا ....(۱۷)

سے حاصل ہوگی۔

اگر محددوں کے محوروں کے گرد اُن ہی تعاملوں کے معیار لہ، مہ ہوں تو

− سہ Σ (م لا ما) = لہ + عا بہ،

سہ Σ (م لا^۲) = مہ − عا عہ ......(۱۸)

پس اِن تعاملوں کے معدوم ہونے کے لیے

عہ = Σ (م لا^۲) / Σ (م لا) ، بہ = Σ (م لا ما) / Σ (م لا) ....(۱۹)

حاصل ہونا چاہیے۔ وہ نقطہ جو اس طرح حاصل ہو "زد کا مرکز" کہلا سکتا ہے۔ جب محور کا حاصل ضرب Σ (م لا ما) معدوم ہوتا ہے تو نتیجہ (۵) کے مطابق ہوتا ہے۔

اگر ہم نئے محوروں و لاَ، و ماَ پر منتقل کریں جن میں و ماَ، و ما پر منطبق ہے اور و لاَ اُس کے ساتھ زاویہ طہ بناتا ہے تو ذرہ م کے نئے محدد

لا = لاَ جب طہ، ما = ماَ + لاَ جم طہ ....(۲۰)

سے حاصل ہونگے جیسا کہ شکل بنا لینے سے ظاہر ہوگا۔ (۱۹) میں اندراج کرنے سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ زد کے مرکز کے نئے محدد عہَ، بہَ اُسی نمونہ کے ضابطوں سے حاصل ہوتے ہیں جو اوپر بیان کیے گئے ہیں۔ اس لیے زبروں کو باقی رکھنا غیر ضروری ہے۔

(۲) اگر ہم محور لا کو مرکز کمیت میں سے گزرتا ہوا مان لیں تو اس سے بھی عمومیت میں کوئی فرق نہیں آئیگا، اس لیے

Σ (م ما) = ۰ ....(۲۱)

اب اگر ہم مبداء کو اِس نقطہ پر منتقل کریں اور اس لیے لا کی بجائے لا + ھ لکھیں تو

$$\Sigma\,(\text{م لا}) = ۰ \qquad \ldots\ldots (۲۲)$$

حاصل ہوگا اور اس لیے مرکز کمیت میں سے گزرنے والے محوروں کے حوالے سے زد کے مرکز کے محدّد

$$\text{ع} = \frac{\Sigma\,(\text{م لا}^{۲})}{\text{ھ}\,\Sigma\,(\text{م})}\ ،\ \text{بہ} = \frac{\Sigma\,(\text{م لا ما})}{\text{ھ}\,\Sigma\,(\text{م})} \qquad \ldots\ldots (۲۳)$$

معلوم ہوتے ہیں جہاں صرف یہ قید ہے کہ محور ما پترے کی گردش کے محور کے متوازی ہے۔

یہ نتیجہ سادگی اختیار کرتا ہے اگر محور لا کو پترے کے "مرکزی ناقص" کے اُس قطر پر منطبق کیا جائے [سکونیات دفعہ ۷۵، ۷۷] جو محور ما کا مزدوج ہے تب $\Sigma\,(\text{م لا ما}) = ۰$ اور

$$\text{ع} = \frac{\text{ا}^{۲}}{\text{ھ}}\ ،\ \text{بہ} = ۰ \qquad \ldots\ldots (۲۴)$$

جہاں

$$\text{ا}^{۲} = \frac{\Sigma\,(\text{م لا}^{۲})}{\Sigma\,(\text{م})} \qquad \ldots\ldots (۲۵)$$

یعنے $\text{ا}^{۲}$ پترے کے مختلف ذرّوں کے فصلوں کا اوسط مربع ہے۔ (۲۴) کے ہندسی معنے یہ ہیں کہ زد کا مرکز، مرکزی ناقص کے لحاظ سے گردش کے محور کا "ضد قطب" ہے۔

ایکساں سطحی کثافت کے پترے کی صورت میں زد کا مرکز جو (۱۹) یا (۲۴) سے معلوم ہو رقبہ کے دباؤ کے مرکز پر منطبق ہوتا ہے جب کہ وہ اس طرح غرق ہو کہ گردش کا محور سطحی خط ہو[1] [سکونیات دفعہ ۹۵]۔

---

[1] گرین ہل کی Hydrostatics لندن ۱۸۹۴ء صفحہ ۶۵۔

۲۷ - اندفاعی رقاص

اندفاعی رقاص ایک آلہ[۱] ہے جس سے گولی کی رفتار اُس معیارِ حرکت کے ذریعہ پیمائش کی جاتی ہے جو آلہ وصول کرتا ہے۔ اِس میں ایک مرکب رقاص ہوتا ہے جس میں لکڑی کا ایک کندا یا ریت کا ایک صندوق لگا ہوا ہوتا ہے جس میں گولی کو افقاً فائر کیا جاتا ہے۔ مزاحمت کی وجہ سے گولی، رقاص کے کسی قابلِ قدر زاویے میں سے حرکت کرنے سے پیشتر، اضافی سکون کی حالت میں آجاتی ہے۔

فرض کرو کہ گولی کی کمیت م، اس کی رفتار و اور رقاص کے محور کے نیچے اُس کے افقی راستہ کی گہرائی گ ہے۔ اس لیے صدمہ کے عین بعد آلہ کے معیارِ حرکت کا معیار م و گ ہے۔ اس لیے اگر رقاص کو ایصال شدہ زاوی رفتار سہ ہو تو (۲۰۸)

$$\text{م و گ} = \text{مر ک}^{2}\,\text{سہ} \qquad \ldots\ldots (۱)$$

جہاں مستقل مر اور ک رقاص سے متعلق ہیں جب کہ گولی کے ادخال سے اس میں ترمیم کردی گئی ہو، لیکن یہ تصحیح بالعموم غیر اہم ہوتی ہے۔ اگر عہ وہ زاویہ ہو جس میں سے رقاص ساکن ہونے سے پیشتر جھولتا ہے تو توانائی کی مساوات کی رو سے

$$\tfrac{1}{2}\,\text{مر ک}^{2}\,\text{سہ}^{2} = \text{مر ج ھ}\,(1 - \text{جم عہ}) \qquad \ldots\ldots (۲)$$

جہاں نقطہ و کے محور سے مرکزِ کمیت کا فاصلہ ھ سے تعبیر کیا گیا ہے۔ پس

$$\text{و}^{2} = 4\left(\frac{\text{مر}}{\text{م}}\right)^{2}\left(\frac{\text{ک}}{\text{گ}}\right)^{2} \times \text{ج ھ جب}^{2}\,\tfrac{1}{2}\,\text{عہ} \qquad \ldots\ldots (۳)$$

[۱] جیسا کہ بی۔ رابنس (B.Robins) (لندن ۱۷۴۲ء) نے New Principles of Gunnery ۱۷۴۲ء میں بیان کیا ہے۔

اگر رقاص کے ایک چھوٹے اہتزاز کا وقت ت ہو تو دفعہ ۵ کی رو سے

$$ک^2 = \frac{ج\, ت^2\, ھ}{4\pi^2} \qquad \ldots\ldots\ldots (4)$$

پر

$$و = \frac{1}{\pi} \times \frac{ھ}{م} \times \frac{ھ}{گ} \times جب\, \frac{1}{2}\, عہ \times ج\, ت \qquad \ldots (5)$$

اِس طرح رفتار و اُن مقداروں کی رقوم میں بیان ہو چکی جن کو مشاہدہ سے معلوم کیا جا سکتا ہے۔

زاویہ عہ کو بعض اوقات پیمائشی فیتہ سے معلوم کیا جاتا ہے جو رقاص سے ایک ایسے نقطہ پر لگا ہوا ہوتا ہے جو مرکز کمیت اور لٹکاؤ کے محور کے مستوی میں ہوتا ہے۔ یہ فیتہ رقاص کے جھولنے سے باہر نکل آتا ہے۔ اگر محور سے اِس نقطہ کا فاصلہ ب ہو تو فیتہ کا وہ طول جو کھنچ آتا ہے قوس ب ا کے وتر کے مساوی ہونے کی وجہ سے ۲ ب جب $\frac{1}{2}$ عہ ہے۔ اس کو لا سے تعبیر کیا جائے تو

$$و = \frac{1}{2\pi} \times \frac{ھ}{م} \times \frac{ھ}{گ} \times \frac{لا}{ب} \times ج\, ت \qquad \ldots\ldots\ldots (6)$$

محور پر کوئی دھکا دار صدمہ نہ پڑنے کے لیے فائر کرنے کا خط زد کے مرکز میں سے گزرنا چاہیے۔ اس آلہ کی بعض قسموں میں وہ بندوق جس سے گولی ماری جاتی ہے رقاص کا ایک حصہ ہوتی ہے جو بازگشت (دھکہ) سے حرکت میں آتی ہے۔ یہ ترتیب کم صحیح ہے کیونکہ رقاص کو جو معیار حرکت ایصال ہوتا ہے وہ ٹھیک طور پر گولی کے معیار حرکت کے مساوی اور مخالف نہیں ہوتا اور اُس معیار حرکت کی وجہ سے بڑھ جاتا ہے جو گیسوں میں دھماکہ سے پیدا ہوتا ہے۔

(۲۰۹) ۳ ۷۔ توانائی پر دھکوں کا اثر۔

ہم دو بعدوں میں حرکت کی صورت پر غور کرتے ہیں چنانچہ فرض کرو کہ ایک جسم پر فوری دھکوں کا ایک نظام عمل کرتا ہے جو اس کے مختلف نقطوں پر

لگائے گئے ہیں ۔ فرض کرو کہ یہ دھکے ایک دھکہ دار قوت (ضا، عا) جو مرکز کمیت گ پر ہے اور ایک دھکہ دار جفت نہ کے معادل ہے ۔ جب دفعہ ۱۷ حرکت کی اچانک تبدیلی مساواتوں

م(عَ - ع) = ضا، م(وَ - و) = عا، ع (سَ - س) = نہ
(۱)........

سے حاصل ہوتی ہے ۔ اس لیے دھکوں کی وجہ سے توانائی کا اضافہ

{ ½ م(عَ² + وَ²) + ½ ع سَ² } - { ½ م(ع² + و²) + ½ ع س² }

= ½ م(عَ² - ع²) + ½ م(وَ² - و²) + ½ ع (سَ² - س²)

= ضا × ½ (ع + عَ) + عا × ½ (و + وَ) + نہ × ½ (س + سَ)
(۲).........

ہے ۔

ہمیں اس کے معادل ایک نتیجہ حاصل ہوگا اگر ہم اُن قوتوں میں سے ہر ایک کو جن سے دھکہ پیدا ہوا ہے اُس کے نقطہ عمل کی ابتدائی اور آخری رفتاروں (قوت کی سمت میں تحلیل کردہ) کے اوسط حسابی سے ضرب دیں ۔ کیونکہ خیال کرو کہ وہی جسم ہے اور اسی محل میں ہے اور اُس میں ایک ایسا ہٹاؤ پیدا ہوتا ہے کہ گ کی حرکت انتقال کے اجزائے ترکیبی ½ (ع + عَ) تہ، ½ (وَ + و) تہ ہیں اور اس کے ساتھ گردش ½ (س + سَ) تہ ہے جہاں تہ کوئی صغیر مقدار، وقت کے بعدوں کی ہے ۔ تب (۲) کی آخری سطر کا جملہ اُس کام کو تعبیر کریگا جو اس ہٹاؤ میں قوت (ضا/تہ، عا/تہ) جو گ پر ہے اور جفت نہ/تہ انجام دیتے ہیں ۔ اب اگر اصلی مسئلہ میں دھکہ پیدا کرنے والی قوتوں میں سے کوئی ایک ھ ہو اور اس کے نقطہ عمل کی ابتدائی اور آخری رفتاریں (قوت کی سمت میں تحلیل کردہ) ق، قَ ہوں تو خیالی صورت میں اس نقطہ کا

متذکرہ سمت میں ہٹاؤ

$$\frac{1}{2}(\bar{ق} + \bar{ق}')\,تہ$$

ہوگا اور قوت $\frac{ف}{تہ}$ کا کام $ف \times \frac{1}{2}(ق + قَ)$ ہوگا۔ اس لیے ایسی قوتوں کے نظام کا کُل کام

$$\Sigma \left\{ ف \times \frac{1}{2}(ق + قَ) \right\} \quad \ldots\ldots (۳)$$

ہوگا۔

یہ نتیجہ اس طرح بھی حاصل ہو سکتا ہے کہ راست اُس کام کو محسوب کیا جائے جو دھکہ وار قوتیں کرتی ہیں۔ سادہ ترین ترکیب یہ ہے کہ یہ خیال کیا جائے کہ
(۲۱۰) اِن قوتوں کی مستقل قوتیں $\frac{ف}{تہ}$ ایک بہت ہی خفیف وقت تہ میں عمل کرتی ہیں۔ تب رفتار کی تبدیلیاں جو وقفہ تہ میں واقع ہوتی ہیں زیر بحث لمحہ تک کُل دھکہ کے متناسب ہونگی اور اس لیے اُس وقت کے متناسب ہونگی جو وقفہ کی ابتداء سے گزر چکا ہے۔ اس لیے نقاط عمل کی اوسط رفتاریں جن کو متعلقہ قوتوں کی سمتوں میں تحلیل کیا گیا ہو $\frac{1}{2}(ق + قَ)$ سے اور متناظر ہٹاؤ $\frac{1}{2}(ق + قَ)$ تہ سے تعبیر ہونگے۔ اس طریقہ سے ہم پھر جملہ (۳) پر جو کُل کام کردہ کے لیے ہے پہنچتے ہیں۔ یہ ذہن نشیں رہے کہ رفتار کی وہ تبدیلیاں جو معمولی محدود اسراعوں کی وجہ سے پیدا ہوتی ہیں یہاں نظر انداز کی گئی ہیں۔ یہ جائز ہے کیونکہ وقفہ تہ کو انتہا میں صغیر سمجھا گیا ہے۔

مثال ۱۔ اندفاعی رقاص میں وہ دھکہ جو رقاص کو ایصال ہوتا ہے عملاً م و ہوتا ہے اور نقاط عمل کی ابتدائی رفتار گ سہ ہوتی ہے۔ اس لیے رقاص کو جو توانائی ایصال ہوتی ہے وہ $\frac{1}{2}$ م و گ سہ ہے جو دفعہ ۲۷ (۱) کی رو سے $\frac{1}{2}$ مر $کہ^2$ $سہ^2$ کے مساوی ہے۔ اس لیے توانائی کا کُل نقصان

$$\frac{1}{2} م و^2 - \frac{1}{2} مر\, کہ^2 سہ^2 = \frac{1}{2} م و^2 \left(1 - \frac{م گ^2}{مر\, کہ^2}\right) \quad \ldots\ldots (۴)$$

ہے۔

مثال ۲۔ دفعہ ۱۰۷ مثال ۲ کے مسئلہ میں وہ رفتار جو ج کو ایصال کی گئی ہے

$$ع_۲ + ل\, س_۲ = \frac{۱}{۲}\, \frac{ف}{م} \qquad (۵)$$

ہے اور اس لیے دھکہ کی وجہ سے توانائی

$$\frac{۱}{۴}\, \frac{ف^۲}{م} \qquad (۶)$$

ہے۔ اگر جوڑ ب استوار ہوتا تو توانائی $\frac{ف^۲}{م}$ ہوتی جس کو آسانی سے معلوم کیا جا سکتا ہے۔ اس سے ایک عام اصول کی توضیح ہوتی ہے کہ ایک میکانیکی نظام میں کسی قید کو داخل کرنے سے وہ توانائی گھٹتی ہے جو دیے ہوئے دھکوں سے پیدا ہوتی ہے۔ (دیکھو دفعہ ۱۰۸)۔

مثالیں (۱۵)

۱۔ ایک ڈنڈا جو ایک سرے کے گرد (جو ثابت ہے) ایک چکنے افقی مستوی پر گردش کر رہا ہے۔ یکایک دو ٹکڑوں میں ٹوٹا جاتا ہے۔ ہر حصہ کی حرکت مابعد معلوم کرو۔

۲۔ ایک ہی وزن اور جثہ کے دو کُرے جن میں سے ایک ٹھوس اور دوسرا کھوکھلا ہے دیے گئے ہیں۔ یہ کیسے معلوم کروگے کہ کونسا کھوکھلا ہے۔

۳۔ ایک انتصابی تاگا ایک رِیل سے خود کھلتا ہے اور اُس کا اوپر کا سرا ثابت ہے۔ ثابت کرو کہ رِیل کا نیچے وار اسراع

$$ج \times \frac{ا^۲}{ا^۲ + ک^۲}$$

اور تاگے کا تناؤ ۲۱۱)

$$م ج \times \frac{ک^۲}{ا^۲ + ک^۲}$$

ہے جہاں رِیل کی کمیت مَ، اس کا نصف قطر اَ اور محور کے گِرد گردش کا نصف قطر کہ ہے۔

۴۔ تاگے کی ایک رِیل ایک افقی میز پر ساکن ہے اور اُس کے سِرے خفیف طور پر نکلے ہوئے ہیں۔ تاگے کے آزاد سِرے کو رِیل کی اندرونی جانب سے باہر نکالا گیا ہے اور اُس کو ایک معلومہ قوت ف سے افقاً کھینچا گیا ہے۔ رِیل کا مرکز کس سمت میں اور کس اسراع کے ساتھ حرکت کریگا۔ (مرکز پر اور سِروں پر رِیل کے نصف قطر دیے گیے ہیں، نیز گردش کا نصف قطر بھی دیا گیا ہے۔)

۵۔ کمیت مَ، نصف قطر اَ اور جمود کے معیار عَ کی ایک چرخی ڈوری کے حلقہ میں سے گزرتی ہے جس کا ایک سِرا ثابت ہے اور دوسرا ایک ثابت چرخی پر سے گزرتا ہے جس کا نصف قطر اَ اور جمود کا معیار عَ ہے اور اِس سِرے پر ایک کمیت م انتصاباً لٹک رہی ہے۔ ثابت کرو کہ م کا اسراع جب کہ نظام آزادانہ متحرک ہو اور ڈوری کے آزاد سِروں کو انتصابی فرض کیا گیا ہو۔

$$\left(\text{م} - \frac{1}{2}\,\text{مَ}\right)\text{ج} \div \left(\text{م} + \frac{1}{4}\,\text{مَ} + \frac{\text{عَ}}{\text{اَ}^{2}}\;\frac{1}{4}\;\frac{\text{ع}}{\text{ا}^{2}}\right)$$

ہے۔

۶۔ ایک مُدَوّر اسطوانہ ایک افقی مستوی پر لڑھک سکتا ہے اور مستوی کو محور کے علی القوائم کسی طریقہ پر افقاً متحرک کیا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ اگر مستوی اور اسطوانہ ابتداً ساکن تھے تو وہ ایک ساتھ سکون میں آئینگے اور اسطوانے کے مرکز کے طے کردہ فاصلہ کو مستوی کے طے کردہ فاصلہ کے ساتھ نسبت $\frac{\text{کہ}^{2}}{\text{کہ}^{2} + \text{ا}^{2}}$ ہوگی جہاں اسطوانہ کا نصف قطر ا ہے اور اس کا گردش کا نصف قطر کہ ہے۔

۷۔ ایک بائسکل ایک دائری حلقہ کی اندرونی جانب پر ایک انتصابی مستوی میں متحرک ہے۔ اگر ہر پہیہ کا نصف قطر اَ حلقہ کا نصف قطر ر، اور بائسکل کی ظاہری رفتار (یعنے وہ رفتار جس سے تماس کا کوئی نقطہ راستے پر متحرک ہے) و ہو تو پہیوں کی زاوئی رفتار اور فریم کی زاوئی رفتار معلوم کرو۔

$$\left[\,\text{و}\left(\frac{1}{\text{ا}} - \frac{1}{\text{ر}}\right)،\ \frac{\text{و}}{\text{ر}}\,\right]$$

۸ ۔ نصف قطر ا کا ایک دائری حلقہ، نصف قطر ب کے ایک متدیر اسطوانہ کے گرد تماس میں لُڑھکتا ہے اور اُس کا مستوی اسطوانہ کے محور پر عمود ہے۔ کس زاویہ میں سے حلقہ گردش کرتا ہے جب کہ نقطہ تماس اسطوانہ کا ایک پورا دَور کر لیتا ہے۔

نیز اگر حلقہ کی گردش کا ظاہری دَور ت ہو تو حلقہ اور اسطوانہ کے درمیان دباؤ معلوم کرو۔ جاذبہ کو نظر انداز کرو۔

$$\left[\frac{\text{۲}\pi(\text{ا} - \text{ب})}{\text{ا}} \text{ ، } \frac{\text{۴}\pi^{\text{۲}}\text{م}(\text{ا} - \text{ب})}{\text{ت}^{\text{۲}}} \right]$$

۹ ۔ ایک ایکساں ڈنڈے کو ایک سیڑھی کے مانند اس طرح رکھا گیا ہے کہ اس کا ایک سِرا ایک چکنی انتصابی دیوار پر اور دوسرا سِرا ایک چکنے افقی مستوی پر ہے۔ اس کو سکون سے انتصابی کے ساتھ میلان ع پر چھوڑ دیا گیا ہے۔ دیوار اور مستوی پر ابتدائی دباؤ معلوم کرو۔ $\left[\frac{\text{۳}}{\text{۴}} \text{م ج جب ع جم ع ، م ج} \left(\text{۱} - \frac{\text{۳}}{\text{۴}} \text{جب}^{\text{۲}} \text{ع}\right) \right]$

۱۰ ۔ نیز ثابت کرو کہ ڈنڈا دیوار کو مس کرنا چھوڑ دیگا جب کہ اوپر کا سِرا (۲۱۲
اپنے ابتدائی ارتفاع کا ایک ثلث گر چکے۔

۱۱ ۔ دو ذرّے م اور مَ ایک ہلکے ڈنڈے سے مربوط ہیں اور م ایک چکنے افقی مستوی پر حرکت کرنے میں آزاد ہے۔ اگر ڈنڈے کو غیر قائم محل سے خفیف طور پر ہٹایا جائے تو ثابت کرو کہ زاوئی رفتار س جس سے وہ افقی محل پر پہنچتا ہے

$$\text{س}^{\text{۲}} = \frac{\text{۲ج}}{\text{ل}}$$

سے حاصل ہوتی ہے۔

مَ کے راستہ کی نوعیت کیا ہے۔

۱۲ ۔ کمیت م اور طول ل کی ایک ایکساں زنجیر، نصف قطر ا کی ایک چرخی پر سے توازن میں لٹک رہی ہے۔ اگر وہ ابھی سکون سے حرکت کی ابتداء کرے اور چرخی کے لحاظ سے نہ پھسلے تو ثابت کرو کہ حرکت کی مساوات شکل

$$(\text{ع} + \text{م ا}^{\text{۲}}) \text{ س} \frac{\text{فر س}}{\text{فر ط}} = \frac{\text{۲م ج ا}^{\text{۲}}}{\text{ل}} \text{ ط}$$

کی ہے جہاں چرخی کا جمود کا معیار ع ہے۔

زنجیر کے تناؤ اُن نقطوں پر جہاں وہ چرخی کو چھوڑتی ہے معلوم کرو جب کہ چرخی زاویہ طہ میں سے گھوم چکی ہو۔

۱۳۔ موٹائی ۲ ھ کا ایک ایکساں تختہ نصف قطر ا کے ایک ثابت مستدیر اسطوانہ کے سِرے پر ساکن ہے جہاں اسطوانہ کا محور افقی ہے۔ ثابت کرو کہ اگر اُس کو حرکت میں لایا جائے تو توانائی کی مساوات اِس مفروضہ پر کہ حرکت خالص لڑھکنے کی حرکت ہے

$$\frac{1}{2}\left(\text{ک}^2+\text{ھ}^2+\text{ا}^2\,\text{طہ}^2\right)\dot{\text{طہ}}^2+\text{ج}\left\{\text{ا طہ جب طہ}-(\text{ا}+\text{ھ})(1-\text{جم طہ})\right\}=\text{مستقل}$$

ہے۔

پس ثابت کرو کہ اگر ا > ھ تو افقی محل قائم ہے اور یہ کہ ایک چھوٹے اہتزاز کا دَور وہی ہے جو طول

$$\frac{\text{ک}^2+\text{ھ}^2}{\text{ا}-\text{ھ}}$$

کے ایک سادہ رقاص کا ہوتا ہے۔

۱۴۔ ایک ٹھوس ناقص نما جس کے نیم محور ا، ب ہیں ایک کھردرے میز پر اس طرح ساکن ہے کہ اُس کا چھوٹے سے چھوٹا محور (۲ ج) انتصابی ہے۔ ثابت کرو کہ وہ ارتعاش کے دو طبعی اسلوب رکھتا ہے اور متناظر سادہ رقاصوں کے طول

$$\frac{(\text{ا}^2+6\,\text{ج}^2)\,\text{ج}}{5\,(\text{ا}^2-\text{ج}^2)}\;،\;\frac{(\text{ب}^2+6\,\text{ج}^2)\,\text{ج}}{5\,(\text{ب}^2-\text{ج}^2)}$$

ہیں۔

ثابت کرو کہ طویل تر دَور اُس ارتعاش سے متعلق ہے جو دو چھوٹے محوروں کے متوازی ہے۔

۱۵۔ اگر کیٹر کے رقاص میں دھاروں کی بجائے مساوی نصف قطر کے اسطوانی پن ہوں تو ثابت کرو کہ جب ہر ایک کے گرد اہتزاز کا دور وہی ہوتا ہے تو معادل سادہ رقاص کا طول، پنوں کی سطحوں کے درمیان چھوٹے فاصلہ کے مساوی ہے۔

نیز ثابت کرو کہ اگر دور تقریباً نہ کہ ٹھیک طور پر مساوی ہوں تو دفعہ (۵۶) کا ضابطہ (۱۳) پھر بھی تقریباً درست رہیگا اگر اسطوانہ کا نصف قطر چھوٹا ہو بشرطیکہ پنوں کی سطحوں سے مرکز کمیت کے کم سے کم فاصلے ھ، ھ ہوں۔

(۲۱۲) ۱۶۔ ایک ڈنڈا ا ب دو مساوی متقاطع ڈوریوں سے جو اُس کے سروں پر بندھی ہوئی ہیں دو نقطوں ج، د سے جو ایک ہی ہمواری پر ہیں لٹک رہا ہے اور ا ب = ج د۔ نیز ڈنڈا ج د میں سے گزرنے والے انتصابی مستوی میں حرکت کرنے کے لیے مقید ہے۔ اگر ا ب = ۲ ج اور ج د کے نیچے ا ب کی گہرائی ۲ ب ہو تو ثابت کرو کہ اگر ب > ج تو معادل سادہ رقاص کا طول

$$\frac{۲\,(ک^۲ + ب^۲)\,ب}{ب^۲ - ج^۲}$$

ہے۔

۱۷۔ ایک پہیہ کا نصف قطر ا ہے اور اُس کا مرکز کمیت گ، محور سے فاصلہ ف پر ہے۔ یہ پہیہ ایک انتصابی مستوی میں آزادانہ گھوم سکتا ہے۔ اِس سے ایک وزن م ایک ڈوری کے ذریعہ بندھا ہوا ہے جو ایک جانب مماس وار لٹک رہی ہے۔ اگر پہیہ کی کمیت ھ، محور کے گرد اُس کے جمود کا معیار ع اور گ میں سے گزرنے والے نصف قطر کا میلان انتصابی کے ساتھ ط سے تعبیر ہو تو ع، ھ، ط اور دوسری دی ہوئی مقداروں کی رقوم میں توانائی کی مساوات حاصل کرو۔

جب توازن ممکن ہو تو ثابت کرو کہ قائم اور غیر قائم محل یکے بعد دیگرے آتے ہیں اور ثابت کرو کہ ایک قائم محل کے گرد ایک چھوٹے اہتزاز کا وقت

$$2\pi \sqrt{\frac{\text{ع} + \text{م}\,\text{ا}^2}{\text{م ج ف جم عہ}}}$$

ہے جہاں طہ کی قیمت توازن عہ ہے۔

۱۸۔ ایک ڈوری ا ب ج د سے دو مساوی ذرّے ا اور ب پر بندھے ہوئے ہیں اور ا ب = ب ج = ل، ب ج = ۲ ا۔ ڈوری کے سِرے ا اور د ایک ہی ہمواری پر ثابت ہیں۔ جب یہ نظام توازن میں ہوتا ہے تو حصے ا ب اور ج د افقی سے زاویے عہ بناتے ہیں۔ ثابت کرو کہ جب نظام ا د میں سے گزرنے والے انتصابی مستوی میں جھولتا ہے تو معادل سادہ رقاص کا طول

$$\frac{\text{ل جب عہ}}{1 + \text{ل} \backslash \text{ا} \times \text{جم}^3\,\text{عہ}}$$

ہے۔

ایک ایکساں ڈنڈے ب ج کے لیے جو مساوی ڈوریوں ا ب، د ج سے لٹک رہا ہو تمناظر نتیجہ حاصل کرو۔

۱۹۔ ایک مرکب رقاص کے لٹکاؤ کے محور کو آگے اور پیچھے افقاً متحرک کیا گیا ہے اور اس کا ہٹاؤ وقت ت پر ضا ہے۔ ثابت کرو کہ حرکت کی صحیح مساوات

$$\text{ل}\,\frac{\text{فر}^2\text{ط}}{\text{فرت}^2} + \text{ج جب ط} = -\frac{\text{فر}^2\text{ضا}}{\text{فرت}^2}\,\text{جم ط}$$

ہے جہاں معادل سادہ رقاص کا طول ل ہے۔

۲۰۔ ایک ڈنڈا جو طول ل کی ایک ڈوری کے ذریعہ جو اس کے ایک سِرے سے بندھی ہے ایک ثابت نقطہ سے لٹک رہا ہے اور ایک انتصابی مستوی میں چھوٹے اہتزاز کر رہا ہے۔ ثابت کرو کہ ارتعاش کے دو طبعی اسلوبوں کے دَور مساوات

$$\text{ن}^4 - \frac{\text{ک}^2 + \text{ا}^2 + \text{ا ل}}{\text{ک}^2\,\text{ل}}\,\text{ج}\,\text{ن}^2 + \frac{\text{ج}^2\,\text{ا}}{\text{ک}^2\,\text{ل}} = 0$$

سے متعین ہوتے ہیں جہاں ڈوری جس نقطہ سے بندھی ہے اس کا فاصلہ مرکز کمیت (گ) سے ا ہے اور گ کے گرد گردش کا نصف قطر کہ ہے۔

اصلوں کی تقریبی قیمتیں معلوم کرو جب کہ $\frac{\text{کہ}}{\text{ل}}$ اور $\frac{\text{ا}}{\text{ل}}$ دونوں چھوٹے ہوں، اور متناظر اسلوبوں کی نوعیت کا امتحان کرو۔

۲۱۔ ثابت کرو کہ دوہرے رقاص (دفعہ ۶۸) کی صورت میں توانائی بالحرکت کسی تشکیل میں (۲۱۴

$$\frac{1}{2}\left(\text{ا}\,\dot{\text{ط}}^{2}+2\,\text{ھ}\,\dot{\text{ط}}\,\dot{\text{ف}}+\text{ب}\,\dot{\text{ف}}^{2}\right)$$

ہے جہاں $\text{ا}=\text{مر}\,\text{ک}^{2}+\text{م}\,\text{ا}^{2}$، $\text{ھ}=\text{م}\,\text{ا}\,\text{ب}\,\text{جم}\,(\text{ط}-\text{ف})$، $\text{ب}=\text{م}\,(\text{ب}^{2}+\text{کہ}^{2})$

نیز ثابت کرو کہ توانائی بالقوہ

$$\text{مستقل}-\text{مر}\,\text{ج}\,\text{ھ}\,\text{جم}\,\text{ط}-\text{م}\,\text{ج}\,(\text{ا}\,\text{جم}\,\text{ط}+\text{ب}\,\text{جم}\,\text{ف})$$

ہے۔

ثابت کرو کہ محور و کے گرد زاویٔ معیار حرکت

$$(\text{ا}+\text{ھ})\,\dot{\text{ط}}+(\text{ھ}+\text{ب})\,\dot{\text{ف}}$$

ہے۔

۲۲۔ طول ل کے ایک ایکساں ڈنڈے کو مساوی قوتوں کے ذریعہ جو اس کے سروں پر لگائی گئی ہیں اس کے طول کے علی القوائم اسراع ع سے متحرک کیا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ ایک سرے سے فاصلہ لا پر جزئی قوت ق اور خماؤ کا معیار مر،

$$\text{ق}=\frac{\text{م}\,\text{ع}}{\text{ل}}\left(\frac{1}{2}\,\text{ل}-\text{لا}\right)،\quad \text{مر}=-\frac{\text{م}\,\text{ع}}{2\,\text{ل}}\,\text{لا}\,(\text{ل}-\text{لا})$$

سے حاصل ہوتے ہیں۔

مثالیں (۱۶)

دھکہ دار حرکت

۱۔ ایک دائری حلقہ بالکل آزاد ہے۔ اس کے محیط کے ایک نقطہ پر ضرب پڑتی ہے۔ گردش کا ابتدائی محور معلوم کرو (۱) جب کہ ضرب مماس وار ہو (۲) جب کہ وہ حلقہ کے مستوی کے علی القوائم ہو۔

۲۔ ایک ساکن ایکساں ڈنڈے کے ایک سرے پر ایک عمود وار دھکہ پڑتا ہے ثابت کرو کہ اس کی توانائی بالحرکت اُس توانائی بالحرکت سے نسبت ۴ : ۳ میں بڑی ہوگی اگر دوسرا سرا ثابت ہوتا۔

۳۔ نصف قطر ا کی ایک ایکساں نیم دائری تختی پر اس کے مستوی کے عمود وار حائط قطر کے وسطی نقطہ پر ضرب پڑتی ہے۔ اِس قطر سے ابتدائی گردش کے محور کا فاصلہ معلوم کرو۔ [۵۹ء ا]

۴۔ ایک استوار پترا اپنے مستوی میں کسی طرح حرکت کر رہا ہے کہ اچانک اس کے ایک نقطہ و پر ضرب پڑتی ہے۔ و کا محل کیا ہونا چاہیے کہ پترا سکون میں آسکے۔

۵۔ ایک مربع تختی ایک قطر کے گرد زاوئی رفتار س سے آزادانہ گھوم رہی ہے۔ اچانک ایک راس کو جو اُس وتر میں نہیں ہے ثابت کر دیا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ نئی زاوئی رفتار $\frac{1}{4}$ س ہے۔

۶۔ ایک پترا ایک ثابت نقطہ و کے گرد اپنے مستوی میں گھومنے میں آزاد ہے۔ اُس پر دھکہ وار جفت نہ کی ضرب پڑتی ہے۔ و پر دھکہ دار دباؤ معلوم کرو اور ثابت کرو کہ وہ $\frac{1}{2}\frac{نہ}{ک}$ سے متجاوز نہیں ہو سکتا۔

۷۔ ایک ڈنڈے پر جس کا ایکساں ہونا ضروری نہیں ہے اس کے طول کے

علی القوائم کسی نقطہ ف پر ضرب پڑتی ہے اور کسی دوسرے نقطہ ق پر پیدا شدہ رفتار و ہے ۔ اگر یہی دھکہ ق پر لگایا جاتا تو ثابت کرو کہ ف پر رفتار وہی و ہوتی ہے ۔

۸ ۔ ایک پترے کے ایک نقطہ ف پر، پترے کے مستوی میں کسی سمت ف فَ میں ایک دھکہ پڑتا ہے اور کسی دوسرے نقطہ ق کی رفتار کا جزو ترکیبی سمت ق قَ میں و ہے ۔ ثابت کرو کہ اگر ق پر سمت ق قَ میں وہی دھکہ لگایا جاتا تو ف کی رفتار سمت ف فَ میں و ہوتی ۔

۹ ۔ طول ۲ ا کا ایک ڈنڈا ہے جو طول ل کی ایک ڈوری کے ذریعہ جو اُس کے ایک سرے سے بندھی ہے ایک ثابت نقطہ سے لٹک رہا ہے اور اس ثابت نقطہ کے گرد ایک چکنے افقی مستوی پر گردش کر رہا ہے ۔ معلوم کرو کہ اس کے کس نقطہ پر ایک دھکہ لگانا چاہئے کہ وہ سکون میں آسکے ۔ (۲۱.۵

۱۰ ۔ ایک استوار پترے پر جو ایک ثابت نقطہ و کے گرد گھومنے میں آزاد ہے ایک دھکہ ضا اُس خط میں پڑتا ہے جو وگ (ممدودہ) سے ف پر علی القوائم ملتا ہے ۔ ثابت کرو کہ پیدا شدہ توانائی اُس توانائی سے جو پیدا ہوتی اگر پترا بالکل آزاد ہوتا بقدر

$$\frac{1}{2}\,\frac{(\text{گ ف} \times \text{گ و} - \text{ک}^2)^2}{\text{ک}^2\,(\text{ک}^2 + \text{وگ}^2)} \times \frac{\text{ضا}^2}{\text{م}}$$

کے کم ہے ۔

۱۱ ۔ دو مساوی ایکساں ڈنڈے ا ب اور ا ج جو ا پر چکنے قبضہ سے جڑے ہوئے ہیں اس طرح ساکن ہیں کہ ان سے ایک قائمہ زاویہ بنتا ہے ۔ اگر ج پر ایک ضرب، ا ج کے عمود وار سمت میں لگائی جائے تو ا ب اور ا ج کے مرکزوں کی ابتدائی رفتاریں ۲ : ۷ کی نسبت میں ہونگی ۔

۱۲ ۔ ا ب اور ج د دو مساوی متوازی ایکساں ڈنڈے ہیں اور نقطے ا، ج ایک ڈوری سے جو دونوں پر عمود ہے مربوط ہیں ۔ اگر ب پر ایک ضرب، ا ب کے علی القوائم لگائی جائے تو ب کی ابتدائی رفتار، د کی رفتار کے ۷ گنا کے

مساوی ہو گی۔

۱۳۔ چار مساوی ایکساں ڈنڈوں کو چکنے قبضوں سے جوڑا گیا ہے اور وہ ایک مربع کی شکل میں ساکن ہیں۔ اگر ان میں سے ایک ڈنڈے پر ایک دھکہ دار جفت لگایا جائے تو ثابت کرو کہ اس کی ابتدائی رفتار اس رفتار کا $\frac{1}{8}$ ہو گی جو ڈنڈا حاصل کرتا اگر وہ آزاد ہوتا۔

۱۴۔ تین ایکساں مساوی ڈنڈے اب، ب ج، ج د جو ب اور ج پر جڑے ہوئے ہیں سکون سے ایک افقی خط میں حرکت کی ابتدا کرتے ہیں، بیرونی (جانبی) ڈنڈے، ا اور د پر کی کھونٹیوں کے ساتھ تماس میں رہتے ہیں۔ ثابت کرو کہ وسطی ڈنڈے کا ابتدائی اسراع $\frac{6}{5}$ ج ہے۔

یہ ج سے کیوں بڑا ہے؟

۱۵۔ کمیتوں $م_1$، $م_2$ اور طولوں $2ا_1$، $2ا_2$ کے دو ڈنڈے، ایک خطِ مستقیم میں ہیں یہ ڈنڈے ایک مشترک سرے پر قبضہ سے جڑے ہوئے ہیں۔ اگر ان میں سے ایک ڈنڈے پر دھکہ دار جفت ن کی ضرب پڑے تو دوسرے کی ابتدائی زاویی رفتار

$$\frac{ا_1 ا_2}{(ا_1^2 + ک_1^2)\, م_2 ک_2^2 + (ا_2^2 + ک_2^2)\, م_1 ک_1^2} \times ن$$

ہو گی جہاں اِن دو ڈنڈوں کے گردش کے نصف قطر کمیت کے مرکزوں کے گرد $ک_1$ اور $ک_2$ ہیں اور کمیت کے مرکزوں کو وسطی نقطوں پر فرض کیا گیا ہے۔

۱۶۔ دو مساوی ایکساں ڈنڈے جو باہم قبضہ سے جڑے ہوئے ہیں ایک سرے سے انتصاباً لٹک رہے ہیں۔ اگر نچلے ڈنڈے پر ایک دھکہ دار جفت ن لگایا جائے تو پیدا شدہ توانائی $\frac{6}{7} \frac{ن^2}{ھ ا^2}$ ہو گی جہاں ہر ڈنڈے کی کمیت ھ اور طول ۲ا ہے۔

۱۷۔ ۲ا کا ایک ایکساں ڈنڈا دو کھونٹیوں پر جن کے درمیان فصل

۲ ج ہے تمثاکلاً ایک افقی خط میں ساکن ہے۔ کھونٹیاں کافی کھُردری ہیں اور پھسلن واقع نہیں ہوتی۔ ڈنڈے کے ایک سرے کو اُٹھاکر چھوڑ دیا گیا ہے۔ حرکت مابعد کی تحقیق اِس مفروضہ پر کرو کہ جب کبھی ڈنڈا کھونٹی پر گرتا ہے تو باز گشت نہیں کرتا۔

ثابت کرو کہ اگر $ج^{۲} < \frac{۱}{۳} ا^{۲}$ زاویئی رفتار ہر تصادم پر نسبت

$\frac{ا^{۲} - ۳ ج^{۲}}{ا^{۲} + ۳ ج^{۲}}$ میں فوراً گھٹ جاتی ہے۔

(۲۱۶)

دسواں باب

قانونِ تجاذب

۷۴۔ بیانِ قانون۔

نیوٹن نے تجاذب کا جو قانون پیش کیا ہے اُس کا ماحصل یہ ہے کہ کمیتوں م، مَ کے دو ذرّے جن کے درمیان فصل ر ہو ایک دوسرے کو ایسی قوت سے جذب کرتے ہیں جو

$$\frac{م\,مَ}{ر^2}$$

کے متناسب ہوتی ہے اگر ر، ذرّوں میں سے کسی ایک کے بُعدوں کے مقابلہ میں بڑا ہو۔ وہ امور جن سے یہ نتیجہ حاصل ہوتا ہے حسب ذیل طریقہ پر بیان کئے جا سکتے ہیں ہم دیکھتے ہیں کہ زمین کی سطح کے قریب ایک ہی مقام پر کے مختلف جسموں پر زمین کی کششیں، متعلقہ کمیتوں کے متناسب ہوتی ہیں۔ اب یہ فرض کرنا ایک فطری بات ہے کہ تناسبیت کا یہ قانون کوئی مقامی خصوصیت نہیں ہے بلکہ وہ فضا میں کسی محل کے لیے صادق آئیگا۔ نیز اگر ہم یہ سمجھیں کہ زمین کی کشش اُس کے چھوٹے سے چھوٹے ذرّوں کی کششوں کا حاصل ہے تو سادہ ترین مفروضہ یہ ہے کہ یہ ابتدائی کششیں ہیں اسی قانون کی پابندی کرتی ہیں اور اس لیے ایک ذرّہ م پر دوسرے ذرّہ مَ کی کشش جس حد تک کہ وہ م پر

منحصر ہے م کے متناسب ہوتی ہے۔ اب چونکہ کشش باہمی ہے اس لیے اُس کو مَ کے بھی متناسب ہونا چاہیے۔ اس طرح ہم اس دعوے پر پہنچتے ہیں کہ کشش حاصل ضرب م مَ کے بھی متناسب ہوتی ہے اور اس لیے اس کو

$$\text{م مَ فہ (ر)}$$

کے مساوی رکھا جا سکتا ہے جہاں فہ (ر) باہمی فاصلہ ر کا کوئی تفاعل ہے جو ابھی نامعلوم ہے۔

اس لیے کمیت م فاصلہ ر پر جو اسراع پیدا کریگی وہ م فہ (ر) کے مساوی ہوگا اور وہ کشش شدہ جسم کی کمیت پر منحصر نہ ہوگا۔

تفاعل فہ (ر) کی شکل کا اظہار کیپلر کے تیسرے کلیہ سے ہوتا ہے جو (۲۱۶)
سیاروی حرکت سے متعلق ہے۔ کلیہ یہ ہے کہ مختلف سیاروں کی دوری مدتوں کے مربعے ایک دوسرے کے ساتھ وہی نسبت رکھتے ہیں جو سورج سے ان کے اوسط فاصلوں کے مکعبوں میں ہوتی ہے۔ اگر یہ قانون صحیح ہے تو اُس کو ایسے مداروں کے لیے بھی صادق آنا چاہیے جو ٹھیک طور پر (نہ کہ صرف تقریبی طور پر) دائری ہوں۔ پس اگر دو ایسے مداروں کے نصف قطر ر، رَ ہوں اور گردش کے متناظر دور ت، تَ تو

$$\frac{\text{ت}^2}{\text{تَ}^2} = \frac{\text{ر}^3}{\text{رَ}^3} \qquad \text{(1)}$$

اب چونکہ ایک دائری مدار میں اسراع $\left(\frac{2\pi}{\text{ت}}\right)^2 \times \text{ر}$ ہوتا ہے اس لیے

$$\frac{\text{فہ (ر)}}{\text{فہ (رَ)}} = \frac{\text{تَ}^2}{\text{ت}^2} \times \frac{\text{ر}}{\text{رَ}} = \frac{\text{رَ}^2}{\text{ر}^2} \qquad \text{(2)}$$

اس لیے فہ (ر) ایسے بدلتا ہے جیسے $\frac{1}{\text{ر}^2}$ ۔

اس استدلال میں اُس فرق کو نظر انداز کر دیا گیا ہے جو سیارے کے

مطلق اسراع اور سورج کے لحاظ سے اس کے اسراع کے درمیان ہوتا ہے اور جو خود کسی قدر سیارے کے اسراع میں ضم ہو جاتا ہے۔ سیارے کے جمود کے مقابلے میں سورج کا جمود بہت بڑا ہے اور اس لیے جو خطا اس طرح پیدا ہوتی ہے وہ بہت خفیف ہوتی ہے۔ ہم ابھی بتائینگے کہ اس کی رعایت کس طرح رکھی جا سکتی ہے (دفعہ ۸۱)۔

اگر دو اکائی کمیتوں کے درمیان جو اکائی فاصلہ پر ہیں توت کسی مستقل جہ سے تعبیر ہو تو دو ذرّوں م اور مَ کے درمیان جو فاصلہ ر پر ہوں توت

$$\frac{جہ\ م\ مَ}{ر^۲} \quad ....(۳)$$

ہوگی۔ اس مستقل جہ کو تجاذب کا مستقل کہتے ہیں۔

۷۵۔ سادہ ہیئتی اطلاق۔

اگر قانون صداقت کے تجاذب کو مان لیا جائے تو بعض دلچسپ ہیئتی اطلاق دائری مداروں کے مفروضہ پر فوری بیان کئے جا سکتے ہیں۔

زمین کی کشش سے خاص طور پر دور کا جو جسم متاثر ہوتا ہے وہ صرف چاند ہے۔ اگر ہم ان اسراعوں پر غور کریں جو زمین چاند پر اور زمین کی سطح سے قریب ایک ذرّہ پر پیدا کرتی ہے تو ہم چاند کے فاصلہ کے اندازہ پر بالواسطہ پہنچتے ہیں اور اس کا مقابلہ اس فاصلہ سے کر سکتے ہیں جو ہندسی عملوں سے معلوم کیا گیا ہو۔ اس طرح اگر زمین کا نصف قطر ا اور چاند کا فاصلہ د ہو تو چاند کا اسراع کلیہ نیوٹن کے بموجب ج $\left(\frac{ا}{د}\right)^۲$ ہونا چاہیے[۱] لیکن اگر زمین کے گرد چاند کی گردش کا دور ت ہو تو دائری مدار میں اسراع $(۲\pi \backslash ت)^۲ \times د$ ہے۔ (۲۱۸)

---

[۱] کششوں کے نظریہ سے یہ معلوم ہے کہ کوئی جسم جو یکساں کثافت کے کروی تہوں سے ترکیب یافتہ ہو بیرونی جسموں کو اس طرح کشش کرتا ہے گویا کہ اس کی کمیت مرکز پر مرتکز ہے۔

مساوی رکھنے سے

$$\left(\frac{\text{ا}}{\text{د}}\right)^{3} = \frac{\text{۴}\pi^{2}\,\text{ا}}{\text{ج ت}^{2}} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (\text{۱})$$

اب اگر

$\text{ا} = \text{۲۰٫۹۰۹} \times \text{۱۰}^{6}$ فٹ، $\text{ج} = \text{۳۲٫۲}$ فٹ فی ثانیہ فی ثانیہ

$\text{ت} = \text{۲۷٫۳۲} \times \text{۸۶۴۰۰}$ ثانیہ

رکھا جائے تو

$$\frac{\text{ا}}{\text{د}} = \frac{\text{۱}}{\text{۶۰٫۱}}$$

نسبت $\frac{\text{ا}}{\text{د}}$ چاند کے افقی اختلاف منظر کی جیب ہے اور اس کو مشاہدہ سے بڑی صحت کے ساتھ معلوم کیا جا سکتا ہے۔ اوپر کی عددی قیمت بڑی حد تک اس نتیجہ کے مطابق ہے جو اس طرح حاصل کیا گیا ہے۔

نیوٹن نے اوپر کا عمل حساب کسی قدر مختلف شکل میں کیا تھا۔ اِس سے اُس کے عام تجاذب کے نظریہ کی، کپلر کے کلیہ کو چھوڑ کر، پہلی قطعی جانچ حاصل ہوئی۔

نیز ان اسراعوں کا مقابلہ کرنے سے جو معلومہ فاصلوں پر کے مختلف جسموں سے پیدا ہوتے ہیں ہم ان جسموں کی کمیتوں کا مقابلہ کر سکتے ہیں۔ بالخصوص ہم کسی سیارے کی کمیت کا، اگر سیارہ کا کوئی تابع ہو، مقابلہ سورج کی کمیت کے ساتھ کر سکتے ہیں۔

چنانچہ فرض کرو کہ سورج کی کمیت س، زمین کی کمیت ع، سورج کے گرد زمین کی گردش کا دور ت، زمین کے لحاظ سے چاند کی گردش کا دور تَ، زمین کے مدار کا نصف قطر د، اور چاند کے مدار کا نصف قطر دَ ہے تو ان دو صورتوں میں مرکزی اسراعوں کا مقابلہ کرنے سے

$$\frac{\text{ع}}{\text{دَ}^{2}} : \frac{\text{س}}{\text{د}^{2}} = \frac{\text{دَ}}{\text{تَ}^{2}} : \frac{\text{د}}{\text{ت}^{2}} \qquad \ldots\ldots (\text{۲})$$

اس لیے
$$\frac{\text{ع}}{\text{س}} = \left(\frac{\text{دَ}}{\text{د}}\right)^{۳} \times \left(\frac{\text{ت}}{\text{تَ}}\right)^{۲} \quad \cdots\cdots (۴)$$

(۲۱۹) تخمینی حساب کے لیے ہم

$$\frac{\text{دَ}}{\text{د}} = ۳۸۹ \text{،} \quad \frac{\text{ت}}{\text{تَ}} = ۱۳٫۳۷$$

رکھ سکتے ہیں۔ اس لیے

$$\frac{\text{ع}}{\text{س}} = \frac{۱}{۳۲۹۳۰۰}$$

یہ عمل حساب بھی اصولاً نیوٹن[۱] سے منسوب ہے۔

۷۶۔ دو جسموں کا مسئلہ۔

یہ کہنے کی چنداں ضرورت نہیں ہے کہ نیوٹن اور اُس کے جانشینوں کی مزید تحقیقاتوں نے جن میں سیاروں کی ایک دوسرے پر اور سورج پر کششوں کا لحاظ رکھا گیا تھا معکوس مربع کے قانون کے صحت کی اچھی طرح تصدیق کردی ہے یہ ثابت کرتے ہوئے کہ اس سے سیاروں کی اصلی حرکتوں کی دقیق سے دقیق تفصیل حاصل کی جا سکتی ہے۔

سب سے اول دائری مدار کی قید کے بغیر دو جسموں کی حرکت پر غور کرنا تھا۔ اس میں قدرے آسانی پیدا ہو گی اگر ہم ابتدآ یہ مان لیں کہ ان جسموں میں سے ایک (سیارہ) کی کمیت، دوسرے (سورج) کی کمیت کے مقابلہ میں اس قدر چھوٹی ہے کہ ثانی الذکر میں پیدا شدہ اسراع کو نظرانداز کیا جا سکتا ہے۔

---

[۱] اُس زمانہ میں سورج کے فاصلہ کا بہت گھٹا کر اندازہ لگایا جاتا تھا چنانچہ نیوٹن نے نسبت $\frac{۱}{۱۶۹۲۸۲}$ حاصل کی تھی جو اسی وجہ سے بہت بڑی ہے۔

اِس طرح مرکزی اسراع $\frac{مہ}{ر^2}$ کے تحت ایک ذرہ کی، قوت کے ایک ثابت مرکز کے گرد، حرکت کا مسئلہ حاصل ہوتا ہے جہاں مہ، اکائی فاصلہ پر کے اسراع کو تعبیر کرتا ہے۔

ذرہ صریحاً اُس مستوی میں رہیگا جس میں قوت کا مرکز اور وہ مماس ہے جو کسی دیے ہوئے لمحہ پر مدار کا کھینچا گیا ہے۔ چونکہ اِس مستوی میں آزادی کے دو درجے ہیں اس لیے حرکت کی دو تفرقی مساواتوں کی ضرورت ہے۔ ان کو مختلف طریقوں سے منضبط کیا جا سکتا ہے لیکن سب سے زیادہ آسان تدبیر اُن دو پہلے تکملوں کو لینے میں ہے جو زاوئی معیار حرکت کے اصول اور توانائی کی مساوات سے حاصل ہوتے ہیں۔

اگر ذرہ کی رفتار و ہو اور ع وہ عمود ہو جو قوت کے مرکز سے ذرہ کے راستہ کے مماس پر کھینچا گیا ہے تو دفعہ ۸۴ کی رو سے

$$ع و = ھ \qquad \ldots\ldots (1)$$

جہاں ھ ایک مستقل ہے۔

نیز اگر ذرہ کی کمیت کو کمیت کی اکائی قرار دیا جائے تو دفعہ ۳۴ کی رو سے ۲۲
توانائی بالحرکت $\frac{1}{2} و^2$ اور توانائی بالقوہ $-\frac{مہ}{ر}$ + مستقل ہے۔ پس

$$\frac{1}{2} و^2 = \frac{مہ}{ر} + مستقل \qquad \ldots\ldots (2)$$

(۱) کے ساتھ لینے سے

$$\frac{ھ^2}{ع^2} = \frac{2 مہ}{ر} + ج \qquad \ldots\ldots (3)$$

جو راستہ معلوم کرنے کے لیے پہلے رتبہ کی ایک تفرقی مساوات ہے۔ اِس نمونہ کی کوئی مساوات جو ع اور ر کو مربوط کرتی ہو "مماس قطبی" مساوات کہلاتی ہے۔ اِس سے منحنی پوری طرح معلوم ہو جاتا ہے، صرف مبدا کے گرد منحنی پر جہت کا معلوم کرنا رہ جاتا ہے[1]۔

[1] Inf Calc. Art. 143.

مخصوص شکل (۳) کو ایک مخروطی کی مماس قطبی مساوات کے ساتھ تطبیق کیا جاسکتا ہے جہاں یہ مساوات ماسکہ کو مبداء کے طور پر لینے سے حاصل کی گئی ہو[1]
قطع ناقص کی صورت میں

$$\frac{1}{ا} - \frac{2}{ر} = \frac{ل}{ع^2} \qquad (4)$$

اور زائد کی ایک شاخ کی صورت میں جب کہ اندرونی ماسکہ کو مبداء قرار دیا گیا ہو

$$\frac{1}{ا} + \frac{2}{ر} = \frac{ل}{ع^2} \qquad (5)$$

جہاں ہر صورت میں نیم وتر خاص ل سے اور وہ نیم محور ا سے تعبیر ہوتا ہے جس میں زیر بحث ماسکہ ہے۔ مکافی کی صورت مرور میں $ا = \infty$ اور

$$\frac{2}{ر} = \frac{ل}{ع^2} \qquad (6)$$

(۳) کے ساتھ مقابلہ کرنے پر ہم دیکھتے ہیں کہ مساواتیں مماثل ہیں بشرطیکہ

$$ل = \frac{ھ^2}{مہ} \text{ ، } ا = \mp \frac{مہ}{ج} \qquad (7)$$

اس لیے مدار ناقص یا زائد یا مکافی ہوگا بموجب اس کے کہ (۳) کا مستقل ج منفی یا مثبت یا صفر ہو۔

اب اگر ایک ذرّہ لاتناہی پر ساکن ہو اور وہاں سے گرے تو ابتداً $و = 0$ اور $ر = \infty$ ، اس لیے جب وہ فاصلہ ر پر ہوگا تو اس کی رفتار $\sqrt{\frac{2مہ}{ر}}$ ہوگی بموجب (۲)۔ اِس کو فاصلہ ر کے متناظر "لاتناہی سے رفتار" (۲۲۱)
یا "فاصل رفتار" کہتے ہیں۔ اب (۷) سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ مدار ایک ناقص یا زائد یا مکافی ہوگا بموجب اس کے کہ کسی نقطہ پر کی رفتار، لاتناہی سے رفتار سے کم یا بڑی یا مساوی ہو۔ دوسرے لفظوں میں اگر ذرہ کو کسی محل سے اتنی ناکافی توانائی سے چلایا جائے کہ وہ لاتناہی تک نہ پہنچ سکے تو وہ ایک ناقص

---

[1] Ibid

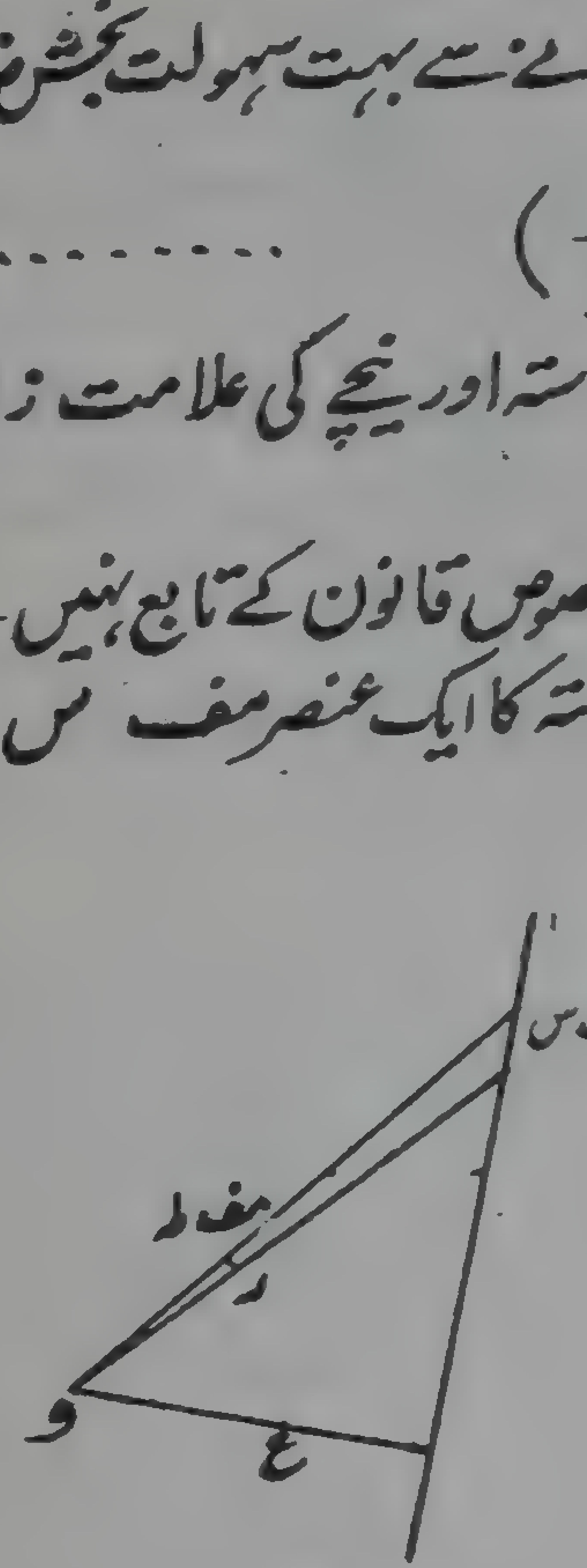
مرتسم کریگا، اگر توانائی کافی سے زیادہ ہو تو وہ زائد کی ایک شاخ مرتسم کریگا اور جیسے جیسے مرکزی قوت کم شدید ہوگی حرکت بالآخر ایک متقارب پر مستقل رفتار کے قریب آتی جائیگی۔ صورت مرور میں ذرّہ ایک مکافی کو ایسی رفتار سے مرتسم کریگا جو بالآخر صفر کی طرف مائل ہوگی۔

(۳) کو (۴) اور (۵) کے ساتھ ملانے سے بہت سہولت بخش ضابطہ

$$\text{و}^2 = \text{مہ}\left(\frac{۲}{\text{ر}} \mp \frac{۱}{\text{ل}}\right) \qquad \text{(۸)}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں اوپر کی علامت ناقصی راستہ اور نیچے کی علامت زائدی راستہ سے متعلق ہے۔

ضابطہ (۱) کی جو (مرکزی) قوت کے مخصوص قانون کے تابع نہیں ہے حسب ذیل اہم تعبیر حاصل کی جا سکتی ہے۔ اگر راستہ کا ایک عنصر مف س ہو تو ع مف س اُس مثلث کے رقبہ کا دوچند ہے جو مف س اور قوت کے مرکز سے اُس کے سروں تک کھینچے ہوئے نصف قطروں سے گھرا ہوا ہے۔ پس اِس مثلث کے رقبہ کو مف ا سے تعبیر کیا جائے تو



شکل ۶۱

$$\text{مف ا} = \tfrac{1}{2}\,\text{ع مف س} = \tfrac{1}{2}\,\text{ع و مف ت}$$

$$= \tfrac{1}{2}\,\text{ھ مف ت}$$

$$\text{یا} \qquad \frac{\text{فرا}}{\text{فرت}} = \tfrac{1}{2}\,\text{ھ} \qquad \text{(۹)}$$

اگر ا وہ رقبہ ہو جس کو سمتی نصف قطر کسی مقررہ لمحہ سے لمحہ ت تک مرتسم کرتا ہے۔ دوسرے لفظوں میں سمتی نصف قطر مساوی وقتوں میں مساوی رقبے مرتسم کرتا ہے اور شرح فی اکائی وقت $\tfrac{1}{2}$ ھ ہے۔ اگر قوت کے مرکز کے حوالے سے قطبی محدد ر، طہ ہوں تو ہم

$$\text{مف ا} = \frac{1}{2}\,\text{ر}^{2}\,\text{مف ط}$$

رکھ سکتے ہیں اور مساوات (۱) شکل

$$\text{ھ} = \text{ر}^{2}\,\frac{\text{فرط}}{\text{فرت}} \qquad \text{(۱۰)}$$

اختیار کرتی ہے۔ اس کی ابھی ضرورت پڑیگی۔

اُس خاصیت سے جو ابھی اوپر ثابت ہو چکی ہے ناقصی مدار میں گردش کے دَور (ت) کے لیے ایک جملہ حاصل ہوتا ہے۔ چونکہ اِس دَور میں سمتی نصف قطر ناقص کا پورا رقبہ عبور کرتا ہے اس لیے

$$\text{ھ ت} = 2\,\pi\,\text{اب} \qquad \text{(۱۱)}$$

جہاں ب صغیر نیم محور ہے۔ نیز (۷) سے

$$\text{ھ} = \sqrt{\text{مہ ل}} = \sqrt{\text{مہ ب}^{2}\,/\,\text{ا}} \qquad \text{(۱۲)}$$

اس لیے

$$\text{ت} = \frac{2\,\pi\,\text{ا}^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\text{مہ}}} \qquad \text{(۱۳)}$$

پس یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ مختلف ناقصی مداروں میں جو ایک ہی مطلق اسراع (مہ) کے تحت مرتسم ہوئے ہوں دَوری مدتوں کے مربع نیم محاور اعظم کے مکعبوں کے متناسب ہوتے ہیں[۱]

---

[۱] ۔ نیم محور اعظم چونکہ سورج سے بڑے سے بڑے فاصلہ اور چھوٹے سے چھوٹے فاصلہ کا حسابی اوسط ہوتا ہے اس لیے اس کو علم ہئیت میں "اوسط فاصلہ" کہتے ہیں۔ اِس کو اُس فاصلہ کے ساتھ خلط ملط نہیں کرنا چاہئے جو وقت کے مساوی صغیر وقفوں پر فاصلوں کا اصلی اوسط لینے سے حاصل ہوتا ہے۔ دیکھو دفعہ ۷۹

اگر ن سے وہ چیز تعبیر ہو جس کو علم ہیئت میں، ناقصی مدار میں "اوسط حرکت" کہتے ہیں یعنے قوت کے مرکز کے گرد سمتی نصف قطر کی اوسط زاویٔ رفتار تو

$$\text{ن}\,\text{ت} = 2\pi \quad \text{......(۱۴)}$$

اور اس لیے

$$\text{ن} = \sqrt{\frac{\text{مہ}}{\text{ا}^{3}}} \quad \text{......(۱۵)}$$

مثال ۱۔ (۱۳) سے ہم وہ وقت معلوم کرسکتے ہیں جو ایک ذرہ، کسی دیے ہوئے فاصلہ ف سے سکون سے چل کر قوت کے مرکز میں گرنے کے لیے لیگا۔

سیدھے راستہ کو لاانتہا چپٹے ناقص کا نصف سمجھا جاسکتا ہے۔ اس لیے ا = $\frac{1}{2}$ ف رکھنے اور ۲ سے تقسیم کرنے پر مطلوبہ وقت

$$\frac{2\pi\,\text{ف}^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\text{مہ}}} \times \frac{1}{4\sqrt{2}}$$

حاصل ہوتا ہے جو دفعہ ۱۶ کے مطابق ہے۔

راستہ کو مرتسم کرنیکا قانون بھی، شکل (۱۱) کے امدادی دائرہ میں مرتسم شدہ رقبوں کی رقوم میں، موجودہ نظریہ سے بآسانی ماخوذ ہوسکتا ہے۔

مثال ۲ ۔ ناقصی مدار میں اوسط توانائی بالحرکت یعنے وقت کے مساوی صغیر (۲۲۳)
وقفوں کے لیے توانائی بالحرکت معلوم کرنا۔

ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\int \text{و}^{2}\,\text{دت} = \int \text{و}\,\text{دس} = \text{ھ}\int \frac{\text{دس}}{\text{ع}} = \frac{\text{ھ}}{\text{ب}^{2}}\int \text{عَ}\,\text{دس} \quad \text{......(۱۶)}$$

جہاں عَ، دوسرے ماسکہ سے مماس پر عمود ہے۔ آخری تکملہ رقبہ کے دوچند کے مساوی ہے جب کہ تکملہ کو ناقص کے گھیرے کے گرد لیا جاتا ہے، اس لیے وہ ھ ت کے مساوی ہے۔ اس لیے (۷) اور (۱۵) کی رو سے

$$\frac{1}{\text{ت}}\int \text{و}^{2}\,\text{دت} = \frac{\text{ھ}^{2}}{\text{ب}^{2}} = \frac{\text{مہ}}{\text{ا}} = \text{ن}^{2}\,\text{ا}^{2} \quad \text{......(۱۷)}$$

اس لیے اوسط توانائی بالحرکت وہی ہے جو ایک ایسے ذرّہ کی ہوتی ہے جو ایک دائرہ میں جس کا نصف قطر اوسط فاصلہ ا کے مساوی ہو اوسط زاویٔی رفتار ن سے گردش کر رہا ہو۔

۷۷۔ مدار بنانا۔

ایک ایسے ذرّہ کا مدار جو ایک دیے ہوئے نقطہ ف سے ایک دی ہوئی رفتار کے ساتھ ایک دی ہوئی سمت میں متحرک کیا گیا ہو حسب ذیل طریقہ پر بنایا جا سکتا ہے۔

اول فرض کرو کہ پھینکنے کی رفتار فاصل رفتار سے کم ہے۔ ضابطہ

$$و^2 = مہ\left(\frac{2}{ر} - \frac{1}{ا}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

سے محور اعظم کا طول متعین ہوتا ہے کیونکہ مہ، ر، اور و دیے گئے ہیں۔ اگر ایک ایسا دائرہ مرتسم کیا جائے جس کا مرکز قوت کا مرکز (س) اور جس کا نصف قطر ۲ ا ہو تو ایک ذرّہ جو اس دائرہ پر کہیں ساکن ہو وہی توانائی رکھیگا جو دیے ہوئے ذرّہ کی ہے اگر اُس کی کمیت وہی ہو۔ ہم اِس دائرہ کو "صفر رفتار کا دائرہ" کہینگے۔ یہ اُس مشترک مرتب کے متناظر ہے جو شکلوں ۲۴، ۲۵ (دفعہ ۲۷) میں مرتسم شدہ مکانی راستوں کے ہیں۔

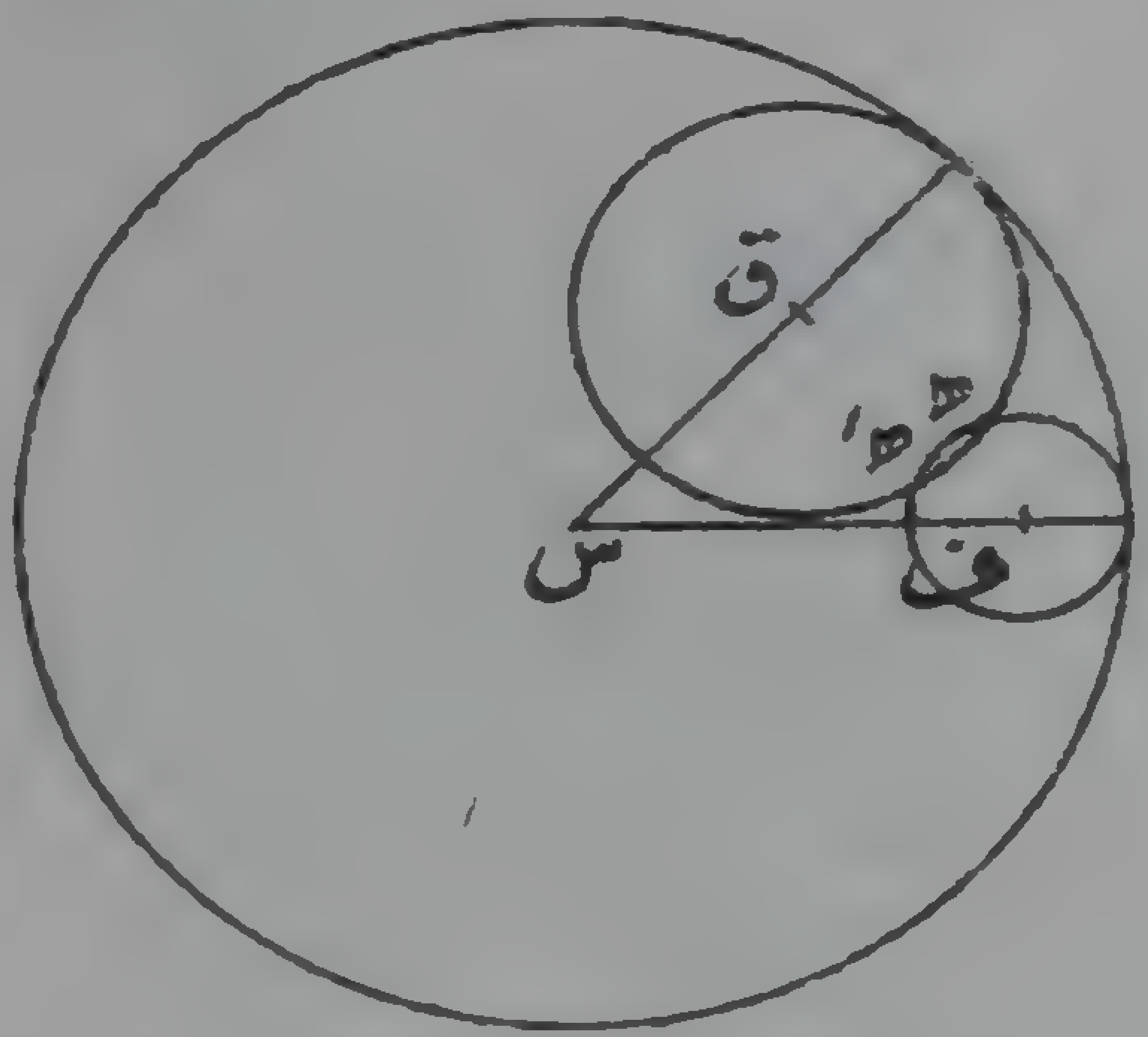
اگر دوسرا ماسکہ ھ ہو تو فاصلہ ف ھ ضابطہ

$$ف ھ = 2ا - س ف \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

سے حاصل ہوتا ہے۔ اس لیے ھ کو ایک دائرہ پر واقع ہونا چاہیے جس کا مرکز ف ہے اور جو صفر رفتار کے دائرہ کو مس کرتا ہے۔ ف ھ کی سمت اِس واقعہ سے متعین ہوتی ہے کہ ف پر راستہ کا دیا ہوا مماس، ف کے دو ماسکی فاصلوں کے ساتھ مساوی طور پر مائل ہونا چاہیے۔

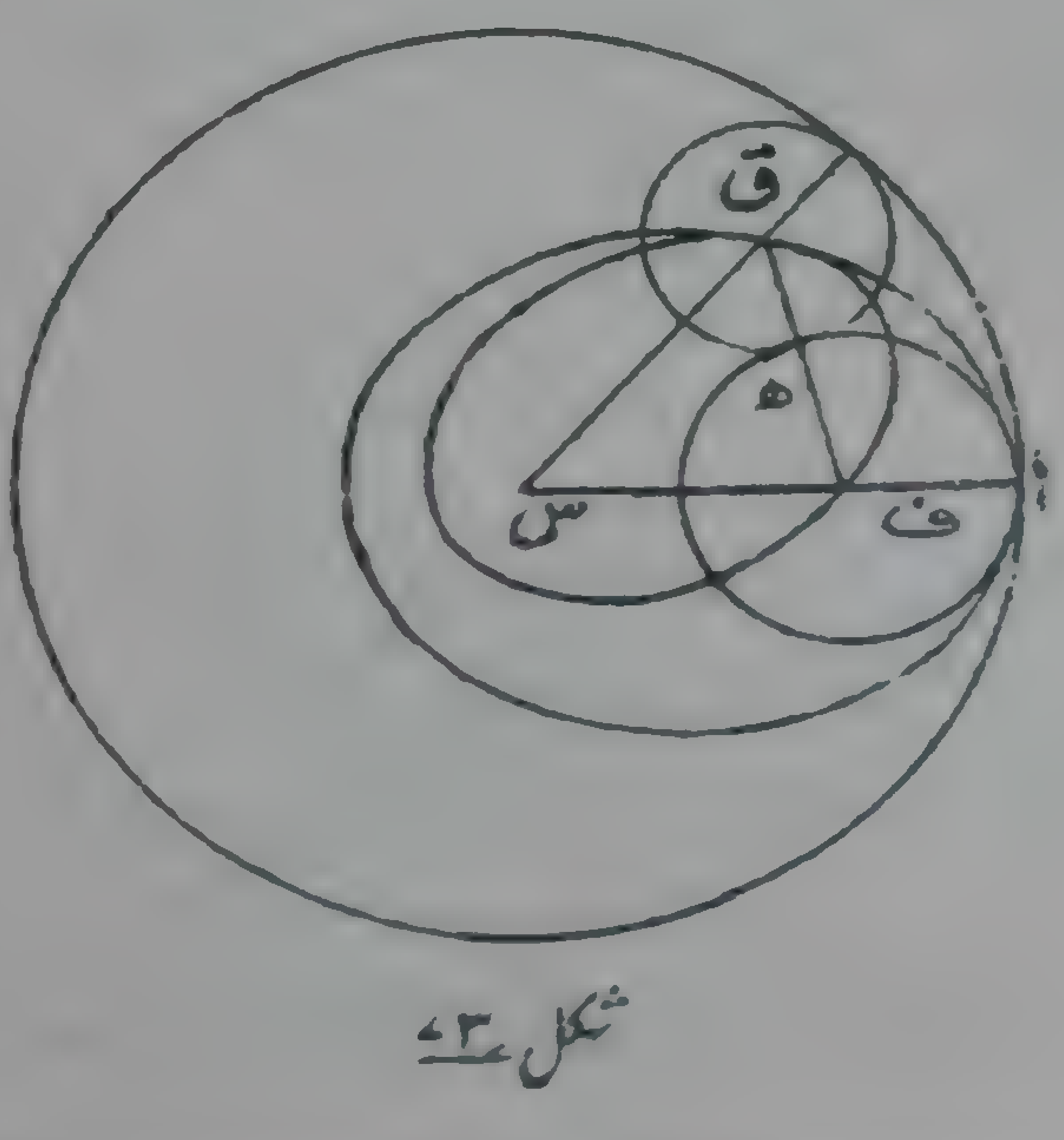
پھر فرض کرو کہ وہ سمت معلوم کرنا مطلوب ہے جس میں ایک ذرّہ کو

(۲۲۴ ف سے ایک دی ہوئی رفتار کے ساتھ پھینکنا چاہیے تاکہ وہ ایک دوسرے دیے ہوئے نقطہ ق میں سے گزرے۔ دوسرا اسکہ ایک ایسے دائرہ پر ہونا چاہیے جس کا مرکز ق ہو اور جو صفر رفتار کے دائرہ کو مس کرے۔ اگر یہ دائرہ اُس



شکل ۴۲

دائرہ کو جس کا مرکز ف ہے قطع کرے تو مطلوبہ نقطے کے دو محل ھ، ھَ ہیں اور



شکل ۴۳

پھینکنے کی متناظر سمتیں، اُن زاویوں کی تنصیف کرینگی جو علی الترتیب س ف ھ اور س ف ھ کے متمم ہیں۔ اگر دائرے متقاطع نہ ہوں تو مسئلہ ناممکن ہے۔ (۲۲۵)
اُس انتہائی صورت میں جہاں دائرے مس کرتے ہیں (شکل ۳ ب) نقطہ ق، ف سے عین زد میں ہوگا۔ صریحاً یہ نقطہ، نقطہ ف سے مقررہ رفتار کے ساتھ پھینکے ہوئے ذرّوں کے متصلہ راستوں کا ایک انتہائی نقطہ تقاطع ہے۔ تب

س ق + ق ف = س ق + ق ھ + ھ ف

= س ا + ا ف ....(۳)

اور اس لیے راستوں کا لفاف ایک ناقص ہے جس کے ماسکے س اور ف ہیں اور جو صفر رفتار کے دائرہ کو اس نقطہ پر مس کرتا ہے جو ف سے قریب ترین ہے۔

اگر ف سے پھینکنے کی رفتار، لاتناہی سے رفتار سے بڑی ہو تو ضابطہ (۱) کی بجائے ضابطہ

و² = مہ (۲/ر + ۱/ا) ....(۴)

حاصل ہوتا ہے جس سے حقیقی صدر محور کا طول ۲ ا معلوم ہوتا ہے۔ اب (۲) کی بجائے

ھ ف = س ف + ۲ ا ....(۵)

ہے۔ یہ اور ف پر کے مماس کی سمت باہم مدار کو متعین کرتی ہیں کیونکہ دیے ہوئے مماس کو اس زاویہ کی تنصیف کرنی چاہیئے جو ماسکی فاصلوں کے درمیان ہے۔

اگر مدار کو ایک دوسرے دیے ہوئے نقطہ ق میں سے گزرنا ہے تو ہم ف اور ق کے گرد علی الترتیب نصف قطر س ف + ۲ ا اور س ق + ۲ ا کے دائرے کھینچتے ہیں۔ یہ آسانی سے معلوم ہوسکتا ہے کہ یہ دو دائرے ہمیشہ متقاطع ہونگے اور دوسرے ماسکہ کے دو حقیقی محل حاصل ہونگے۔ مستوی کے تمام نقطے اب فی الواقع ف سے زد میں ہیں اور اسی لیے ف سے دی ہوئی رفتار کے ساتھ پھینکے ہوئے ذرّوں کے راستوں کا کوئی حقیقی لفاف نہیں ہے۔ پچھلی صورت کے

لفاف کے تناظر ہندسی طور پر جو چیز حاصل ہوتی ہے وہ ایک ناقص ہے جو زائدوں کی بیرونی شاخوں سے مس ہوتا ہے، لیکن اس کی کوئی حرکیاتی اہمیت نہیں ہے۔

اس صورت میں جہاں پھینکنے کی رفتار لاتناہی سے رفتار کے مساوی ہو محور کی سمت اور ماسکی فاصلہ س ف، ف پر کے مماس کے ساتھ مساوی زاویے بناتے ہیں۔ وہ ناقصی مدار جو دو مقررہ نقطوں ف، ق میں گزرتا ہے سب سے زیادہ آسانی سے اس طرح معلوم ہوتا ہے کہ ف اور ق کے گرد ان کو مرکز مانکر س میں سے گزرتے ہوئے دائرے کھینچے جائیں۔ ان دائروں کے دو مشترک مماس، دو ممکن راستوں کی سمتیں ہونگی۔

مثال - مرمیوں کے نظریہ میں اگر ارتفاع کے ساتھ جاذبہ کے تغیر کا لحاظ رکھا جائے تو فضا میں ذرہ کا راستہ زمین کے مرکز کے لحاظ سے ایک مخروطی ہوگا جس کا ایک ماسکہ یہ نقطہ ہوگا۔ پھینکنے کی معمولی رفتاروں کے لحاظ سے یہ نقطہ دور کا ماسکہ ہوگا اور خروج المرکز اکائی سے بہت ہی قریب ہوگا۔ (۲۲۶)

مثلاً ایک ذرہ کی صورت میں جس کو خط استواء کے ایک مقام پر ارتفاع ک سے ظاہری سکون سے آزاد کیا گیا ہو ابتدائی افقی رفتار سہ (ق + ک) ہوگی جہاں ق، زمین کا استوائی نصف قطر ہے اور سہ، گردش کی زاویائی رفتار ہے۔ اس لیے

$$ھ = (ق + ک)^{۲} سہ \qquad \text{.........(۶)}$$

اگر مخروط کی مساوات

$$\frac{ل}{ر} = ۱ - ز جم ط \qquad \text{.........(۷)}$$

فرض کی گئی ہو تو ط = ۰ رکھنے سے

$$ل = (۱ - ز)(ق + ک) \qquad \text{.........(۸)}$$

اس لیے زمین کے مرکز کے گرد زاویہ عہ مرتسم کرنیکا وقت حسب (۶)، (۷) اور (۸)

$$ت = \frac{1}{ھ}\int_{0}^{عہ} ر^{2}\, فرطہ = \frac{1}{سہ}\int_{0}^{عہ}\left(\frac{1-ز}{1-ز\, جم\, طہ}\right)^{2} فرطہ$$

ہے۔ اِس کو

$$سہ\, ت = \int_{0}^{عہ} \frac{فرطہ}{\left(1+\frac{2ز}{1-ز}\, جب^{2}\, \frac{1}{2}\, طہ\right)^{2}} \qquad \ldots\ldots (۹)$$

لکھا جا سکتا ہے۔ اگر عہ وہ زاویہ ہو جو ذرّہ کے زمین تک پہنچنے میں مرتسم ہوتا ہے تو (۷) میں طہ = عہ، ر = ق رکھنے اور (۸) کے حوالے سے

$$\frac{ق+ک}{ق} = \frac{1-ز\, جم\, عہ}{1-ز}$$

یا

$$\frac{ک}{ق} = \frac{2ز}{1-ز}\, جب^{2}\, \frac{1}{2}\, عہ \qquad \ldots\ldots (۱۰)$$

اب چونکہ $\frac{ک}{ق}$ بالعموم ایک بہت ہی چھوٹی کسر ہوتی ہے اس لیے (۹) کو لکھا جا سکتا ہے

$$سہ\, ت = \int_{0}^{عہ}\left(1+\frac{ک}{ق}\,\frac{طہ^{2}}{عہ^{2}}\right)^{-2} فرطہ = عہ\left(1-\frac{2}{3}\,\frac{ک}{ق}\right)$$

تقریباً ....(۱۱)

یا

$$عہ = سہ\, ت\left(1+\frac{2}{3}\,\frac{ک}{ق}\right) \qquad \ldots\ldots (۱۲)$$

چونکہ سہ ت وہ زاویہ ہے جس میں سے زمین، ذرّہ کے اُتار کے دَوران میں گھوم چکی ہے اس لیے زمین کے اُس نقطہ سے جو اِنتصاباً ذرّہ کے ابتدائی نقطے کے نیچے ہے مقدار

$$ق\,(عہ - سہ\, ت) = \frac{2}{3}\, ک\, سہ\, ت \qquad \ldots\ldots (۱۳)$$

کا مشرقی انحراف ہوگا۔ چونکہ $ک = \frac{1}{2}\, ج\, ت^{2}$ تقریباً اس لیے اس کو $\frac{1}{3}\, سہ\, ج\, ت^{3}$ لکھا جا سکتا ہے[1]

---

[1] میں اس حل کے لیے ڈاکٹر بردموچ کا ممنون ہوں۔

مثالاً اگر ت = ۵ ثانیہ جو ۴۰۰ فٹ گرنے کے تناظر ہے تو

$\frac{۲}{۳}$ س ت × $\frac{۱}{۲}$ ج ت^۲ = ۱۳۳۳ س = ۰۹۷ء۰ فٹ

راستہ کا خروج المرکز ز' (۶) اور (۸) کا مقابلہ ضابطہ

(۱۴) .... ھ^۲ = م ل = جَ قَ^{۲} ل

کے ساتھ کرنے سے معلوم ہوتا ہے جہاں جَ' زمین کی سطح پر اصلی (ظاہری نہیں) جاذبہ کی قیمت ہے۔ ہمیں معلوم ہوتا ہے کہ

(۱۵) .... ۱ - ز = $\frac{س^۲ ق}{جَ}$ $\left(۱ + \frac{ک}{ق}\right)^۲$

اگر $\frac{ک}{ق}$ کو نظر انداز کیا جائے تو

ز = ۱ - $\frac{۱}{۲۸۹}$ = ۹۹۶۵ء تقریباً

۷۸ ۔ رسم الطریق Hodograph (۲۲۷

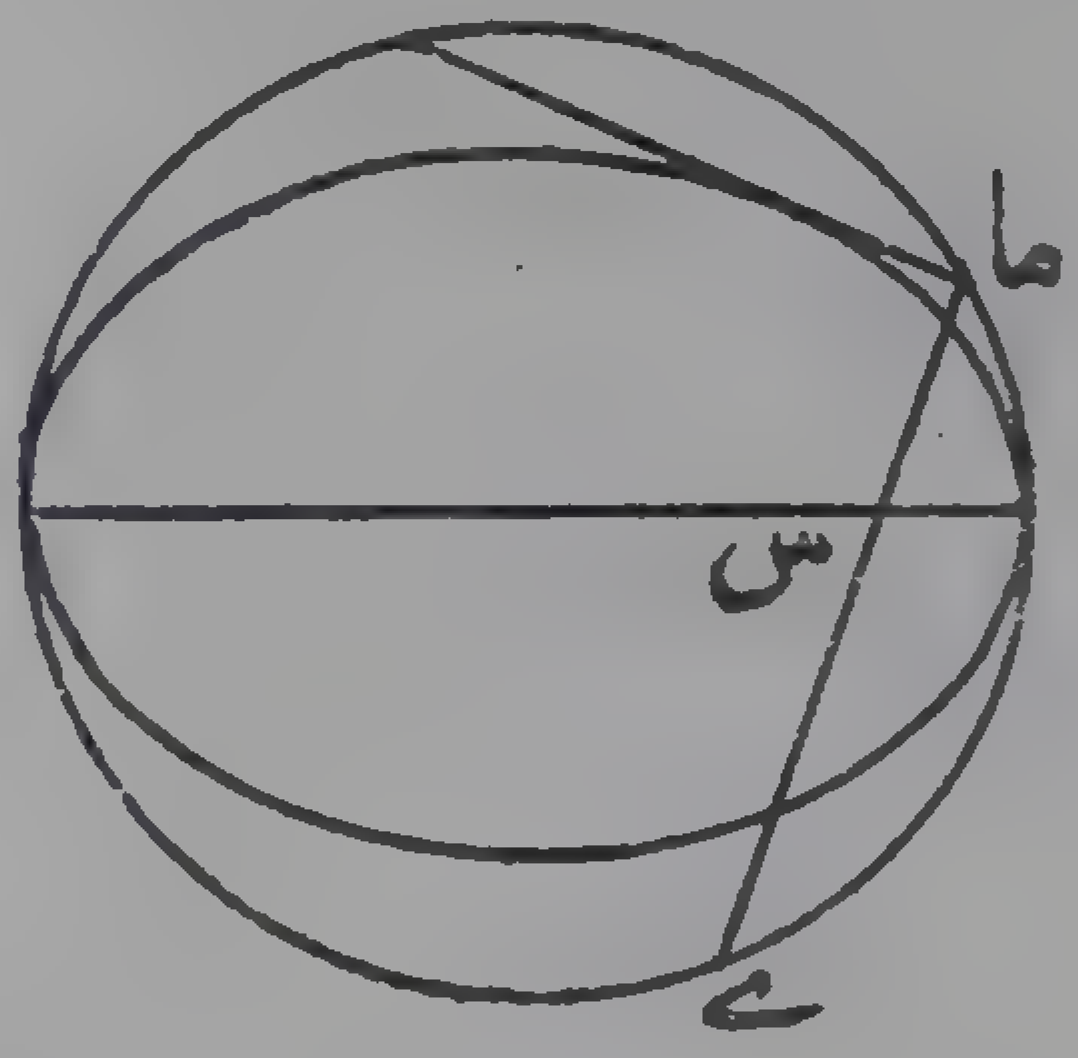
دفعہ ۷۶ کے ضابطہ (۱) سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ مدار کے کسی نقطہ ف پر رفتار

(۱) .... و = $\frac{ھ}{س ما}$

ہے جہاں قوت کے مرکز س سے ف پر کے مماس پر عمود س ما ہے۔ ناقص یا زائد کی صورت میں ما کا طریق "امدادی دائرہ" ہے اور اگر ما س کو خارج کیا جائے تاکہ وہ اِس دائرہ سے مکرر سے پر ملے تو

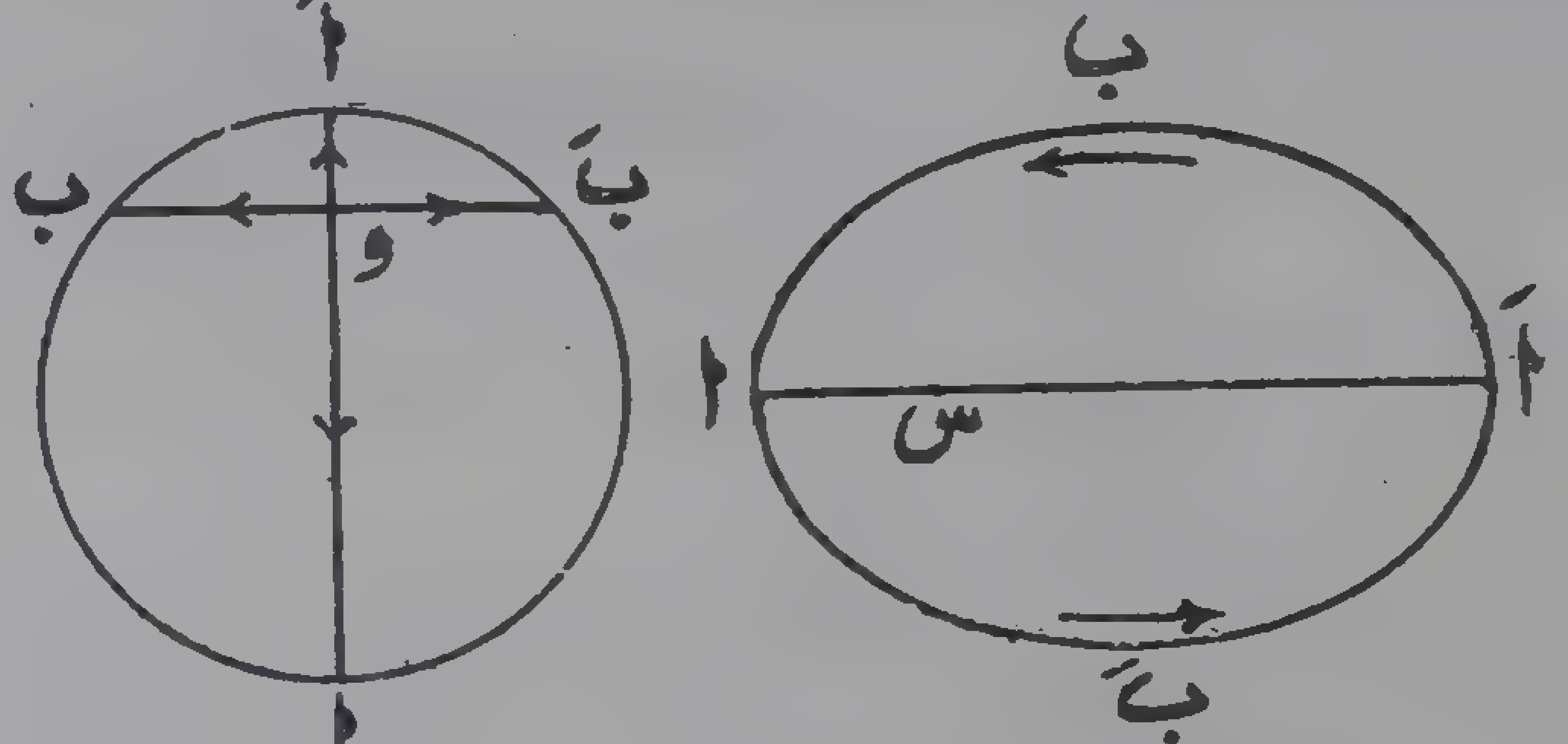
(۲) ... و = $\frac{ھ}{س ما × س مے}$ × س مے = $\frac{ھ}{ب^۲}$ × س مے

چونکہ اِس رفتار کی سمت، س مے کے
علی القوائم ہے اس لیے یہ معلوم ہوتا ہے کہ
امدادی دائرہ ایک خاص پیمانہ پر ایک
قائمہ زاویہ میں سے گھمایا ہوا متحرک
ذرّہ کا رسم الطریق ہے جہاں ماسکہ س
قطب ہے۔

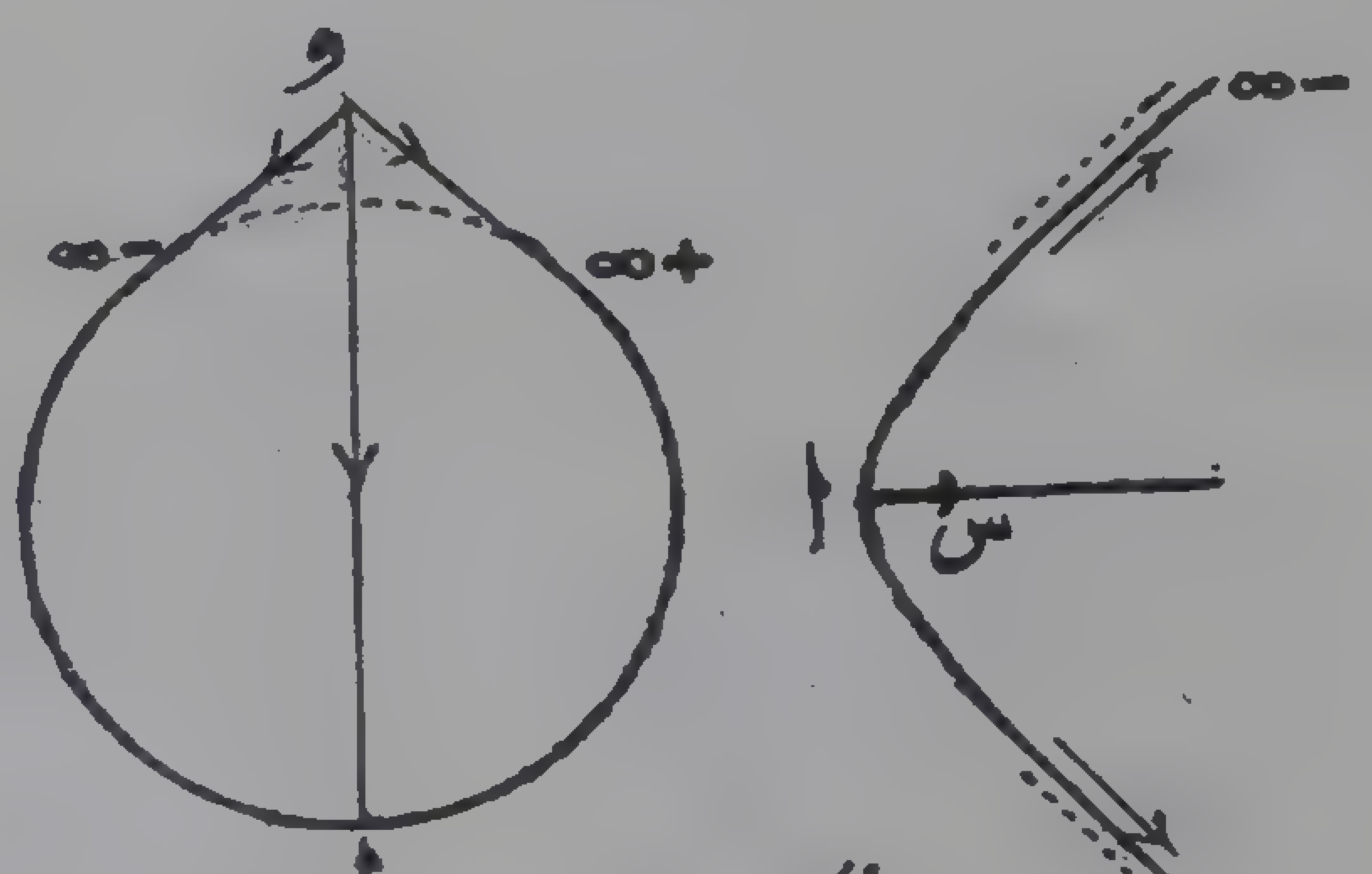


شکل ۷۴

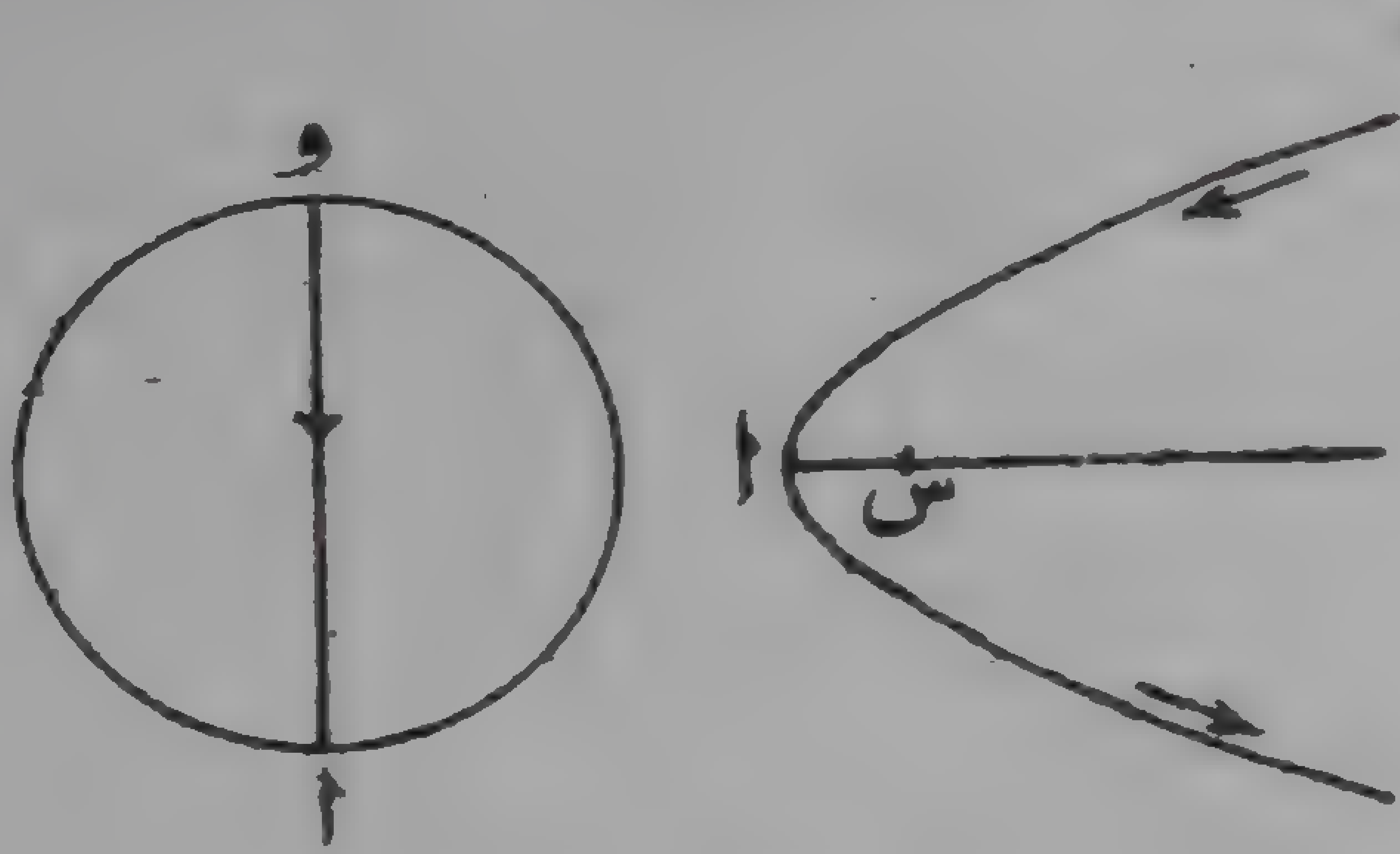
مکانی کی صورت میں ما کا طریق
راس پر کا مماس ہے اور اس لیے رسم الطریق
اِس خطِ مستقیم کا مقلوب ہوگا جب کہ ایک قائمہ زاویہ میں سے گھمایا جا چکا ہو۔ دوسرے
لفظوں میں وہ س میں سے گزرنے والا ایک دائرہ ہے۔ حسب ذیل شکلوں میں
مختلف صورتوں کے متناظر رسم الطریق دکھائے گئے ہیں جن کو مداروں سے اصلی
جہت کے ساتھ کھینچا گیا ہے۔



شکل ۷۵



شکل ۷۶

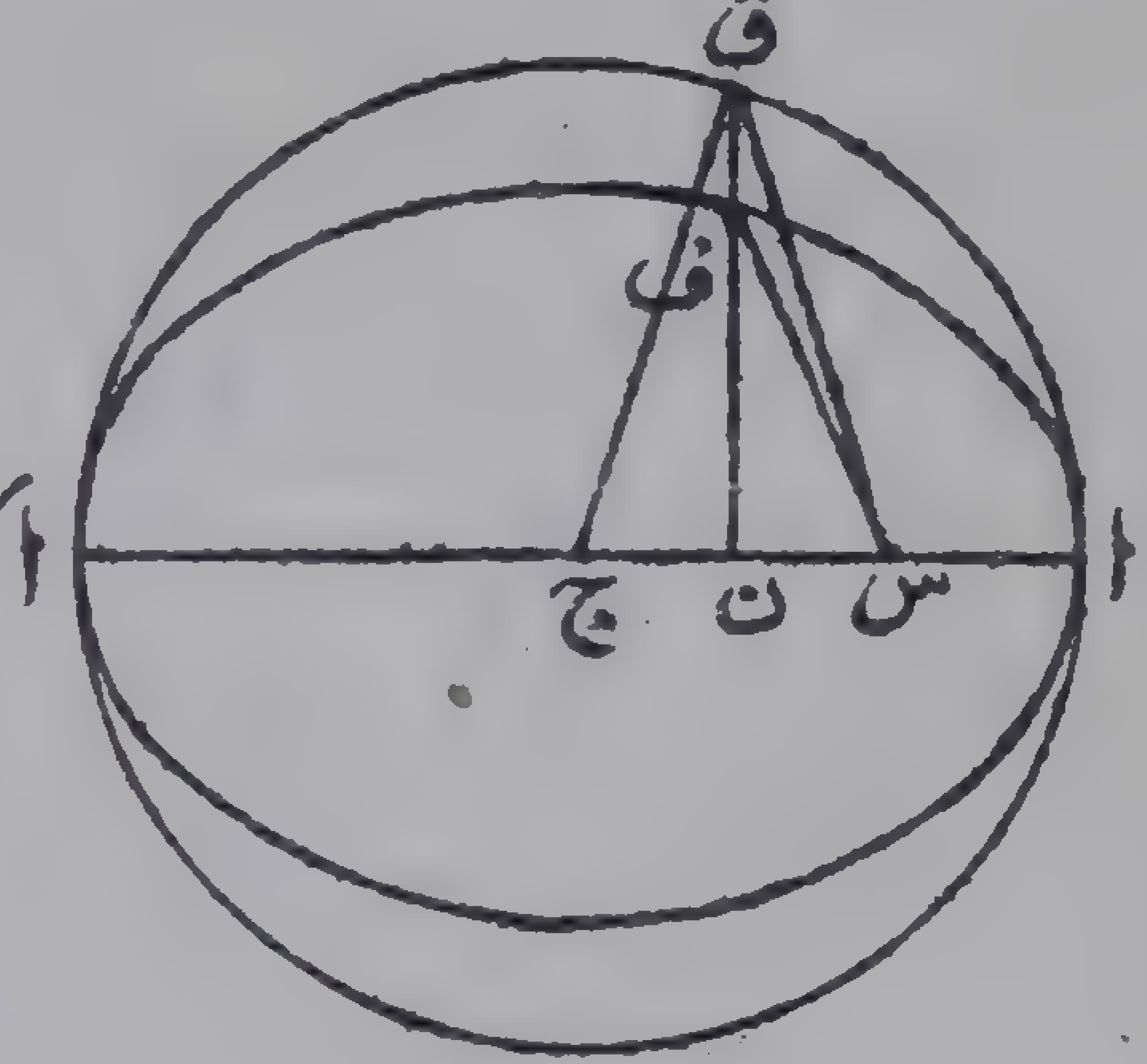


شکل ۷۷

۷۹ - ناقصی حرکت کے لیے ضابطے -

حرکت کی مساواتوں کو صرف اس حد تک مکمل کیا جا چکا ہے کہ مدار کی شکل اور اُس میں رفتار کے تغیر کا قانون معلوم ہو جائے - کامل حل کے لیے کسی دیے ہوے وقت پر مدار میں محل کو معلوم کرنے کی ضرورت ہے -

ہم صرف ناقصی مدار کی صورت پر غور کرینگے کیونکہ وہ علم ہیئت کے نقطہ نظر سے سب سے زیادہ اہم ہے - وہ نقطے جہاں سمتی نصف قطر مدار سے علی القوائم ملتا ہے یعنے محور اعظم کے سرے "اوجین" کہلاتے ہیں اور ان کے ملانے والے خط کو "خط اوجین" کہتے ہیں - سورج کے گرد زمین کے مدار کی صورت میں اِن دو اوجوں میں تمیز "حضیض" اور "اوج" سے کی جاتی ہے لیکن جب زمین کے لحاظ سے سورج کے مدار پر غور کیا جاتا ہے تو وہ علی الترتیب "بعید ارضی" اور "قریب ارضی" کہلاتے ہیں - زاویہ ف س ا جو سمتی نصف قطر اُس خط کے ساتھ بناتا ہے جو قریب تر اوج تک کھینچا گیا ہے "اصلی بے قاعدگی" کہلاتا ہے - اگر امدادی دائرہ پر ق وہ نقطہ ہو جو ف کے (۲۲۹ متناظر ہے تو ف کا خارج المرکز زاویہ یعنے زاویہ ق ج ا جہاں ج ہندسی مرکز ہے "خارج المرکز بے قاعدگی" کہلاتا ہے -



شکل

اگر ہم اصلی بے قاعدگی کو طہ سے اور خارج المرکز زاویہ کو فہ سے تعبیر کریں تو
علم ہندسہ تحلیلی کے مشہور ضابطوں سے

ل / ر = ۱ + ز جم طہ ....(۱)

جہاں ز، ناقص کا خروج المرکز ہے، اور

ر = س ف = اِ - ز × ج ن = اِ (۱ - ز جم فہ) ....(۲)

نیز اگر ا سے ف تک وقت ت ہو اور س کے گرد اوسط زاوئی رفتار
کو حسب دفعہ ۷۶، ن سے تعبیر کیا جائے تو

ن ت / ۲ π = رقبہ ا س ف / ناقص کا رقبہ = رقبہ ا س ق / دائرہ کا رقبہ

= قطاع ا ج ق - مثلث س ج ق / دائرہ کا رقبہ = (½ اِ² فہ - ½ اِ × اِ ز جب فہ) / π اِ²

یا

ن ت = فہ - ز جب فہ ....(۳)

اِن ضابطوں سے ہم وہ وقت معلوم کر سکتے ہیں جو اوج سے کسی دیے ہوئے محل تک گزرنے میں لگتا ہے۔ اس طرح (۱) سے ر، طہ کی رقوم میں معلوم ہوتا ہے، تب زاویہ فہ کو (۲) سے اور ت کو (۳) سے معلوم کیا جا سکتا ہے۔ لیکن علم ہیئت میں اس کا عکس مسئلہ پیش ہوتا ہے جو دلچسپ ہے یعنے یہ کہ ت کی کسی دی ہوئی قیمت کے متناظر طہ کی قیمت معلوم کرنا۔ یہ کیپلر کے مسئلہ کے نام سے موسوم ہے اور بہت سی ریاضیاتی تحقیقاتوں کا موجب ہے۔ عمل میں (۲
اس میں اس واقعہ سے سادگی پیدا ہوتی ہے کہ خروج المرکز ز سیاروی مداروں کی صورت میں ہمیشہ ایک بہت چھوٹی مقدار ہے۔ اگر ز کی صرف چند پہلی قوتیں مطلوب ہوں تو متواتر تقرب کا طریقہ حسب تفصیل ذیل استعمال کیا جا سکتا ہے:

دفعہ ۷۶ (۱۰) کی رو سے

$$\frac{\text{فرت}}{\text{فرطہ}} = \frac{\text{ر}^2}{\text{ھ}} = \frac{\text{ل}^2}{\text{ھ}}\left(\text{۱} + \text{زجم طہ}\right)^{-2} = \frac{\text{ل}^{\frac{3}{2}}}{\text{مہ}^{\frac{1}{2}}}\left(\text{۱} + \text{زجم طہ}\right)^{-2}$$

$$= \frac{\text{ا}^{\frac{3}{2}}}{\text{مہ}^{\frac{1}{2}}}\left(\text{۱} - \text{ز}^2\right)^{\frac{3}{2}}\left(\text{۱} + \text{زجم طہ}\right)^{-2} \qquad \text{(۴)}$$

اس لیے دفعہ ۷۶ (۱۵) سے ن کی قیمت لے کر داخل کرنے سے

$$\frac{\text{ن فرت}}{\text{فرطہ}} = \left(\text{۱} - \text{ز}^2\right)^{\frac{3}{2}}\left(\text{۱} + \text{زجم طہ}\right)^{-2}$$

$$= \left(\text{۱} - \frac{3}{2}\text{ز}^2 + \cdots\right)\left(\text{۱} - \text{۲ زجم طہ} + \text{۳ ز}^2\text{جم}^2\text{طہ} - \cdots\right)$$

$$= \text{۱} - \text{۲ زجم طہ} + \frac{3}{2}\text{ز}^2\text{جم ۲ طہ} - \cdots \qquad \text{(۵)}$$

تکمل کرنے سے

$$\text{ن ت} = \text{طہ} - \text{۲ زجب طہ} + \frac{3}{4}\text{ز}^2\text{جب ۲ طہ} - \cdots \qquad \text{(۶)}$$

اس میں کسی مستقل کے جمع کرنے کی ضرورت نہیں کیونکہ بموجب فرض طہ کے ساتھ ت معدوم

ہوتا ہے۔

اس سلسلہ کو اُلٹانے کے لیے ہم اس کو شکل

طہ = ن ت + ۲ ز جب طہ − ۳/۴ ز۲ جب ۲ طہ + ... (۷)

میں لکھتے ہیں۔ پہلا تقرب

طہ = ن ت .... (۸)

ہے۔ دوسرے تقرب کے لیے ہم طہ کی اس قیمت کو (۷) کی بائیں جانب دوسری رقم میں درج کرتے ہیں، اس طرح جو خطاء پیدا ہوگی وہ رتبہ ز۲ کی ہوگی۔ چنانچہ

طہ = ن ت + ۲ ز جب ن ت ...... (۹)

تیسرے تقرب کے لیے ہم طہ کی اس قیمت کو دوسری رقم میں استعمال کرتے ہیں اور تیسری رقم میں طہ = ن ت رکھتے ہیں، اس طرح خطائیں صرف رتبہ ز۳ کی ہونگی۔ چنانچہ

طہ = ن ت + ۲ ز جب (ن ت + ۲ ز جب ن ت) − ۳/۴ ز۲ جب ۲ ن ت

= ن ت + ۲ ز (جب ن ت + ۲ ز جب ن ت جم ن ت)

− ۳/۴ ز۲ جب ۲ ن ت

= ن ت + ۲ ز جب ن ت + ۵/۴ ز۲ جب ۲ ن ت ..... (۱۰)

ر کے لیے متناظر جملہ معلوم کرنے کے لیے (۳) سے حاصل ہوتا ہے (۲۳۱)

فہ = ن ت + ز جب فہ = ن ت + ز جب ن ت ..... (۱۱)

تقریباً اس لیے

ر/ا = ۱ - ز جم فہ = ۱ - ز جم (ن ت + ز جب ن ت)

= ۱ - ز (جم ن ت - ز جب ن ت × جب ن ت)

= ۱ - ز جم ن ت + ۱/۲ ز² (۱ - جم ۲ ن ت) ....(۱۲)

اس لیے وقت کے مساوی صغیر وقفوں پر ر کی قیمتوں کا اوسط تقرب کے موجودہ درجہ تک

ا (۱ + ۱/۲ ز²)

ہے۔

مقدار ن ت کو جو اوپر کے ضابطوں میں استعمال ہوئی ہے "اوسط بے قاعدگی" کہتے ہیں۔ اِس سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ گردش کی ایک مستقل شرح فرض کی جائے تو اوج سے سیارہ کا زاوئی فاصلہ کیا ہوگا۔ اصلی اور اوسط بے قاعدگیوں کے درمیان فرق طہ - ن ت ہے، اس کو مرکز کی مساوات کہتے ہیں۔

یہ مشاہدہ طلب ہے کہ ضابطہ (۹) جس میں ز کے مربع کو نظرانداز کیا گیا ہے صحت کے اُسی درجہ تک درست رہیگا اگر ہم یہ خیال کریں کہ ذرّہ مستقل رفتار سے ایک دائرہ مرتسم کرتا ہے جہاں س ایک خارج المرکز نقطہ پر ہے اور مرکز سے س کا فاصلہ ۲ ا ز ہے اگر ا نصف قطر ہولے لیکن سمتی نصف قطر کے تغیرات (۱۲) کے مطابق نہیں ہوں گے۔ اس سے بہتر تعبیر اِس طرح حاصل ہوتی ہے کہ ہم خیال کریں کہ ایک دائرہ ایک نقطہ ھ کے گرد جو اُسی قطر پر ہے جس پر س ہے مستقل زاوئی رفتار (ن) سے مرتسم ہوتا ہے اور اس طرح س ج = ج ھ = ا ز جہاں ج مرکز ہے۔

لہ چاند کی حرکت کو تعبیر کرنیکا یہ طریقہ Hipparchus کا مجوزہ ہے (سنہ ۱۲۰ ق۔م)۔ مدار جو اس طریقہ سے مرتسم شدہ سمجھا گیا ہو "خارج المرکز" کہلاتا تھا۔

اصلی مدار فی الواقع ایک دائرہ سے رتبہ $ز^2$ کی چھوٹی مقداروں سے مختلف ہوتا ہے کیونکہ $ب^2 = ا^2 (۱ - ز^2)$ ۔ اس کے علاوہ اگر طہ وہ زاویہ ہو جو سمتی نصف قطر ھ ف جس کو خالی ماسکہ سے کھینچا گیا ہے محور اعظم کے ساتھ بناتا ہے تو آسانی سے (۶) یہ معلوم ہوتا ہے کہ

طَہ = طہ - ۲ ز جیب طہ = ن ت .... تقریباً (۱۳)

۸۰ ۔ کیپلر کے تین کُلیے ۔

نیوٹن کے قانون تجاذب کی اشاعت سے تقریباً ساٹھ سال پیشتر کیپلر[1] نے سیاروی حرکت کے اپنے تین مشہور کلیوں کا دعویٰ پیش کیا ۔ یہ کلیے کسی قسم کے نظریہ پر مبنی نہ تھے لیکن ان کا مقصد صرف مشاہدے کے واقعات کو خلاصہ کے طور پر پیش کرنا تھا ۔

(۲۳۲) ہم اِن کُلیوں کو ترتیب وار لینگے اور اُس شہادت کا اختصاراً ذکر کرینگے جس پر وہ منحصر ہیں ۔

۱ ۔ سیارے سورج کے گِرد ناقص مرتسم کرتے ہیں جن کے ایک ماسکہ پر سورج ہوتا ہے ۔

مدار کی شکل سب سے زیادہ آسانی سے زمین کی صورت میں حاصل ہوتی ہے کیونکہ سورج سے زمین کا متغیر فاصلہ سورج کے ظاہری قطر میں تبدیلیوں سے ظاہر ہوتا ہے ۔ ماسکہ کے حوالے سے ایک مخروطی کی قطبی مساوات

$$\frac{ل}{ر} = ۱ + ز جم طہ \quad .... (۱)$$

ہے ۔ اس لیے سورج کا ظاہری قطر د، جو فاصلہ ر کے بالعکس متناسب ہے، ۱ + ز جم طہ کے متناسب ہونا چاہیے جہاں طَہ مدار میں طول بلد ہے جس کو

---

[1] جان کیپلر (۱۵۷۱ء تا ۱۶۳۰ء) ۔ پہلے دو کلیے ۱۶۰۹ء میں اور تیسرا ۱۶۱۹ء میں شائع کیے گئے ۔

قریب تراوج سے پیمائش کیا گیا ہے ۔ اس کے بالعکس اگر یہ معلوم ہو کہ اس قسم کا رشتہ صادق آتا ہے تو مدار کو ایک مخروطی ہونا چاہیے جس کے ایک ماسکہ پر سورج ہو۔

خروج المرکز ز کو آسانی سے حاصل کیا جا سکتا ہے ۔ اگر طہ = ۰ اور طہ = π کے متناظر ظاہری قطر کی بڑی سے بڑی اور چھوٹی سے چھوٹی قیمتیں علی الترتیب د۱، د۲ ہوں تو

$$\frac{د_۱}{د_۲} = \frac{۱+ز}{۱-ز} \quad \text{یا} \quad ز = \frac{د_۱ - د_۲}{د_۱ + د_۲} \quad \ldots\ldots\ldots (۲)$$

اب د۱ = ۳۲َ ۳۶ً اور د۲ = ۳۱َ ۲۲ً لینے سے ز = $\frac{۱}{۶۰}$ ۔

یہی قانون مریخ کی صورت میں بھی درست معلوم ہوا ۔ اس مثال میں بہت دقیق اعمال حساب کی ضرورت ہوتی ہے لیکن مریخ کے مدار کا کبیر تر خروج المرکز (۰.۰۹۳) جانچ کو زیادہ سخت بناتا ہے ۔

۲ ۔ وہ سمتی نصف قطر جو سورج سے سیارہ تک کھینچا جائے مساوی وقتوں میں مساوی رقبے مرتسم کرتا ہے ۔

یہاں بھی تصدیق زمین کی صورت میں آسان ترین ہے ۔ اگر ایک مفروضہ چھوٹے وقت یعنے ایک دن میں طول بلد کی تبدیلی مف طہ ہو تو حاصل ضرب ر۲ مف طہ کی قیمت سال کے تمام اوقات پر وہی ہونی چاہیے اس لیے مف طہ کو د۲ کے متناسب ہونا چاہیے ۔ یہ درست معلوم ہوا ہے ۔

۳ ۔ مختلف سیاروں کی دوری مدتوں کے مربع سورج سے متعلقہ اوسط فاصلوں کے مکعبوں کے متناسب ہوتے ہیں ۔

مشاہدے سے گردش کے دور آسانی سے بڑی صحت کے ساتھ معلوم ہوتے ہیں ۔ اضافی فاصلے بھی متعین ہو سکتے ہیں ۔ حسب ذیل جدول میں جس کو نیوٹن[۱] نے بنایا تھا سیاروں کے دور (اس وقت معلومہ) اور سورج سے اوسط

---

[۱] Principia, lib III,

فاصلے جن کو کیپلر اور بلیا لاس[1] (Bullialdus) نے علی الترتیب معلوم کیا تھا زمین کے اوسط فاصلہ (اکائی کے طور پر) کی رقوم میں درج ہیں۔ آخری خانہ میں وہ اوسط فاصلے درج ہیں جو کیپلر کے کلیہ سے ماخوذ ہوتے ہیں۔

	دَور (یوم)	اوسط فاصلہ		
		کیپلر	بلیا لاس	محسوبہ
عطارد	۸۷٫۹۶۹۲	٫۳۸۸۰۶	٫۳۸۵۸۵	٫۳۸۷۱۰
زہرا	۲۲۴٫۶۱۷۶	٫۷۲۴۰۰	٫۷۲۳۹۸	٫۷۲۳۳۳
زمین	۳۶۵٫۲۵۶۵	۱٫۰۰۰۰۰	۱٫۰۰۰۰۰	۱٫۰۰۰۰۰
مریخ	۶۸۶٫۹۷۸۵	۱٫۵۲۳۵۰	۱٫۵۲۳۵۰	۱٫۵۲۳۶۹
مشتری	۴۳۳۲٫۵۱۴	۵٫۱۹۶۵۰	۵٫۲۲۵۲۰	۵٫۲۰۰۹۶
زحل	۱۰۷۵۹٫۲۷۵	۹٫۵۱۰۰۰	۹٫۵۴۱۹۸	۹٫۵۴۰۰۶

نیوٹن نے مشتری اور زحل کے قمروں کے دَوروں اور متعلقہ ابتدائیوں سے ان کے فاصلوں کے درمیان بھی اسی طرح مقابلہ کیا ہے۔

اب جب کہ تجاذب کا قانون پوری طرح ثابت ہو چکا ہے اس لیے اضافی اوسط فاصلوں کو بالعموم کیپلر کے کلیہ کی اساس پر اضافی دَوروں سے ماخوذ کیا جاتا ہے، اور صرف ایک خفیف تصحیح جس کو دفعہ ۸۱ میں سمجھایا جائیگا عائد کی جاتی ہے۔ سیاروں عطارد، زہرا، اور مریخ کی صورت میں جن کی کمیتیں

[1] ایک فرانسیسی عالم ہیئت اسماعیل بولیو Boulliau کا یہ لاطینوی نام ہے۔ صاحب موصوف نے اپنے زمانہ کے علماء سائنس سے بڑے وسیع پیمانہ پر خط و کتابت جاری رکھی تھی۔

[illegible]

۱۷ - [illegible]

[illegible]

$$[illegible] = \frac{[illegible]}{[illegible]} \quad \text{.............. (۵)}$$

[illegible]

سورج کی کمیت کے مقابلہ میں بہت چھوٹی ہیں یہ تصحیح تقریباً ناقابل التفات ہے چنانچہ اوپر کی جدول کے آخری خانہ میں محسوبہ قیمتیں تقریباً ٹھیک طور پر اُن قیمتوں کے مطابق ہیں جن کو علماء ہیئت استعمال کرتے ہیں۔

ہم دیکھ چکے ہیں کہ کیپلر کے کلیے نیوٹن کے قانون تجاذب کے نتائج صریح کے طور پر حاصل ہوتے ہیں اگر مختلف سیاروں کے باہمی اثروں اور اُن اسراعوں کو جو وہ مرکزی جسم میں پیدا کرتے ہیں نظر انداز کیا جائے۔

اس کے برعکس یہ ثابت کیا جا سکتا ہے کہ کوئی دوسرا مفروضہ اِن قوانین کے مطابق نہیں ہے۔

(۲۲۴) اِس طرح رقبوں کا یکساں مرتسم ہونا اِس امر پر دلالت کرتا ہے کہ سورج کے گرد سیارہ کا زاویٔ معیار حرکت مستقل ہے اور اس لیے سیارہ پر قوت ہمیشہ سورج کی سمت میں ہوتی ہے۔

سورج کے گرد مدار کی ناقصی شکل جس کا ایک ماسکہ سورج ہے اِس امر پر دلالت کرتا ہے کہ ایک ہی مدار کے مختلف حصوں میں قوت' سمتی نصف قطر کے مربع کے بالعکس بدلتی ہے۔ اس کا ایک تحلیلی ثبوت دفعہ ۸۵ میں دیا گیا ہے لیکن یہ یاد رہے کہ نتیجہ اِس واقعہ سے ماخوذ ہوتا ہے کہ جو قوت کے ایک مرکز کے گرد (جو ماسکہ پر ہو) مرتسم شدہ ناقص کی صورت میں رسم الطریق وہ امدادی دائرہ ہے جو ایک قائمہ زاویہ میں سے گھمایا گیا ہے اور زیر بحث ماسکہ رسم الطریق کا قطب ہے (دفعہ ۸۷)۔ خط ج ے جو مرکز کو نقطہ ے سے ملاتا ہے (شکل ۴۷) س ف کے متوازی ہے اور اس لیے ے کی رفتار معمولی ترقیم میں $ر\,\frac{فرط}{فرت}$ یا $\frac{ھ}{ر}$ ہے۔ چونکہ یہ رفتار' ف (ایک قائمہ زاویہ میں سے گھمایا ہوا) کے اسراع کو اُسی پیمانہ پر تعبیر کرتی ہے جس پر س ے' رفتار

$$\frac{ھ}{ب^{۲}} \times س ے$$

کو تعبیر کرتا ہے اس لیے اسراع' س کی جانب

$$\frac{ھ^{۲}}{ل} \times \frac{۱}{ر^{۲}} \quad \text{.........} \quad (۳)$$

ہے۔ دیکھو دفعہ ۷۶ (۷)۔

چنانچہ دو سیاروں م، مَ کی صورتوں پر جو سورج کے گرد جس کی کمیت س (فرض کرو) ہے گردش کر رہے ہوں غور کرنے سے دفعہ ۷۶ (۱۳) کی رو سے

$$\text{ت}^2 : \text{تَ}^2 = \frac{\text{ا}^3}{\text{مہ}} : \frac{\text{اَ}^3}{\text{مہَ}} \qquad \text{(۱)}$$

یا

$$\left(\frac{\text{ا}}{\text{اَ}}\right)^3 = \frac{\text{مہ}}{\text{مہَ}}\left(\frac{\text{ت}}{\text{تَ}}\right)^2 = \frac{\text{س} + \text{م}}{\text{س} + \text{مَ}}\left(\frac{\text{ت}}{\text{تَ}}\right)^2 \qquad \text{(۲)}$$

حاصل ہوتا ہے۔ یہ کیپلر کے تیسرے کلیہ کی ترمیم شدہ شکل ہے۔

چار اندرونی سیاروں کی صورت میں نسبت $\frac{\text{م}}{\text{س}}$ بہت صغیر ہے چنانچہ زمین کی صورت میں بھی وہ $\frac{1}{300000}$ سے کم ہے۔ اس لیے وہ تصحیح جو اِس کُلیہ سے ماخوذ فاصلوں پر عائد کرنی ہوگی تقریباً قابل نظر انداز ہے۔ بیرونی سیارہ کے لیے $\frac{\text{م}}{\text{س}}$ کی بڑی سے بڑی قیمت $\frac{1}{1000}$ ہے اور یہ مشتری کی صورت میں حاصل ہوتی ہے۔

اگرچہ اضافی اسراع پر غور کرنے سے پچھلے نتیجے فوراً حاصل ہو جاتے ہیں لیکن اس پر ایک مختلف نقطۂ نگاہ سے غور کرنا مفید ہے۔ اگر دو ذرّوں م_1، م_2 کے فاصلے ان کے مرکز کمیت گ سے ر_1 اور ر_2 ہوں اور ان کا باہمی فاصلہ ر ہو تو

$$\text{ر}_1 = \frac{\text{م}_2}{\text{م}_1 + \text{م}_2}\,\text{ر} \text{ ، } \text{ر}_2 = \frac{\text{م}_1}{\text{م}_1 + \text{م}_2}\,\text{ر}$$

اب چونکہ اِن دو ذرّوں کے فاصلے نقطۂ گ سے اور ایک دوسرے سے مستقل نسبتوں میں ہیں اس لیے مدار جن کو وہ گ کے لحاظ سے اور ایک دوسرے کے لحاظ سے مرتسم کرتے ہیں ہندسی طور پر مشابہ ہونگے۔ نیز دفعہ ۸۴ کے اصولوں کی بناء پر ہم گ کے لحاظ سے حرکت پر غور کرتے وقت خود گ کی حرکت کو نظرانداز

کر سکتے ہیں۔ پس گ کو ایک ثابت نقطہ سمجھنے سے $م_۲$ کا اسراع اُس کی جانب

$\frac{ج\, م_۱}{ر^۲}$ ہے یا

$$\frac{مہ_۲}{ر_۲^۲} \quad \text{.............................} (۴)$$

بشرطیکہ

$$م_۲ = \frac{ج\, م_۱^۳}{(م_۱ + م_۲)^۲} \quad \text{.....................} (۵)$$

اگر گ کے گرد $م_۲$ کے مدار میں $م_۲$ کا اوسط فاصلہ $ل_۲$ ہو تو

$$ل_۲ = \frac{م_۱}{م_۱ + م_۲}\, ل \quad \text{.....................} (۶)$$

جہاں ل اُس مدار کے لحاظ سے ہو جو $م_۱$ سے متعلق ہے۔ پس اگر دَورت ہو تو

$$ت^۲ = \frac{۴\pi^۲ ل_۲^۳}{مہ_۲} = \frac{۴\pi^۲ ل^۳}{مہ} \quad \text{..........} (۷)$$

جہاں مہ = ج $(م_۱ + م_۲)$۔ اُس سے پھر وہی ضابطہ (۲) حاصل ہوتا ہے۔
نظام کی توانائی پر غور کرنے سے بھی یہی نتیجہ حاصل ہوتا ہے۔ دفعہ ۲۴ میں ہم دیکھ چکے ہیں کہ مرکز کمیت کے لحاظ سے حرکت کی توانائی بالحرکت (اور صرف یہی موجودہ صورت میں توانائی بالحرکت کا متغیر حصہ ہے)

$$\frac{۱}{۲}\, \frac{م_۱ م_۲}{م_۱ + م_۲}\, و^۲ \quad \text{.............................} (۹)$$

ہے جہاں اِن دو ذرّوں کی اضافی رفتار و ہے۔ باہمی توانائی بالقوہ

$$-\frac{ج\, م_۱ م_۲}{ر} \quad \text{.............................} (۱۰)$$

ہے۔ اس لیے توانائی کی مساوات کو

$$\frac{۱}{۲}\, \frac{م_۱ م_۲}{م_۱ + م_۲}\, و^۲ = \frac{ج\, م_۱ م_۲}{ر} + \text{مستقل} \quad \text{.......} (۱۱)$$

لکھا جا سکتا ہے ۔ یہ دفعہ ۷۶ کی مساوات (۲) کے مماثل ہے بشرطیکہ اس مساوات میں مہ کی قیمت (۸) درج کی جائے ۔

مثال ۔ مشتری کے اوسط فاصلہ کو ضابطہ (۲) سے اخذ کرنے میں ہم

$$\frac{\text{ت}}{\text{ت}'} = ۱۱٫۸۶۱۸ ، \quad \frac{\text{م}}{\text{س}} = \frac{۱}{۱۰۴۷} ،$$

اور

$$\frac{\text{م}'}{\text{س}} = ۰$$

رکھتے ہیں جہاں زبر زدہ حرف زمین سے متعلق ہیں اور زمین کی کمیت اس درجہ صحت کے (۲
لحاظ سے جو مطلوب ہے قابل نظر انداز ہے ۔ اس طرح

$$\left(\frac{\text{ا}}{\text{ا}'}\right)^{۳} = ۱٫۰۰۰۹۶ \times (۱۱٫۸۶۱۸)^{۲}$$

اس لیے

$$\frac{\text{ا}}{\text{ا}'} = ۵٫۲۰۲۸$$

۸۲ ۔ خلل ۔

اُن خللوں کو معلوم کرنا جو ایک جسم کے مدار میں دوسرے جسم کی کشش کی وجہ سے پیدا ہوتے ہیں فلکی علم الحیل کا خاص مسئلہ ہے ۔ اِس جیسی کتابوں میں صرف ایک یا دو سادہ امور پر بحث کی جا سکتی ہے ۔

سب سے پہلے یہ کہنا ضروری ہے کہ جو چیز سورج کے لحاظ سے ایک سیارہ کے مدار کو یا ابتدائی کے لحاظ سے تابع کے مدار کو متاثر کرتی ہے وہ مطلق اسراع نہیں ہے جو خلل انداز جسم کی وجہ سے ہے بلکہ وہ اسراع ہے جو سورج یا تابع کے لحاظ سے ہے یعنے اُن اسراعوں کا ہندسی فرق جو سیارہ اور سورج میں یا تابع اور ابتدائی میں پیدا ہوتے ہیں ۔ یہی وہ اضافی اسراع ہے جو اصطلاح "خلل انداز قوت" میں مضمر ہے ۔

خلل انداز قوت چونکہ بالعموم بہت چھوٹی ہوتی ہے۔ اس لیے اُس کا اثر صرف بالتدریج محسوس ہوتا ہے۔ اسی وجہ سے لگرانج نے "فوری ناقص" کا تصور پیش کیا یعنے وہ ناقصی مدار جس کو ایک سیارہ کسی لمحہ پر مرتسم کرنے لگیگا اگر خلل انداز قوت رُک جائے۔ ناقص میں تبدیلیاں مقابلۃً سست ہوتی ہیں۔

اِس طریقہ کی توضیح (اصول میں) کے لیے فرض کرو کہ اُن تبدیلیوں کا امتحان کرتے ہیں جو ناقص میں ایک خفیف فوری دھکہ سے جو ناقص کے مستوی میں عمل کرتا ہے پیدا ہوتی ہیں۔ ایسے دھکہ کو دو اجزائے ترکیبی میں تحلیل کیا جا سکتا ہے، ایک حرکت کی سمت میں اور دوسرا اس کے علی القوائم اور پھر ان کے اثروں پر جداگانہ غور کیا جا سکتا ہے۔

اول فرض کرو کہ ایک چھوٹا حماسی دھکہ عمل کرتا ہے جو رفتار کو و سے و + مف و میں تبدیل کرتا ہے۔ مساوات

$$\text{و}^2 = \text{مہ}\left(\frac{۲}{\text{ر}} - \frac{۱}{\text{ا}}\right) \quad \text{.................} \quad (۱)$$

سے فوراً اوسط فاصلہ میں تبدیلی معلوم ہوتی ہے کیونکہ اس میں جو مقداریں فوری (۲۳۸)
طور پر متاثر ہوتی ہیں وہ صرف و اور ا ہیں۔ اس لیے ان مقداروں میں جو چھوٹی تبدیلیاں ہوتی ہیں ان میں رشتہ

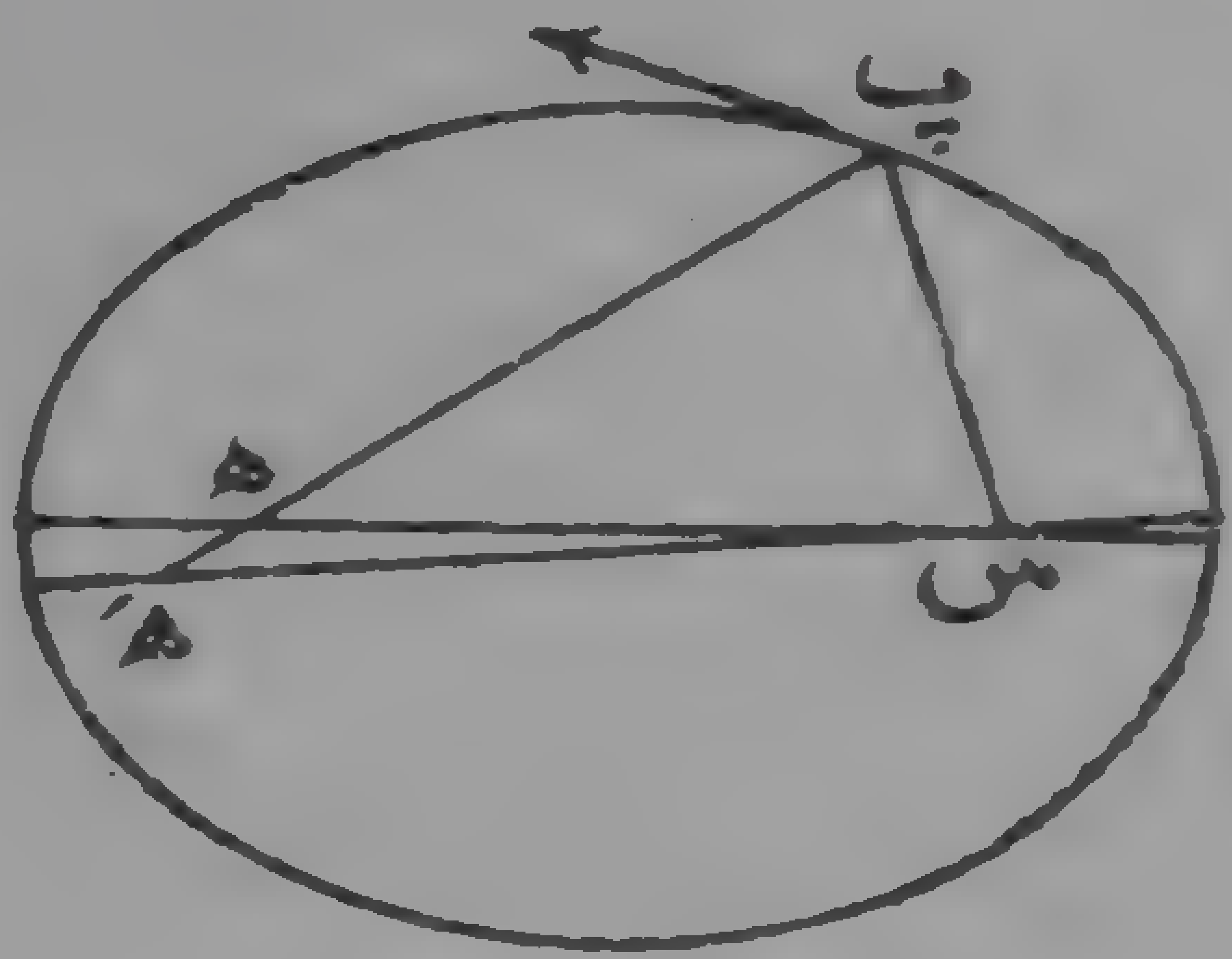
$$۲\,\text{و}\,\text{مف}\,\text{و} = \frac{\text{مہ}}{\text{ا}^2}\,\text{مف}\,\text{ا}$$

یا

$$\frac{\text{مف}\,\text{ا}}{\text{ا}} = \frac{۲\,\text{و}\,\text{مف}\,\text{و}}{\text{ن}^2\,\text{ا}^2} \quad \text{.................} \quad (۲)$$

ہے اگر ن اوسط زاوی رفتار ہو (دفعہ ۷۶)۔

حرکت کی سمت غیر متغیر رہتی ہے لیکن جسم کے محل پ سے خالی ماسکہ ھ کا فاصلہ پ ھ سے پ ھَ میں تبدیل ہوتا ہے جہاں ھ ھَ = ۲ مف ا۔ اس طرح خط اوجین کی سمت میں بالعموم تبدیلی ہوتی ہے یعنے س ھ سے س ھَ میں۔



شکل ۷۹

محور اصغر میں تبدیلی معلوم کرنے کے لیے دفعہ ۷۶ (۷) کی رو سے

$$\text{ب}^2 = \text{ال} = \frac{\text{ا}\text{ھ}^2}{\text{مہ}} = \frac{\text{ا}\text{ع}^2\text{و}^2}{\text{مہ}} \quad \ldots\ldots\ldots (۳)$$

جہاں ع′ قوت کے مرکز س سے راستہ کے مماس پر عمود ہے ۔ چونکہ ع کی قیمت میں کوئی فوری تبدیلی نہیں ہوتی اس لیے لوکارتمی تفرقے لینے سے (۲) سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{مف ب}}{\text{ب}} = \frac{1}{2}\frac{\text{مف ا}}{\text{ا}} + \frac{\text{مف و}}{\text{و}} = \left(1 + \frac{\text{و}^2}{\text{ن}^2\text{ا}^2}\right)\frac{\text{مف و}}{\text{و}} \quad \ldots (۴)$$

چونکہ $$\text{ن}^2\text{ا}^3 = \text{مہ} \quad (۵)$$

اس لیے اوسط حرکت ن میں تبدیلی

$$\frac{\text{مف ن}}{\text{ن}} = -\frac{3}{2}\frac{\text{مف ا}}{\text{ا}} = -3\frac{\text{و مف و}}{\text{ن}^2\text{ا}^2} \quad \ldots\ldots\ldots (۶)$$

سے حاصل ہوتی ہے ۔

(۲۳ اگر مدار میں اوسط توانائی بالحرکت ک سے تعبیر ہو تو دفعہ ۷۶ مثال ۲ سے

$$\text{ک} = \frac{1}{2}\text{ن}^2\text{ا}^2 = \frac{1}{2}\frac{\text{مہ}}{\text{ا}} \quad \ldots\ldots\ldots (۷)$$

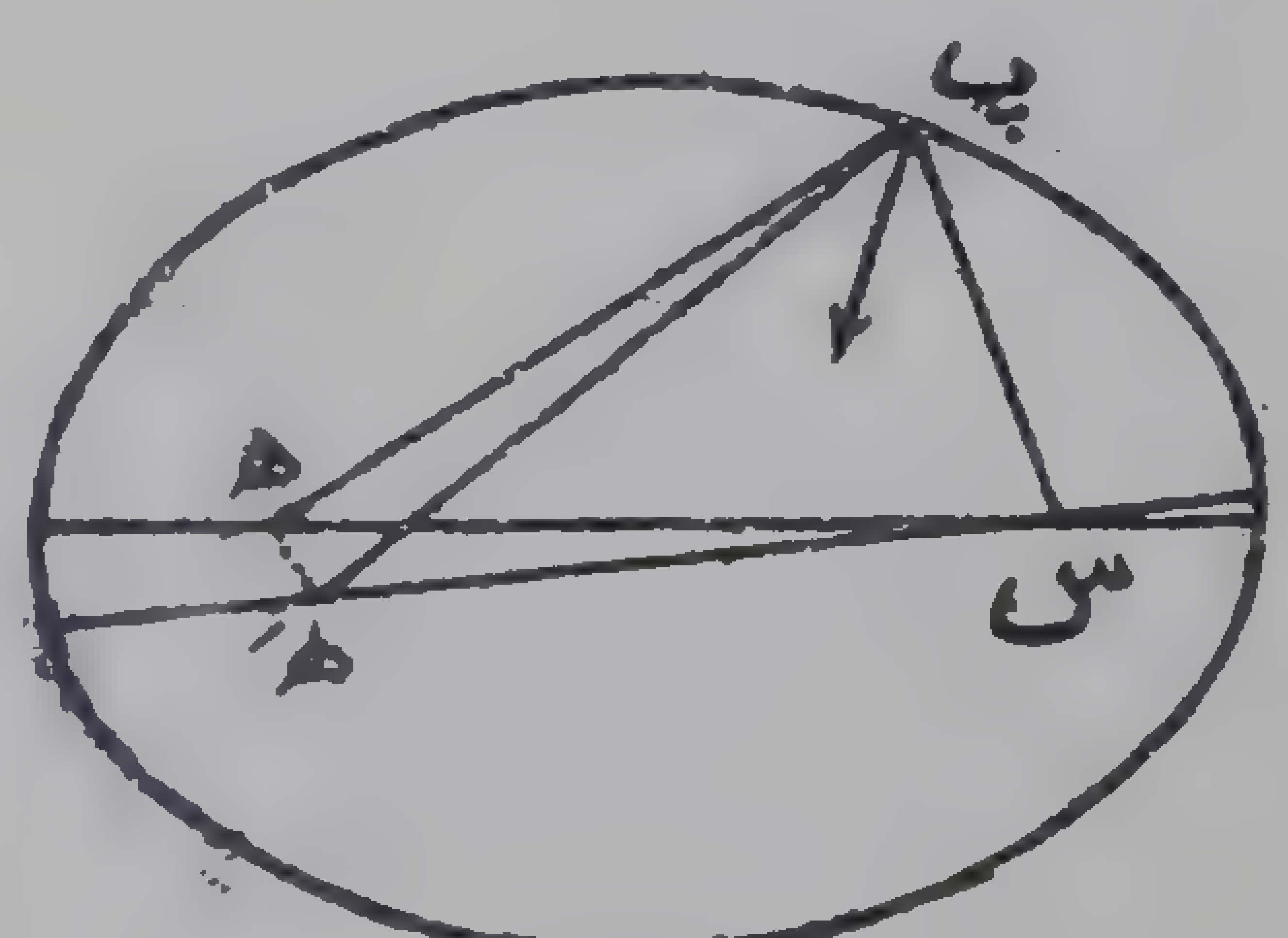
اور اس لیے $\quad \text{مف ک} = -\frac{1}{2}\frac{\text{مہ}}{\text{ا}^{2}}\,\text{مف ا} = -\text{و}\,\text{مف و}$ .....(۸)

تقریباً دائری مدار کی صورت میں جہاں و = ن ا (تقریباً) حاصل ہوتا ہے

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\text{مف ا}}{\text{ا}} = \frac{\text{مف ب}}{\text{ب}} = ۲\,\frac{\text{مف و}}{\text{و}}\,،\; \frac{\text{مف ن}}{\text{ن}} = -۳\,\frac{\text{مف و}}{\text{و}} \\ &\frac{\text{مف ک}}{\text{ک}} = -۲\,\frac{\text{مف و}}{\text{و}} \end{aligned}\right\} \text{..(۹)}$$

اِن ضابطوں کو ایک مزاحم واسطہ کی صورت پر اطلاق کے لیے دیکھو دفعہ ۱۰۰۔ دوسری دلچسپ مثال اُس نظریہ سے ملتی ہے جو چاند پر زمین کی موجوں کے تعامل سے متعلق ہے جب کہ موجوں میں رگڑ کی وجہ سے ابطاء فرض کیا گیا ہو۔ یہ خاص کر ایک چھوٹے مماسی اسراع ع پر مشتمل ہوگا۔ یہ معلوم ہوتا ہے کہ ع کے مثبت ہونے کی وجہ سے یہ اثر ہوگا کہ ع کے مدار کا احاطہ بتدریج بڑھیگا اور اس کی زاویُ حرکت اور اس کی توانائی بالحرکت گھٹیگی۔ توانائی بالحرکت کی اِس تخفیف کا بدل، بھی زیادہ توانائی بالقوہ کا اضافہ ہے کیونکہ کُل توانائی (چاند کی) اسراع پیدا کرنیوالی قوت سے بڑھ جاتی ہے۔

اب ایک چھوٹے عمادوار دھکہ کی صورت لو اور فرض کرو کہ مفد و وہ



شکل نمبر ۸۰

رفتار ہے جو وہ جسم میں پیدا کریگا اگر جسم ساکن ہوتا۔ دھکہ کے بعد حاصل رفتار $\sqrt{و^2 + مف\, و^2}$ ہے اور اس لیے پہلے رتبہ تک و کے مساوی ہے۔ پس ضابطہ

(۲۲۰) (۱) سے معلوم ہوتا ہے کہ ا کی قیمت میں کوئی فوری تبدیلی نہیں ہوتی۔ لیکن حرکت کی سمت زاویہ $\frac{مف\, و}{و}$ میں سے گھوم جاتی ہے اور اس لیے دوسرا ماسکہ ھ سے ایسے نقطہ ھَ تک ہٹ جاتا ہے کہ پ ھَ = پ ھ، اور

$$ھ\,ھَ = پ\,ھ \times \frac{۲\, مف\, و}{و}$$

خط اوجین کی سمت بھی بالعموم بدل جاتی ہے۔

مطلق اسراع مہ میں اچانک خفیف تبدیلی کا اثر (۱) کو اِس فرض پہ تفرق کرنے سے معلوم ہوتا ہے کہ صرف مہ اور ا متغیر ہوتے ہیں۔ اس طرح

$$\frac{مہ}{ا^2}\, مف\, ا + \left(\frac{۲}{ر} - \frac{۱}{ا}\right) مف\, مہ = ۰$$

یا $$\frac{مف\, ا}{ا} = -\, \frac{رَ}{ر}\, \frac{مف\, مہ}{مہ} \quad \text{......... (۱۰)}$$

یہاں رَ، دوسرا ماسکی فاصلہ ہے۔ نیز چونکہ $ن^2 ا^3 = مہ$ اس لیے

$$\frac{مف\, ن}{ن} = \frac{۱}{۲}\frac{مف\, مہ}{مہ} - \frac{۳}{۲}\, \frac{مف\, ا}{ا} = \left(\frac{۳ ا}{ر} - ۱\right) \frac{مف\, مہ}{مہ}$$

(۱۱).........

تقریباً دائری مدار کی صورت میں یہ ضابطے

$$\frac{مف\, ا}{ا} = -\, \frac{مف\, مہ}{مہ}،\quad \frac{مف\, ن}{ن} = ۲\, \frac{مف\, مہ}{مہ} \quad \text{......... (۱۲)}$$

میں تحویل ہوتے ہیں۔

مثلاً اگر سورج کی موثر کمیت[1] میں شہابی مادے کے گرنے سے اضافہ ہو جائے تو زمین کا مدار سکڑیگا اور گردش کی رفتار میں اضافہ ہوگا۔

مثال - چاند پر سورج کی خلل انداز قوت (جب کہ وہ بڑی سے بڑی ہو) کا مقابلہ زمین کی کشش کے ساتھ کرو۔

دفعہ ۵،۷ کی ترقیم اختیار کرو جہاں زمین کی کمیت کو متعین کیا گیا تھا۔ سورج کی خلل انداز قوت جب کہ چاند "اقتران میں" یعنے سورج اور زمین کے درمیان ہو

$$\frac{\text{ج س}}{(\text{ف}-\text{ف}')^{2}}-\frac{\text{ج س}}{\text{ف}^{2}}=\frac{\text{۲ ج س ف}'}{\text{ف}^{3}}\ \text{تقریباً}\quad ...(\text{۱۳})$$

ہے اگر چھوٹی کسر $\frac{\text{ف}'}{\text{ف}}$ کے مربع کو نظر انداز کیا جائے۔ جب چاند "تقابل" میں ہوتا ہے تو خلل انداز قوت

$$\frac{\text{ج س}}{(\text{ف}+\text{ف}')^{2}}-\frac{\text{ج س}}{\text{ف}^{2}}=-\frac{\text{۲ ج س ف}'}{\text{ف}^{3}}\quad ......(\text{۱۴})$$

ہے۔ ہر صورت میں خلل انداز قوت زمین سے **باہر وار** ہوتی ہے۔ (۱۳) کو جو نسبت (۲۴۱)
چاند پر زمین کی کشش کے ساتھ یعنے $\frac{\text{ج ز}}{\text{ف}'^{2}}$ کے ساتھ ہے وہ

$$\text{۲}\ \frac{\text{س}}{\text{ز}}\left(\frac{\text{ف}'}{\text{ف}}\right)^{3}\quad ......(\text{۱۵})$$

ہے۔ دفعہ ۵،۷ (۳) کی رو سے یہ تقریباً

$$\text{۲}\left(\frac{\text{ت}'}{\text{ت}}\right)^{2}=\frac{\text{۲}}{(\text{۱۳٫۷۷})^{2}}=\frac{\text{۱}}{\text{۹۰}}\quad ......(\text{۱۶})$$

کے مساوی ہے۔

---

[1] اگر شہابی مادے کا کوئی بادل جو مثلاً تقسیم شدہ ہو سورج کے گرد گھرا ہوا ہو تو اس کا وہ حصہ جو سیارہ کے مدار کے نصف قطر کے مساوی فاصلہ کے اندر شامل ہے جذب کریگا گویا کہ اس کی کمیت سورج کی کمیت میں پہلے ہی جمع شدہ ہے۔ اس لیے تبدیلی مف مہ کے متعلق یہ سمجھنا چاہیے کہ وہ اُس مادہ کی وجہ سے ہے جو سیارہ کے مدار کے باہر سے آیا ہے۔

۸۳۔ تجاذب کا مستقل۔

کمیت م فاصلہ ر پر کے ایک ذرہ میں جو اسراع پیدا کرتی ہے اُس کے لیے
جملہ

$$\frac{\text{ج م}}{\text{ر}^{2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

ہے جس میں تجاذب کا مستقل جہ ہے۔ چونکہ یہ مستقل اُس اسراع کے مساوی ہے جو اکائی کمیت اکائی فاصلہ پر عائد کرتی ہے اس لیے وہ کمیت' طول' اور وقت کی اکائیوں پر جو اختیار کی جائیں منحصر ہوگا۔ چونکہ $\frac{\text{جم}}{\text{ر}^{2}}$ ایک اسراع ہے جس کے ابعاد $\frac{\text{ل}}{\text{ت}^{2}}$ ہیں اس لیے جہ کے ابعاد

$$\text{ل}^{3}\ \text{م}^{-1}\ \text{ت}^{-2}$$

ہوں گے۔

معمولی ارضی اکائیوں کی رقوم میں جہ کی عددی قیمت کو بلاشبہ صرف معلومہ کمیتوں کی کشش کو فی الواقع پیمائش کرکے ہی معلوم کیا جا سکتا ہے۔ یہ بڑا نازک معاملہ ہے کیونکہ متعلقہ قوتیں انتہائی صغیر ہوتی ہیں۔ سب سے زیادہ قابلِ اعتماد نتیجہ[1] یہ ہے کہ

$$\text{جہ} = ۶۶۵۸ \times 10^{-8} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

س۔ گ۔ ث اکائیوں میں۔ یہ سینٹی میٹر فی ثانیہ فی ثانیہ میں وہ اسراع ہے جو ایک گرام کی کمیت جس کو ایک نقطہ پر مرتکز فرض کیا گیا ہے ایک سینٹی میٹر کے فاصلہ پر

---

[1] یہ نتیجہ سی۔ وی۔ بائز نے حاصل کیا ہے' دیکھو Phil Trans. 1895

پیدا کریگی۔

جہ کی قیمت معلوم ہو جانے کے بعد زمین کی اوسط کثافت فوراً ماخوذ ہو سکتی ہے۔ جیسا کہ پہلے بیان کیا جا چکا ہے ہم کششوں کے نظریہ سے یہ مان سکتے ہیں کہ زمین بیرونی ذرّوں کو اس طرح جذب کرتی ہے گویا کہ اس کی کل کمیت مرکز پر مرتکز ہے۔ پس اگر زمین کا نصف قطر ر اور اس کی اوسط کثافت ثہ ہو تو

$$\text{ج} = \frac{\text{جہ} \times \frac{4}{3}\pi\,\text{ر}^{3} \times \text{ثہ}}{\text{ر}^{2}}$$

یا

$$\text{ثہ} = \frac{3\,\text{ج}}{4\pi\,\text{جہ}\,\text{ر}} \quad \text{.................} (3)$$

(۲۴۴) اب اگر ہم ج = ۹۸۱ سمر فی ثانیہ فی ثانیہ، ر = ۶٫۳۷ × ۱۰^۸ سمر رکھیں اور جہ کی قیمت (۲) اختیار کریں تو

$$\text{ثہ} = 5.522 \quad \text{.................} (4)$$

گرام فی مکعب سینٹی میٹر۔ یہ قابل ذکر ہے کہ نیوٹن نے یہ اندازہ پیش کیا تھا کہ اوسط کثافت پانی کی کثافت کا تقریباً ۵ ½ گنا ہے۔

علم ہیئت کے مقاصد کے لیے جہ کی قیمت کا معلوم ہونا لازمی نہیں ہے چنانچہ اس کی قیمت ارضی ناپ میں کچھ صحت کے ساتھ معلوم ہونے سے بہت پہلے اِس علم میں بڑی ترقی ہوئی تھی۔ علم ہیئت کا تعلق فی الواقع صرف اضافی کمیتوں (اور فاصلوں) سے ہے۔ ضابطوں میں کسی نامعلوم اور بے قاعدہ مستقل کے مسلسل وقوع پذیر ہونے سے بچنے کے لیے کمیت کی ایک خاص اکائی کے استعمال کرنے کا بالعموم رواج سا ہو گیا ہے۔ ایک تدبیر یہ ہے کہ سورج کی کمیت کو اکائی کے طور پر لیا جائے۔ اگر زمین کے اوسط فاصلہ کو طول کی اکائی قرار دیا جائے اور ایک یوم کو وقت کی اکائی تو جہ کی قیمت ضابطہ

$$\frac{\text{جہ}\,\text{س}}{\text{ا}^{2}} = \left(\frac{2\pi}{\text{ت}}\right)^{2}\text{ا} \quad \text{.................} (5)$$

سے متعین ہوتی ہے اگر زمین کی کمیت کو جو نسبت سورج کی کمیت کے ساتھ ہے اس کو نظر انداز کیا جائے ۔ پس س = ۱، ا = ۱، اور ت = ۳۶۵٫۲۵ رکھنے سے

$$ج = \frac{۴\pi^۲}{ت^۲} = ۲٫۹۶ \times ۱۰^{-۴}$$

دوسرا طریقہ یہ ہے کہ کمیت کی اکائی اس طرح مقرر کی جائے کہ ج = ۱، تب کمیت م فاصلہ ر پر جو اسراع پیدا کرے گی وہ صرف $\frac{م}{ر^۲}$ ہوگا ۔ ایسی منتخبہ اکائی کو "ہیئتی اکائی" کہتے ہیں ۔ اگر زمین کے اوسط فاصلہ کو طول کی اکائی اور ایک یوم کو وقت کی اکائی قرار دیا جائے تو ہیئتی اکائیوں میں سورج کی کمیت اب اوپر کے عدد یعنے

$$س = \frac{۴\pi^۲}{ت^۲} = ۲٫۹۶ \times ۱۰^{-۴}$$

سے حاصل ہوگی ۔

مثال ۔ کمیت م (گراموں میں) کو جو ایک سینٹی میٹر کے فاصلہ پر اسراع اسمر فی ثانیہ فی ثانیہ پیدا کرے ضابطہ (۱) سے معلوم کرنا ہوگا چنانچہ م ج = ۱ اور

$$م = \frac{۱}{ج} = ۱٫۵۰۲ \times ۱۰^{۷}$$ (۲)

کمیت م (گراموں میں) جو ایک مساوی کمیت کو جو اسمر کے فاصلہ پر ہے ایک ڈائن کی قوت سے جذب کرے م^۲ ج = ۱ یا

$$م = \frac{۱}{\sqrt{ج}} = ۳۸۷۶$$

سے حاصل ہوتی ہے ۔

مثالیں (۱۷)

۱ ۔ خرجی کی صورت میں "مساوی رقبوں" کا قانون کیا شکل اختیار کرتا ہے ؟

۲ - ثابت کرو کہ اگر زمین کی مداروی رفتار کو نصف سے ذرا کم بڑھا دیا جائے تو وہ شمسی نظام سے بچ نکلیگی -

۳ - ایک مرکزی قوت کے تحت جو فاصلہ کے مربع کے بالعکس متناسب ہے ذرّے ایک ہی نقطہ سے ایک ہی رفتار کے ساتھ مختلف سمتوں میں پھینکے گئے ہیں - مداروں کے مرکزوں کا طریق معلوم کرو -

۴ - اگر ذرّے ایک دیے ہوئے نقطہ سے ایک ہی رفتار کے ساتھ مختلف سمتوں میں پھینکے جائیں تو مداروں کے محور اصغروں کے طول اُن عمودوں کے متناسب ہونگے جو قوت کے مرکز سے پھینکنے کی سمتوں پر کھینچے گئے ہوں -

۵ - ثابت کرو کہ اگر ایک سیارے سے جو ایک ناقصی مدار مرتسم کر رہا ہے سورج کو دیکھا جائے تو اُس کا اوسط ظاہری قطر اُس ظاہری قطر کے مساوی ہوگا جب کہ سیارہ ایسے فاصلہ پر ہو جو مدار کے نیم محور اعظم کے مساوی ہو -

۶ - اگر قریب ارضی سے سورج کا طول بلد ط ہو تو ثابت کرو کہ ظاہری قطر

$$ف = ف_۱ جم^۲ \tfrac{۱}{۲} ط + ف_۲ جب^۲ \tfrac{۱}{۲} ط$$

سے حاصل ہوتا ہے جہاں ف کی بڑی سے بڑی اور چھوٹی سے چھوٹی قیمتیں $ف_۱$ اور $ف_۲$ ہیں -

۷ - ماسکہ کے گرد ناقصی حرکت میں کسی قطر کے سروں پر کی رفتاروں کا ہندسی اوسط مستقل ہوتا ہے اور اوسط فاصلہ پر کی رفتار کے مساوی ہوتا ہے -

۸ - ثابت کرو کہ خالی ماسکہ کے گرد زاویٔ رفتار

$$\frac{ن ا ب}{ج د^۲}$$

سے حاصل ہوتی ہے جہاں حرکت کی سمت کے متوازی نیم قطر ج د ہے -

۹ - ثابت کرو کہ ناقصی مدار کے کسی نقطے پر کی رفتار کو دو مستقل اجزائے ترکیبی میں تحلیل کیا جا سکتا ہے یعنے (۱) سمتی نیم قطر کے علی القوائم رفتار $\frac{ن ا}{\sqrt{۱ - ز^۲}}$ اور (۲) محور اعظم کے علی القوائم رفتار $\frac{ن ا ز}{\sqrt{۱ - ز^۲}}$ -

۱۰۔ ثابت کرو کہ وہ دو حصے جن میں زمین کا مدار وتر خاص سے تقسیم ہوتا ہے علی الترتیب ۷ء۸ء۱ اور ۵ء۱۸۶ء۱ دنوں میں مرتسم ہوتے ہیں۔ (ز = $\frac{1}{60}$)

۱۱۔ یہ تسلیم کرکے کہ زمین کی مداروی رفتار ۳۰ کلومیٹر فی ثانیہ ہے مشتری کی رفتار معلوم کرو جس کا فاصلہ سورج سے ۲۰ء۵ گنا بڑا ہے۔ [۲ء۱۳ کلومیٹر فی ثانیہ]

۱۲۔ ثابت کرو کہ وہ رفتار جو ایک ذرہ ایک بڑے فاصلہ سے سورج کے اندر گرنے میں حاصل کرتا ہے $\sqrt{\frac{2\text{و}^2}{\text{ع}}}$ ہے جہاں زمین کی مداروی رفتار و اور سورج کا ظاہری زاوئی نصف قطر جیسا کہ وہ زمین سے دکھائی دیتا ہے ع ہے۔

۱۳۔ ثابت کرو کہ اگر ایک ذرہ کو خط استوا کے مستوی میں ایک ایسی رفتار سے پھینکا جائے جو اس رفتار کے مقابلہ میں چھوٹی ہو جو زمین کی گردش کی وجہ سے ہے تو فضا میں اس کا راستہ ایک مخروطی ہوگا جس کا نیم وتر خاص تقریباً ۱۴ میل ہوگا۔ (۲۷۴)

۱۴۔ ثابت کرو کہ ایک ناقصی مدار میں جو ماسکے پر کی قوت کے ایک مرکز کے گرد مرتسم ہوتا ہے محور کے عمود وار رفتار کا جزو ترکیبی سمتی قطر کے بالعکس تناسب ہوتا ہے۔

۱۵۔ اگر ایک دُم دار تارے کا (مکافی) راستہ زمین کے مدار کو اک قطر کے سروں پر عبور کرے تو بتاؤ کہ زمین کے مدار کے اندر کتنے دنوں تک اس کا راستہ رہیگا۔ ($77\frac{1}{2}$)

۱۶۔ ثابت کرو کہ وہ وقت جو ایک دُم دار تارا زمین کے مدار (جس کو دائری فرض کیا گیا ہے) کے اندر صرف کرتا ہے ایسے بدلتا ہے جیسے

$$(\text{ا} + 2\text{ج})\sqrt{\text{ا} - \text{ج}}$$

جہاں زمین کے مدار کا نصف قطر ا ہے اور سورج سے دُم دار تارے کا کم سے کم فاصلہ ج ہے۔

ثابت کرو کہ یہ بڑے سے بڑا ہوگا جب کہ ج = $\frac{1}{2}$ ا

مثالیں (۱۸)

(ناقصی حرکت، وغیرہ)

۱۔ ابتدائی اصولوں سے ثابت کرو کہ ایک مرکزی قوت کی صورت میں جو فاصلہ کے مربع کے بالعکس متناسب ہے رسم الطریق کا انحنا مستقل ہوتا ہے اور اس لیے مدار ایک مخروطی ہوگا۔

۲۔ ایک ذرّہ اندرونی ماسکے کے گرد زائدی شاخ

لا = ا جمز ء ، ما = ب جبز ء

مرتسم کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ اوج سے وقت ضابطہ

ن ت = ز جبز ء - ء

سے حاصل ہوتا ہے جہاں ن = $\sqrt{\frac{\text{مہ}}{\text{ا}^{۳}}}$ اور ز خروج المرکز ہے۔

۳۔ ثابت کرو کہ مرکز کی مساوات (دفعہ ۷۹)۔

$$\text{جم ط} = \frac{(۱ - \text{ز}^{۲})^{\frac{۳}{۴}} - ۱}{\text{ز}}$$

کے لیے اعظم ہوتی ہے۔

ز = $\frac{۱}{۴}$ لینے سے ثابت کرو کہ اعظم قیمت تقریباً ۱° ۴ ۵′ ۳۰″ ہے۔

۴۔ ماسکے کے گرد ناقصی حرکت میں ثابت کرو کہ وقت کے مساوی تغیر

وقفوں پر سمتی قطر کی قیمتوں کا اوسط صحیح طور پر

$$ا \left(۱ + \frac{۱}{۲} ز^۲\right)$$

ہے۔

۵۔ ثابت کرو کہ مرکزی اسراع $\frac{مہ}{ر^۲}$ کے تحت حرکت کی کارٹیزی مساواتیں

$$\ddot{لا} = - \frac{مہ لا}{ر^۳} ، \ddot{ما} = - \frac{مہ ما}{ر^۳}$$

(۲۴۵) ہیں۔ تکملہ

$$لا \dot{ما} - ما \dot{لا} = ھ$$

کو اخذ کرو اور ثابت کرو کہ

$$\ddot{لا} = - \frac{مہ}{ھ} \frac{فر}{فرت} \left(\frac{ما}{ر}\right) ، \ddot{ما} = \frac{مہ}{ھ} \frac{فر}{فرت} \left(\frac{لا}{ر}\right)$$

اس لیے ثابت کرو کہ راستہ کی مساوات شکل

$$ر = \frac{ھ^۲}{مہ} + ا لا + ب ما$$

کی ہے۔

۶۔ ماسکہ کے گرد ناقصی حرکت میں اگر ذرّہ پر عماد کی سمت میں ایک خفیف دھکہ پڑے تو نیا مدار پرانے مدار کو خالی ماسکہ میں سے گزرنے والے وتر کے دوسرے سرے پر قطع کریگا۔

۷۔ یہ معلوم ہوا ہے کہ ستارہ سنبلہ ایک دوہرا تارا ہے جس کے اجزا ایک دوسرے کے گرد ۴ء۱ دنوں کے دور میں گردش کرتے ہیں اور بڑی سے بڑی اضافی مداروی رفتار ۶۳ میل فی ثانیہ ہے۔ اس ستارے کے اجزا کے درمیان اوسط فاصلہ اخذ کرو اور کل کمیت سورج کی کمیت کے مقابلتہً معلوم کرو۔ یہ دیا گیا ہے کہ سورج سے زمین کا اوسط فاصلہ ۹۲۷۵۰۰۰۰ میل ہے۔ (اوسط فاصلہ = $۳ء۲ \times ۱۰^۶$ میل، کُل کمیت = ۳ء۸۰)۔

۸ ۔ مطلق اسراع میں ایک چھوٹی تبدیلی کا اثر محور اصغر پر

$$\frac{\text{مف ب}}{\text{ب}} = -\frac{1}{\text{ر}} \times \frac{\text{مف مہ}}{\text{مہ}}$$

سے حاصل ہوتا ہے۔

۹ ۔ ثابت کرو کہ ایک مدار کے خروج المرکز پر ایک چھوٹے مماسی دھکے کا اثر

$$\text{زمف ز} = \frac{2\,\text{ب}^2}{\text{ا}^2}\left(\frac{1}{\text{ر}} - 1\right)\frac{\text{مف و}}{\text{و}}$$

سے حاصل ہوتا ہے۔

اگر اوج سے پیمائش کردہ طول بلد طہ ہو تو ثابت کرو کہ

$$\text{مف ز} = 2\,(\text{جم طہ} + \text{ز})\,\frac{\text{مف و}}{\text{و}}$$

مثالیں (۱۹)

(تجاذب کا مستقل)

۱ ۔ مان لو کہ ایک صغیر سیّارہ کروی ہے اور اس کی اوسط کثافت وہی ہے جو زمین کی ہے اور اُس کا قطر ۱۰۰ میل ہے۔ ثابت کرو کہ ایک ذرّہ جس کو اُس کی سطح سے اوپر وار ۴۶۰ فٹ فی ثانیہ کی رفتار سے متجاوز رفتار کے ساتھ پھینکا گیا ہو کبھی بھی واپس نہ ہوگا۔

۲ ۔ ایک ذرّہ کو چاند کی سطح سے اوپر وار کس رفتار (فٹ فی ثانیہ) کے ساتھ پھینکنا چاہیے کہ وہ بچ نکلے۔ (زمین کا نصف قطر 21×10^6 فٹ ہے اور چاند کی کمیت اور نصف قطر علی الترتیب زمین کی کمیت کا $\frac{1}{81}$ اور نصف قطر کا

$\frac{۱}{۴}$ ہیں) [۵۰ء۱۸ فٹ فی ثانیہ]

۳ - دو مساوی تجاذبی کُرے ایک دوسرے سے ایسے فاصلہ پر ساکن ہیں جو اِن میں (۲۴۶)
سے ہر ایک کے نصف قطر کے مقابلہ میں بڑا ہے۔ ثابت کرو کہ اگر اُن کو ان کی باہمی کشش پر چھوڑ دیا جائے تو وہ وقت جو وہ ایک دوسرے سے ملنے میں لینگے اُس وقت کا ء۷۰۷ ہوگا جو وہ اس صورت میں لیتے جب کہ ان میں سے ایک ثابت ہوتا۔

۴ - دو مساوی تجاذبی کُرے جن کا نصف قطر ا اور کثافت زمین کی اوسط کثافت کے مساوی ہے ایک دوسرے سے بہت بڑے فاصلہ پر سکون سے چلتے ہیں اور صرف باہمی کشش کے تحت ہیں۔ ثابت کرو کہ وہ رفتار

$$\sqrt[۴]{\left(\frac{\frac{۱}{۲}\,ج\,ا^{۲}}{ر}\right)}$$

کے ساتھ ٹکرائینگے جہاں رٰ زمین کا نصف قطر ہے۔

۵ - سیسے کے دو کُروں کو جن میں سے ہر ایک کا قطر ایک میٹر ہے ایک کلومیٹر کے فاصلہ پر رکھا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ اگر وہ صرف اپنی باہمی کشش کے تحت ہوں تو وہ تقریباً ۴۵۰ دنوں میں ایک دوسرے سے ملینگے۔ (فرض کرو کہ زمین کا نصف قطر $۶ء۳۷ \times ۱۰^{۸}$ سمر، اس کی اوسط کثافت سیسے کی کثافت کا نصف، اور ج = ۹۸۱ سمر فی ثانیہ فی ثانیہ)۔

۶ - لوہے کے دو کُرے جن میں سے ہر ایک کا قطر ایک میٹر ہے اس طرح رکھے گئے ہیں کہ ان کے مرکزوں کے درمیان فاصلہ ۲ میٹر ہے۔ ثابت کرو کہ اگر وہ صرف اپنی باہمی کشش سے متاثر ہوں تو وہ تقریباً ایک گھنٹہ میں ایک دوسرے سے ملینگے۔ (فرض کرو کہ زمین کا نصف قطر $۶ء۳۷ \times ۱۰^{۸}$ سمر اور اس کی اوسط کثافت لوہے کی کثافت کا تقریباً $\frac{۴}{۵}$ ہے)۔

۷ - مشتری کا ایک تابع ۷ دن ۳ گھنٹے ۴۰ منٹ میں گردش کرتا ہے اور اس کے مرکز سے ایسے فاصلہ پر ہے جو سیّارہ کے نصف قطر کے ۱۵ گنے کے مساوی ہے۔ ہمارا چاند ۲۷ دن ۷ گھنٹے ۴۰ منٹ میں گردش کرتا ہے اور زمین کے مرکز سے ایسے فاصلہ پر ہے جو زمین کے نصف قطر کے ۶۰ گنے کے مساوی ہے۔ مشتری کی اوسط

کثافت کو جو نسبت زمین کی اوسط کثافت سے ہے اس کو معلوم کرو۔ [۴ء۲۱]

۸۔ سورج کی اوسط کثافت کو جو نسبت زمین کی اوسط کثافت کے ساتھ ہے اس کو معلوم کرو اگر یہ دیا گیا ہو کہ سورج کا ظاہری نیم قطر ۱۶َ ، وہ زاویہ جو زمین کے نصف قطر کے محاذی چاند پر بنتا ہے ۵۷َ ، اور ایک سال میں قمری گردشوں کی تعداد ۱۳ء۴ ہے۔ [۲۵۲ء]

۹۔ ثابت کرو کہ اگر ایک کُروی سیّارہ کی سطح سے قریب ایک تابع ہو تو اس کی (تابع کی) گردش کا دَور سیّارہ کی اوسط کثافت پر منحصر ہوتا ہے نہ کہ اس کے جثہ پر۔
دَور کیا ہوگا اگر اوسط کثافت پانی کی کثافت کے مساوی ہو۔
[۳ گھنٹے ۲۰ منٹ]

۱۰۔ اگر نظام شمسی کے مختلف جسموں کے ابعاد اور ان کے باہمی فاصلوں اور رفتاروں کو کسی یکساں نسبت میں تبدیل کیا جائے لیکن ان کی کثافتیں وہی رہیں تو ثابت کرو کہ کسی دیے ہوئے وقت میں تشکیل کی تبدیلیاں ٹھیک طور پر وہی ہونگی جو اب ہیں۔
کیا اثر ہوگا اگر کثافتوں کو کسی یکساں نسبت میں تبدیل کیا جائے۔

(۲۴۷)

گیارھواں باب

مرکزی قوتیں

۸۴۔ مدار کی تعیین۔

تجاذب کے قانون کے تحت مرتسم شدہ مداروں کے انکشاف نے فطرتاً نیوٹن اور اُس کے جانشینوں کی توجہ کو اِس طرف منعطف کیا کہ قوت کے دوسرے قوانین کی صورت کا امتحان کیا جائے اور نیز معکوس مسئلہ کی تحقیق کی جائے جو یہ ہے کہ قوت کے کس قانون سے جو ایک دیے ہوئے نقطہ کی جانب عمل کرے ایک دیا ہوا مدار مرتسم ہوگا۔

پچھلی صورت کی طرح اِن سوالات پر بھی زاوی معیار حرکت کے اصول اور توانائی کی مساوات کے ذریعہ سب سے زیادہ اختصار کے ساتھ بحث کی جا سکتی ہے۔ چنانچہ اول الذکر اصول سے

ع و = ص ....(۱)

حاصل ہوتا ہے جہاں رفتار و، قوت کے مرکز سے راستہ کے مماس پر عمود ع، اور ص ایک مستقل ہے۔ اس لیے سمتی قطر مساوی وقتوں میں مساوی رقبے مرتسم کرتا ہے اور شرح فی اکائی وقت $\frac{1}{2}$ ص ہے (دفعہ ۷۶)۔

نیز اگر قوت کی وجہ سے مرکز کی جانب اسراع فہ (ر) ہو تو توانائی بالقوہ یعنے وہ کام جو ذرّہ کو مرکز سے کسی معیاری فاصلہ پر سکون سے اصلی فاصلہ ر تک لانے میں مطلوب ہے

$$\int \text{فہ (ر) فرر}$$

فی اکائی کمیت ہے (سکونیات دفعہ ۴۹)۔ اس لیے توانائی کی مساوات

$$\tfrac{1}{2}\,\text{و}^{2} + \int \text{فہ (ر) فرر} = \text{مستقل} \qquad (2)$$

ہے۔

(۱) سے اندراج کرنے پر راستہ کی مماسی قطبی مساوات

$$\frac{\text{ھ}^2}{\text{ع}^2} = \text{ج} - 2\int \text{فہ (ر) فرر} \qquad (3)$$

حاصل ہوتی ہے۔ اس سے مدار کی شکل اور جثہ معلوم ہوتا ہے جب کہ ج دیا گیا ہو (۲۴۸)
لیکن قوت کے مرکز کے گرد اس کا صحیح محل وقوع معلوم نہیں ہوتا۔

مثلاً

$$\text{فہ (ر)} = \text{مہ ر} \qquad (4)$$

کی صورت میں مساوات

$$\frac{\text{ھ}^2}{\text{ع}^2} = \text{ج} - \text{مہ ر}^2 \qquad (5)$$

حاصل ہوتی ہے۔ اگر ہم اس کا مقابلہ ایک ناقص کی مماسی قطبی مساوات[ف] (بحوالۂ مرکز)

$$\frac{\text{ا}^2\text{ب}^2}{\text{ع}^2} = \text{ا}^2 + \text{ب}^2 - \text{ر}^2 \qquad (6)$$

سے کریں تو معلوم ہوگا کہ یہ دو مساواتیں مماثل ہونگی اگر

$$\text{ا}^2\text{ب}^2 = \frac{\text{ھ}^2}{\text{مہ}}،\quad \text{ا}^2 + \text{ب}^2 = \frac{\text{ج}}{\text{مہ}} \qquad (7)$$

ف Inf. Calc., Art. 143

اب چونکہ (۵) کی رو سے ج کا مثبت ہونا ضروری ہے اس لیے (۷) سے حاصل شدہ ا^2 اور ب^2 کی قیمتیں حقیقی اور مثبت ہونگی بشرطیکہ

$$\text{ج}^2 > \text{۴ مہ ھ}^2 \qquad \text{(۸)}$$

اب اگر (ع، ر) مدار پر کے کسی دیے ہوئے نقطہ کے حوالے سے ہوں تو (۵) سے

$$\text{ج}^2 - \text{۴ مہ ھ}^2 = \left(\frac{\text{ھ}^2}{\text{ع}^2} - \text{مہ ر}^2\right)^2 + \text{۴ مہ ھ}^2\left(1 - \frac{\text{ر}^2}{\text{ع}^2}\right) \qquad \text{(۹)}$$

جو مثبت ہے کیونکہ ع < ر۔ پس ہم اس نتیجہ پر پہنچتے ہیں کہ مدار کو تمام صورتوں میں ایک ناقص پر منطبق کیا جا سکتا ہے جس کا مرکز قوت کا مرکز ہوتا ہے۔

گردش کا دور (۷) کی رو سے،

$$\text{ت} = \frac{2\pi\,\text{اب}}{\text{ھ}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\text{مہ}}} \qquad \text{(۱۰)}$$

ہے جیسا کہ دفعہ ۲۸ میں۔ نیز (۵) اور (۷) سے

$$\text{و}^2 = \text{مہ}\left(\text{ا}^2 + \text{ب}^2 - \text{ر}^2\right) \qquad \text{(۱۱)}$$

جس سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ کسی نقطہ ف پر کی رفتار اس نیم قطر کے متناسب ہے جو ف پر کے مماس کے متوازی ہے۔

صورت $\text{ف (ر)} = \frac{\text{مہ}}{\text{ر}^2}$ پر بحث ہو چکی ہے۔ **دفاعی** قوت کی صورت میں جو فاصلہ کے مربع کے بالعکس بدلے

$$\text{ف (ر)} = -\frac{\text{مہ}}{\text{ر}^2} \qquad \text{(۱۲)}$$

حاصل ہوتا ہے اور اس لیے

$$\frac{\text{ھ}^2}{\text{ع}^2} = \text{ج} - \frac{\text{۲ مہ}}{\text{ر}} \qquad \text{(۱۳)}$$ (۲۴۹)

اگر اس کا مقابلہ زائد کی ایک شاخ کی مساوات (بحوالہ **بیرونی ماسکہ**)

$$\frac{ل}{ع^2} = \frac{1}{ا} - \frac{2}{ر} \quad \text{.................(14)}$$

سے کیا جائے تو ہم دیکھتے ہیں کہ یہ دو مساواتیں مماثل ہونگی اگر

$$ل = \frac{ھ^2}{مہ} \text{ ، } ا = \frac{مہ}{ج} \quad \text{.................(15)}$$

اب چونکہ ج کا مثبت ہونا ضروری ہے، اس لیے یہ شرطیں ہمیشہ پوری ہو سکتی ہیں۔

۸۵۔ معکوس مسئلہ۔

معکوس مسئلہ کو حل کرنے کے لیے یعنے یہ معلوم کرنے کے لیے کہ قوت کے کس قانون کے تحت جو ایک دیے ہوئے مرکز کی جانب ہو ایک دیا ہوا مدار مرتسم ہوگا صرف ضابطہ

$$\frac{ھ^2}{ع^2} = ج - 2 \int فہ\,(ر)\, فر \quad \text{.................(1)}$$

کو ر کے لحاظ سے تفرق کرنے کی ضرورت ہے۔ چنانچہ

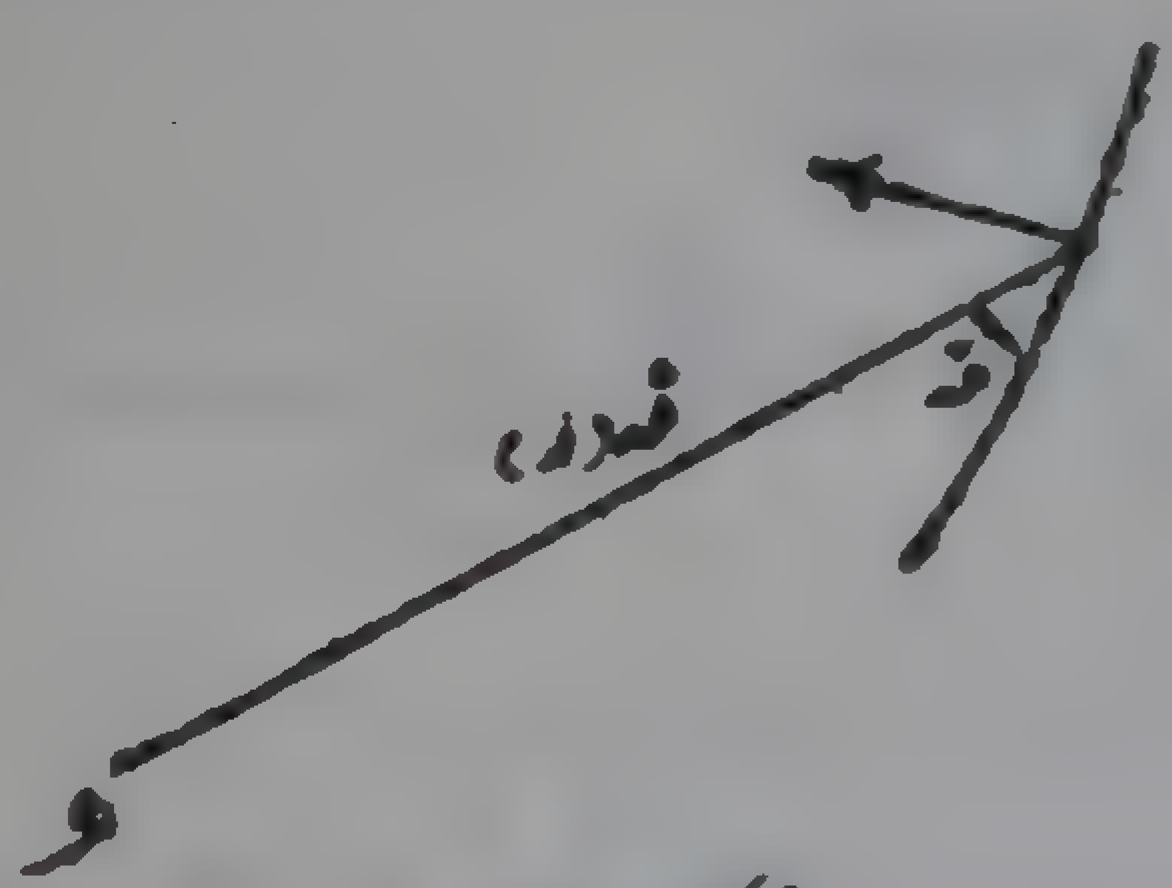
$$فہ\,(ر) = \frac{ھ^2}{ع^3}\, \frac{فرع}{فر} \quad \text{.................(2)}$$

مقررہ مدار کی مماسی قطبی مساوات سے ع، ر کے ایک تفاعل کے طور پر متعین ہو گا اور اس طرح قوت کا مطلوبہ قانون حاصل ہوگا۔

ضابطہ (۲) کو راست طور پر حب ذیل طریقہ سے معلوم کیا جا سکتا ہے۔ راستہ کے عماد کی سمت میں تحلیل کرنے سے

$$\frac{و^2}{عہ} = فہ\,(ر)\ جب\ فہ \quad \text{.................(3)}$$

جہاں عہ، نصف قطر انحنا ہے اور فہ وہ زاویہ جو مماس سمتی قطر کے ساتھ بناتا ہے۔ $و = \frac{ھ}{ع}$ ، $جب\ فہ = \frac{ع}{ر}$ اور علم الاحصا کے ایک مشہور ضابطہ سے



شکل ۱۸۱

$$عہ = ر \frac{فہ ر}{فہ ع} \quad \text{.........} (۴)$$

رکھنے سے نتیجہ (۲) حاصل ہوگا۔
چونکہ قوت کے مرکز میں سے گزرنے والا وتر انحناء ۲ عہ جب قہ ہے اس لیے ضابطہ (۳) سے یہ بیان ہوتا ہے کہ مدار کے کسی نقطہ پر کی رفتار اُس رفتار کے مساوی ہے جو ایک ذرہ' نقطہ پر کے اصلی اسراع فہ (ر) کے مساوی متقل اسراع کے تحت وتر انحناء کے ایک چوتھائی فاصلہ کے مساوی فاصلہ میں سے سکون سے گرنے میں حاصل کرتا۔ نیوٹن نے اس مضمون کی ہندسی تحقیق میں اس کے مماثل ضابطہ استعمال کیا تھا۔ (۵۰۲)

مثال ۱۔ ایک ناقص کی صورت لو اور فرض کرو کہ قوت کا مرکز ہندسی مرکز ہے تو

$$\frac{اَ^۲ بَ^۲}{ع^۲} = اَ^۲ + بَ^۲ - رَ^۲ \quad \text{.................} (۵)$$

اور مطلوبہ قانون' (۲) کی رو سے

$$فہ (ر) = \frac{مہ^۲}{ا^۲ ب^۲} \times ر \quad \text{.................} (۶)$$

ہے۔ اِس لیے ناقص قانون

$$فہ (ر) = مہ ر \quad \text{.................} (۷)$$

کے تحت مرتسم ہو سکتا ہے بشرطیکہ

$$مہ = \sqrt{مہ} \times اب \quad \text{.................} (۸)$$

اب اِس کا امتحان کرنے کے لیے کہ کیا دیئے ہوئے نمونہ کا مدار قانون (۷) کے تحت ہمیشہ مرتسم کیا جا سکتا ہے خواہ ابتدائی شرطیں کچھ ہی ہوں ہم دیکھتے ہیں کہ اِن

شرطوں میں ایک دیا ہوا نقطہ، اس نقطہ پر دیا ہوا مماس اور زاوئی معیار حرکت ھ کی ایک دی ہوئی قیمت مضمر ہے۔ موجودہ صورت میں آخرالذکر سے حاصل ضرب ا ب (۸) سے متعین ہوتا ہے۔ اب ایک ناقص کو مرتسم کرنے کا مسئلہ جب کہ مرکز دیا گیا ہو جو ایک دیے ہوئے نقطہ میں سے گزرے، ایک دیے ہوئے خط کو اس نقطہ پر مس کرے، اور جس کا رقبہ دیا ہوا ہو ممکن اور متعین ہے۔ یہ فی الحقیقت ایک ایسے ناقص کو مرتسم کرنے کے مماثل ہے جس کے دو مزدوج قطر دیے گئے ہوں۔

مثال ۲۔ ایک ناقص کی صورت میں جس کا حوالہ اندرونی ماسکہ سے دیا گیا ہو حاصل ہوتا ہے۔

$$\frac{1}{ا} \mp \frac{2}{ر} = \frac{ل}{ع^{2}} \qquad (9)$$

اس لیے

$$\frac{1}{ر^{2}} \times \frac{ھ^{2}}{ل} = فہ(ر) \qquad (10)$$

اس لیے معکوس مربع کا قانون ہی صرف وہ قانون ہے جو کیپلر کے پہلے کلیہ کے مطابق ہے یعنے ایک سیارہ جس پر کوئی خلل انداز قوت عمل نہ کرے ایک ناقص مرتسم کرتا ہے جس کے ایک ماسکہ پر سورج ہوتا ہے (دفعہ ۸۰)۔

پس یہ معلوم ہوتا ہے کہ زیر بحث ماسکہ کے گرد مخروطی کو قانون

$$\frac{مہ}{ر^{2}} = فہ(ر) \qquad (11)$$

کے تحت مرتسم کیا جا سکتا ہے بشرطیکہ

$$ھ = \sqrt{مہ\,ل} \qquad (12)$$

مدار کا یہ نمونہ بھی قانون (۱۱) کے تحت ایک عام نمونہ ہے۔ کیونکہ ایک مخروطی کو مرتسم کرنے کا مسئلہ جس کا ماسکہ ایک دیا ہوا نقطہ ہو، جو ایک دیے ہوئے خط کو ایک دیے ہوئے نقطہ پر مس کرے، اور جو ایک دیا ہوا ترخاص رکھے متعین ہے۔ مساوات (۹) سے فی الواقع ا معلوم ہوتا ہے جب کہ ع، ر، اور ل دیے گئے ہوں اور اس لیے دوسرے (۲۵۱)

ماسکہ کا محل متعین ہوتا ہے (دفعہ ۷۷)۔

مثال ۳۔ ایک دائرہ کی مماسی قطبی مساوات جب کہ محیط پر کے ایک نقطہ کو حوالہ کا نقطہ قرار دیا گیا ہو

$$\text{ع} = \frac{\text{ر}^{۲}}{\text{ق}} \qquad \text{(۱۳)}$$

ہے جہاں ق قطر ہے۔ اس لیے ضابطہ (۲) سے

$$\text{فہ}(\text{ر}) = \frac{۲\,\text{ھ}^{۲}\,\text{ق}^{۲}}{\text{ر}^{۵}} \qquad \text{(۱۴)}$$

یا

$$\text{فہ}(\text{ر}) = \frac{\text{مہ}}{\text{ر}^{۵}} \qquad \text{(۱۵)}$$

ہوتا ہے اگر

$$\text{ق}^{۲} = \frac{\text{مہ}}{۲\,\text{ھ}^{۲}} \qquad \text{(۱۶)}$$

اس طرح قوت کو فاصلہ کی پانچویں قوت کے بالعکس متغیر ہونا چاہیے لیکن زیر بحث مدار اس قانون کے لیے ایک عام مدار نہیں ہے۔ ایک دائرہ جو قوت کے مرکز میں سے اور نیز دو سرے دو دیے ہوئے (منطبق) نقطوں میں سے گزرتا ہوا کھینچا جائے ضروری نہیں کہ وہ مخصوص قطر ق بھی رکھے جو (۱۶) سے مطلوب ہے تاکہ زاویی معیار حرکت سے متعلق ابتدائی شرط پوری ہو۔ یہ صرف خاص طور پر انتظام کرنے کی صورت میں ممکن ہے۔

مثال ۴۔ مساوی الزاویہ لولب

$$\text{ع} = \text{ر}\ \text{جب}\ \text{عہ} \qquad \text{(۱۷)}$$

کے لیے قطب کی جانب قوت کا قانون

$$\text{فہ}(\text{ر}) = \frac{\text{ھ}^{۲}}{\text{جب}^{۲}\,\text{عہ}} \times \frac{۱}{\text{ر}^{۳}} \qquad \text{(۱۸)}$$

یا

$$\text{فہ}(\text{ر}) = \frac{\text{مہ}}{\text{ر}^{۳}} \qquad \text{(۱۹)}$$

ہے اگر $\quad$ جب² عہ = $\frac{\text{ص}^2}{\text{مہ}}$ ....(۲۰)

لیکن مدار معکوس مکعب کے قانون کے لیے ایک عام مدار نہیں ہے۔ کیونکہ ایک مساوی الزاویہ لولب جس کا قطب دیا گیا ہو اس پر کے دو منطبق نقطوں سے پوری طرح متعین ہو جاتا ہے اور اس لیے اس کا زاویہ (عہ) بالعموم رشتہ (۲۰) کو پورا نہیں کریگا۔

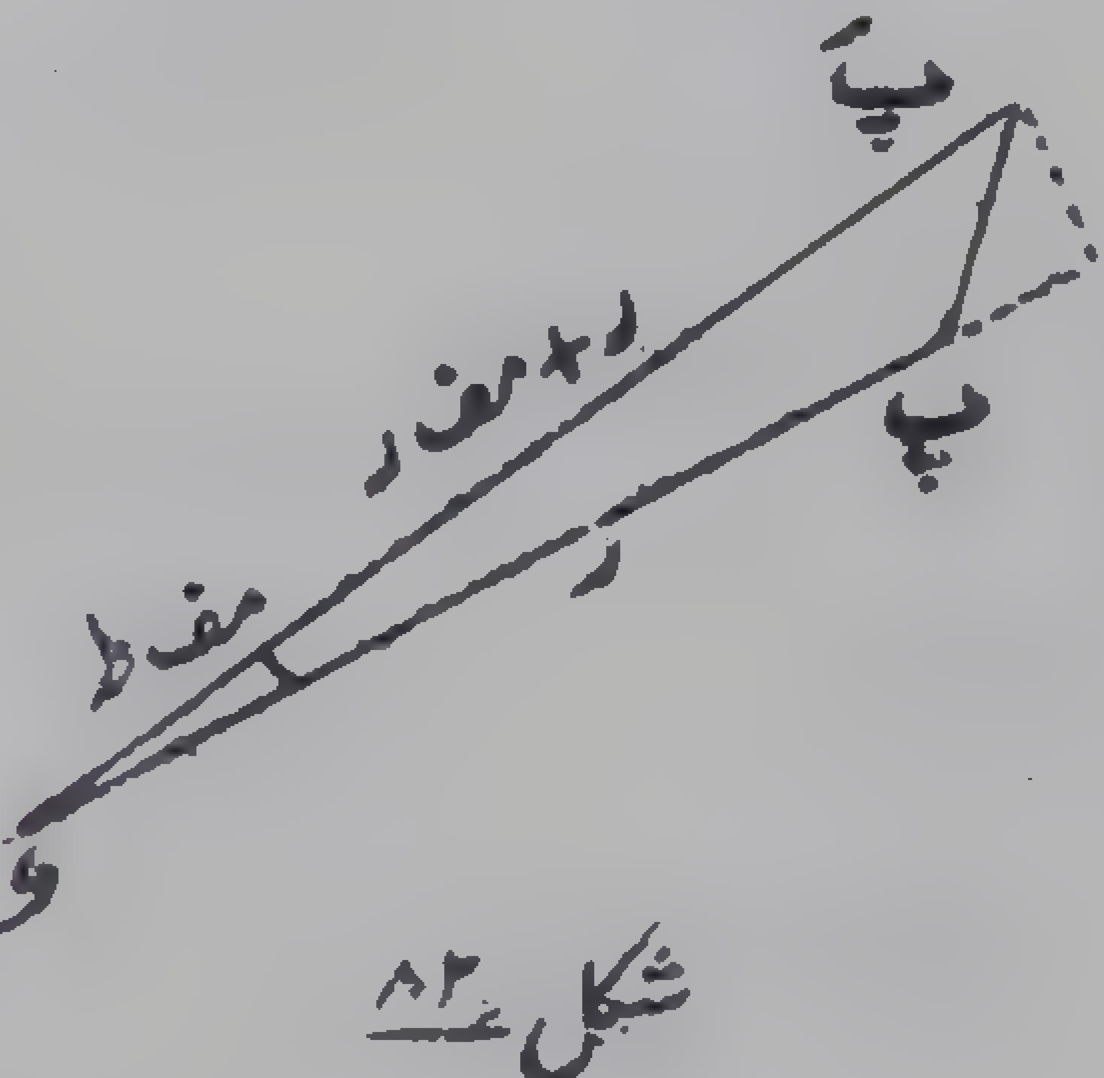
قانون (۱۹) کے تحت جو مختلف مدار مرتسم ہو سکتے ہیں اُن کا مکمل امتحان آئندہ کیا جائیگا (دفعہ ۹۱)۔

۸۶۔ قطبی محدد۔

"مرکزی قوتوں" سے متعلق تحقیقاتیں اکثر قطبی محددوں کی رقوم میں بیان کی جاتی ہیں۔ یہ محدد بعض مقاصد میں اور بالخصوص علم ہیئت میں ناگزیر ہیں۔

فرض کرو کہ ایک متحرک نقطہ کے قطبی محدد لمحہ ت پر ر، طہ ہیں اور لمحہ ت + مف ت پر ر + مف ر، طہ + مف طہ۔ شکل ۸۲ میں وپ = ر،
وپَ = رَ اور زاویہ پ و پَ = مف طہ۔ وقفہ مف ت میں (۲۵۲)
وپ کے متوازی ہٹاؤ، پہلے رتبہ تک،

وپَ جم مف طہ ۔ وپ = (ر + مف ر) جم مف طہ ۔ ر = مف ر



شکل ۸۲

ہے اور اس لیے پ پر سمت وپ میں رفتار کا جزو ترکیبی

ع = $\frac{\text{فر ر}}{\text{فر ت}}$ ....(۱)

ہے۔ نیز وپ کے عمود وار ہٹاؤ، پہلے رتبہ تک،

و پَ جب مف طہ = (ر + مف ر) جب مف طہ = ر مف طہ

ہے۔ اس لیے پ پر و پ کے علی القوائم سمت میں رفتار کا جزو ترکیبی

$$و = ر \frac{فر طہ}{فر ت} \quad \text{.............. (۲)}$$

ہے۔

وہ مقداریں جو یہاں ع اور و سے تعبیر کی گئی ہیں علی الترتیب رفتار کے نیم قطری اور عرضی اجزائے ترکیبی کہلاتی ہیں۔ ان کی قیمتیں علم الاحصار کے معلومہ ضابطوں سے لکھ لی جا سکتی تھیں، چنانچہ اگر فہ وہ زاویہ ہو جو راستہ پر کا مماس سمتی قطر کے ساتھ بناتا ہے تو

$$\left.\begin{aligned} ع &= \frac{فر س}{فر ت} \text{ جم فہ} = \frac{فر س}{فر ت} \frac{فر ر}{فر س} = \frac{فر ر}{فر ت} \\ و &= \frac{فر س}{فر ت} \text{ جب فہ} = \frac{فر س}{فر ت} \frac{ر فر طہ}{فر س} = \frac{ر فر طہ}{فر ت} \end{aligned}\right\} \text{ .... (۳)}$$

اسراع کے نیم قطری اور عرضی اجزائے ترکیبی معلوم کرنے کے لیے

فرض کرو کہ لمحہ ت + مف ت پر رفتار کے اجزائے ترکیبی ع + مف ع، و + مف و ہیں۔ ان کی سمتیں بلاشبہ اُن سمتوں کے ساتھ جو ع، و سے متعلق ہیں زاویے مف طہ بنائیں گی (شکل ۸۳)۔ وقت مف ت میں و پ کے متوازی رفتاریں بالآخر

(ع + مف ع) جم مف طہ ۔ (و + مف و) جب مف طہ ۔ ع

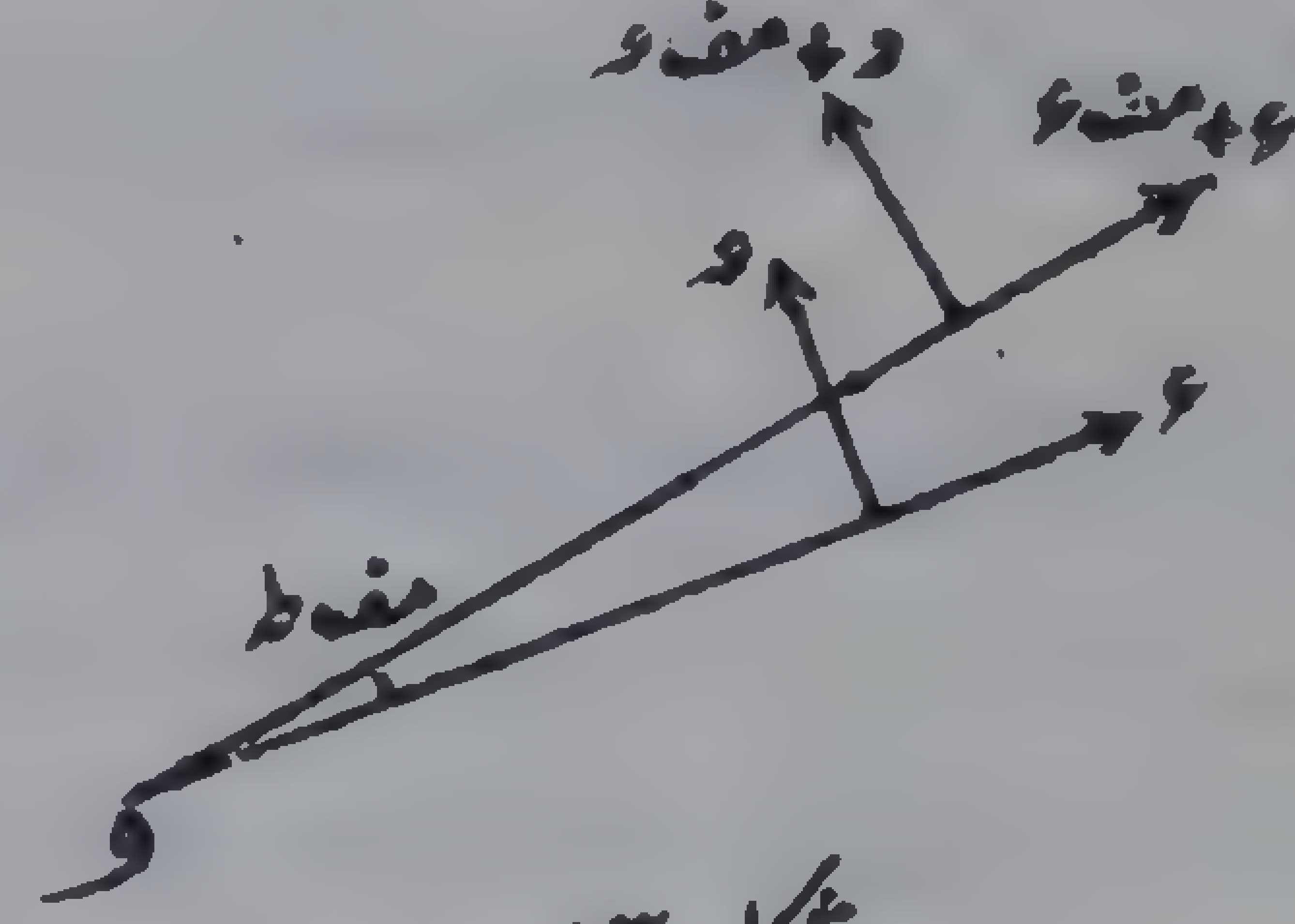
= مف ع ۔ و مف طہ

کا اضافہ ہوتا ہے اور اس لیے وقت ت پر اسراع کا نیم قطری جزو ترکیبی

$$\text{عہ} = \frac{\text{فر ۶}}{\text{فرت}} - \text{و} \frac{\text{فر طہ}}{\text{فرت}} \qquad \text{(۴)}$$

ہے۔ نیز و پ کے علی القوائم رفتار میں اضافہ بالآخر

$$(\text{۶} + \text{مف ۶}) \;\text{جب مف طہ} + (\text{و} + \text{مف و}) \;\text{جم مف طہ} - \text{و} = \text{مف و} + \text{۶ مف طہ}$$



شکل ۸۳

ہے۔ اس لیے وقت ت پر اسراع کا عرضی جزو ترکیبی

$$\text{بہ} = \frac{\text{فر و}}{\text{فرت}} + \text{۶} \frac{\text{فر طہ}}{\text{فرت}} \qquad \text{(۵)}$$

ہے۔ اب (۴) اور (۵) میں (۱) اور (۲) سے اندراج کرنے پر

$$\left.\begin{aligned} \text{عہ} &= \frac{\text{فر}^2 \text{ر}}{\text{فرت}^2} - \text{ر} \left(\frac{\text{فر طہ}}{\text{فرت}}\right)^2 \\ \text{بہ} &= \text{ر} \frac{\text{فر}^2 \text{طہ}}{\text{فرت}^2} + 2 \frac{\text{فر ر}}{\text{فرت}} \frac{\text{فر طہ}}{\text{فرت}} = \frac{1}{\text{ر}} \frac{\text{فر}}{\text{فرت}} \left(\text{ر}^2 \frac{\text{فر طہ}}{\text{فرت}}\right) \end{aligned}\right\} \qquad \text{(۶)}$$

پس اگر ایک ذرہ م پر عمل کرنے والی قوت کے نیم قطری اور عرضی اجزار ترکیبی علی الترتیب س اور ص ہوں تو حرکت کی مساواتیں

$$\text{م} \left\{ \frac{\text{فر}^2 \text{ر}}{\text{فرت}^2} - \text{ر} \left(\frac{\text{فر طہ}}{\text{فرت}}\right)^2 \right\} = \text{س} \qquad \text{(۷)}$$

$$\text{م} \frac{\text{فر}}{\text{فرت}} \left(\text{ر}^2 \frac{\text{فر طہ}}{\text{فرت}}\right) = \text{ص ر} \qquad \text{(۸)}$$

اِس آخری مساوات کو زاویٔ معیارِ حرکت کے اصول (دفعہ ۴۸) سے لکھ لیا جا سکتا تھا۔ مبدا ؔو کے گِرد ذرّہ کے معیارِ حرکت کا معیار، عرضی معیارِ حرکت م د اور سمتی قطر ر کا حاصل ضرب ہے اور اس لیے (۲) کی رو سے $\text{م}\,\text{ر}^2\,\frac{\text{فرطہ}}{\text{فرت}}$ کے مساوی ہے۔ مساوات (۸) سے یہ بیان ہوتا ہے کہ یہ حاصل ضرب ایک ایسی شرح سے بڑھتا ہے جو ذرہ پر عمل کرنے والی قوت کے معیار س ر کے مساوی ہے۔

(۲۵۴) **مثال ۱**۔ ضابطوں (۶) کو حرکت کی کارٹیزی مساواتوں سے بھی جو گردش کرنے والے محوروں کے حوالے سے ہوں ماخوذ کیا جا سکتا ہے۔ جب محوروں کی زاوئی رفتار سہ متغیر ہو تو دفعہ ۳۲ کی مساواتوں (۵) کی بجائے مساواتیں

$$\left.\begin{aligned} \text{ع} &= \frac{\text{فر}^2\,\text{لا}}{\text{فرت}^2} - 2\,\text{سہ}\,\frac{\text{فرما}}{\text{فرت}} - \text{سہ}^2\,\text{لا} - \frac{\text{فرسہ}}{\text{فرت}}\,\text{ما} \\ \text{یہ} &= \frac{\text{فر}^2\,\text{ما}}{\text{فرت}^2} + 2\,\text{سہ}\,\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}} - \text{سہ}^2\,\text{ما} + \frac{\text{فرسہ}}{\text{فرت}}\,\text{لا} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (9)$$

حاصل ہوتی ہیں۔ اگر ہم

$$\text{لا} = \text{ر}،\quad \text{ما} = 0،\quad \text{سہ} = \frac{\text{فرطہ}}{\text{فرت}} \quad \ldots\ldots (10)$$

رکھیں تو زیرِ بحث ضابطے حاصل ہوتے ہیں۔

مثال ۲ ــ وہ مرکزی اسراع معلوم کرنا جس کے تحت مخروطی

$$\frac{\text{ل}}{\text{ر}} = 1 + \text{ز}\,\text{جم}\,\text{طہ} \quad \ldots\ldots (11)$$

مرتسم ہو سکے۔

چونکہ کوئی عرضی اسراع نہیں ہے اس لیے

$$\frac{\text{فر}}{\text{فرت}}\left(\text{ر}^2\,\frac{\text{فرطہ}}{\text{فرت}}\right) = 0 \text{ یا } \text{ر}^2\,\frac{\text{فرطہ}}{\text{فرت}} = \text{ہ} \quad \ldots\ldots (12)$$

جیسا کہ دفعہ ۶۷ میں۔ نیز (۱۱) کو ت کے لحاظ سے تفرق کرنے سے

$$\frac{ل}{ر^2}\,\frac{فر\,ر}{فر\,ت} = ز\,جب\,ط\,\frac{فر\,ط}{فر\,ت} \qquad \text{.........(۱۳)}$$

اور اس لیے (۱۲) کی رو سے

$$\frac{فر\,ر}{فر\,ت} = \frac{ز\,ھ}{ل}\,جب\,ط \qquad \text{.........(۱۴)}$$

اس لیے

$$\frac{فر^2\,ر}{فر\,ت^2} = \frac{ز\,ھ}{ل}\,جم\,ط\,\frac{فر\,ط}{فر\,ت} = \frac{ھ^2}{ل\,ر^2}\left(\frac{ل}{ر}-1\right) \qquad \text{.........(۱۵)}$$

(۱۱) اور (۱۲) کی رو سے۔ اس لیے

$$\frac{فر^2\,ر}{فر\,ت^2} - ر\left(\frac{فر\,ط}{فر\,ت}\right)^2 = -\frac{مہ}{ر^2} \qquad \text{.........(۱۶)}$$

جہاں

$$مہ = \frac{ھ^2}{ل} \qquad \text{.........(۱۷)}$$

جو دفعہ ۸۵ (۱۰) کے مطابق ہے۔

زائدی شاخ کی صورت میں جس کا حوالہ بیرونی ماسکہ کو قطب لیکر دیا گیا ہو (۱۱) کی بجائے مساوات

$$\frac{ل}{ر} = ز\,جم\,ط - 1 \qquad \text{.........(۱۸)}$$

حاصل ہوتی ہے۔ اوپر کے مشابہ نتیجہ حاصل ہوتا ہے، صرف یہ فرق ہے کہ اسراع اب باہروار ہے۔

یہ قابل ذکر ہے کہ مساوات (۱۴) سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ سورج سے سیارہ کا فاصلہ سب سے زیادہ تیزی سے حضیض سے ۹۰° پر بدلتا ہے اور اعظم شرح

$$\frac{ز\,ھ}{ل} = \frac{2\pi\,اب\,ز}{ت\,ل} = \frac{2\pi\,ا}{ت}\,\frac{ز}{\sqrt{1-ز^2}} \qquad \text{.....(۱۹)}$$

ہے جہاں ت، گردش کا دور ہے۔ زمین کی صورت میں جہاں

$$\text{ا} = ۹۳ \times ۱۰^{۶} \ \text{میل، ز} = \frac{۱}{۶۰}$$

یہ تقریباً ۲۷۰۰ میل فی یوم ہے۔

مثال ۳ – مرکزی مدار کی صورت میں، اگر مبداء قوت کے مرکز پر ہو، تو

$$\text{ص} = -\text{م فہ}(\text{ر})\text{، س} = ۰ \quad \text{(۲۰)}$$

اور اس لیے

$$\ddot{\text{ر}} - \text{ر}\dot{\text{ط}}^{۲} = -\text{فہ}(\text{ر}) \quad \text{(۲۱)}$$

$$\text{ر}^{۲}\dot{\text{ط}} = \text{ھ} \quad \text{(۲۲)}$$

اس لیے $\dot{\text{ط}}$ کو ساقط کرنے پر

$$\ddot{\text{ر}} - \frac{\text{ھ}^{۲}}{\text{ر}^{۳}} = -\text{فہ}(\text{ر}) \quad \text{(۲۳)}$$

اب اگر ۲ $\dot{\text{ر}}$ سے ضرب دیں اور ت کے لحاظ سے تکمل کریں تو

$$\dot{\text{ر}}^{۲} + \frac{\text{ھ}^{۲}}{\text{ر}^{۲}} = \text{ج} - ۲\int \text{فہ}(\text{ر})\,\text{ءر} \quad \text{(۲۴)}$$

جو توانائی کی مساوات کے معادل ہے۔

اِن ضابطوں کو معلومہ نتیجوں کے حاصل کرنے میں استعمال کیا جا سکتا ہے۔ چنانچہ اگر

$$\text{فہ}(\text{ر}) = \text{ن}^{۲}\text{ر} \quad \text{(۲۵)}$$

تو

$$\dot{\text{ر}}^{۲} + \frac{\text{ھ}^{۲}}{\text{ر}^{۲}} = \text{ج} - \text{ن}^{۲}\text{ر}^{۲} \quad \text{(۲۶)}$$

ر کی متقیم قیمتیں، $\dot{\text{ر}} = ۰$ یا

$$\text{ن}^{۲}\text{ر}^{۴} - \text{ج}\,\text{ر}^{۲} + \text{ھ}^{۲} = ۰ \quad \text{(۲۷)}$$

سے حاصل ہوتی ہیں۔ یہ آسانی سے معلوم ہوتا ہے، جیسا کہ دفعہ ۴۸ میں، کہ $\text{ر}^{۲}$ کے

اِس دو درجی کی اصلیں حقیقی اور مثبت ہیں۔ اُن کو ا^{2} اور ب^{2} سے تعبیر کیا جائے تو

$$\text{ج} = \text{ن}^{2} (\text{ا}^{2} + \text{ب}^{2})،\quad \text{ھ}^{2} = \text{ن}^{2}\, \text{ا}^{2}\, \text{ب}^{2} \qquad \text{.........(۲۸)}$$

اب مساوات (۲۶) کو

$$\text{ر}^{2} \text{ز}^{2} = \text{ن}^{2} (\text{ا}^{2} - \text{ر}^{2}) (\text{ر}^{2} - \text{ب}^{2}) \qquad \text{.........(۲۹)}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں ا^{2} کو ا^{2} اور ب^{2} میں بڑی مقدار سمجھا گیا ہے۔ پس جب ر، ا سے ب تک گھٹتا ہے تو

$$\frac{\text{ر ز}}{\sqrt{(\text{ا}^{2} - \text{ر}^{2})(\text{ر}^{2} - \text{ب}^{2})}} = -\text{ن} \qquad \text{.........(۳۰)}$$

اگر ہم رکھیں

$$\text{ر}^{2} = \text{ا}^{2} \text{جم}^{2} \text{فہ} + \text{ب}^{2} \text{جب}^{2} \text{فہ} \qquad \text{.........(۳۱)}$$

تو

$$\frac{\text{فرفہ}}{\text{فرت}} = \text{ن}،\quad \text{فہ} = \text{ن ت} + \text{صہ} \qquad \text{.........(۳۲)}$$

نیز (۲۲) سے

$$\text{طہ} = \frac{\text{ھ}}{\text{ر}^{2}} = \frac{\text{ن ا ب}}{\text{ر}^{2}}$$

اس لیے

$$\frac{\text{فرطہ}}{\text{فرفہ}} = \frac{\text{ا ب}}{\text{ا}^{2} \text{جم}^{2} \text{فہ} + \text{ب}^{2} \text{جب}^{2} \text{فہ}} \qquad \text{.........(۳۳)}$$

اور

$$\text{طہ} = \text{مس}^{-1} \left(\frac{\text{ب جب فہ}}{\text{ا جم فہ}} \right) \qquad \text{.........(۳۴)}$$

اگر طہ کا مبدا، فہ کے مبدا پر منطبق ہو۔ (۳۱) اور (۳۴) سے یہ معلوم ہوتا ہے (۲۵۶)
ا جم فہ اور ب جب فہ، مدار پر کے ایک نقطہ کے قائم کارٹیزی محدد ہیں جو اس لیے ناقص

$$\frac{لا^2}{ا^2} + \frac{ما^2}{ب^2} = 1 \qquad (۳۵)$$

ہے ۔

مثال ۱۴ ۔ کمیت م کا ایک ذرہ جو ایک چکنے میز پر حرکت کر رہا ہے ایک ڈوری سے بندھا ہوا ہے جو میز کے ایک چھوٹے سوراخ میں سے گزرتی ہے اور مَ کی ایک کمیت اُس سے انتصاباً لٹک رہی ہے ۔

قطبی محدد استعمال کرنے سے م کی حرکت کے لیے مساواتیں

$$م \left(زً - ر طً^2 \right) = - فا ، \quad ر^2 طً = ھ \qquad (۳۶)$$

حاصل ہوتی ہیں جہاں ڈوری کا تناؤ فا ہے ۔ چونکہ مَ کا اسراع اوپر وار زً ہے اس لیے

$$مَ زً = فا - مَ ج \qquad (۳۷)$$

زً اور طً کو ساقط کرنے پر

$$فا = \frac{م مَ}{م + مَ} \left(ج + \frac{ھ^2}{ر^3} \right) \qquad (۳۸)$$

پس ذرہ م حرکت کرتا ہے گویا کہ وہ ایک مرکزی قوت کے تحت ہے جو دو حصوں پر مشتمل ہے جس میں سے ایک حصہ مستقل ہے اور دوسرا حصہ فاصلہ کے مکعب کے بالعکس متناسب ہے ۔ لیکن اس دوسرے حصہ کی شدت ھ کی قیمت پر اور اس لیے پھینکنے کے حالات پر منحصر ہے ۔

۸۷ ۔ مختل دائری مدار ۔

بلا شبہ ایک مرکزی جاذب قوت کے تحت ایک دائری مدار ہمیشہ ممکن ہے

جب کہ یہ قوت صرف فاصلہ کا تفاعل ہو اور حالات ٹھیک طور پر مقرر کیے گئے ہوں۔ اگر مدار کا نصف قطر ا، اس میں زاوی رفتار سہ، اور فاصلہ ر پر مرکزی اسراع فہ (ر) ہو تو

$$\text{سہ}^{۲}\,\text{ا} = \text{فہ}\,(\text{ا}) \qquad \text{.....................(۱)}$$

حاصل ہونا چاہیے۔ اس لیے زاوی معیار حرکت

$$\text{ھ}^{۲} = \text{سہ}^{۲}\,\text{ا}^{۴} = \text{ا}^{۳}\,\text{فہ}\,(\text{ا}) \qquad \text{...............(۲)}$$

سے حاصل ہوتا ہے۔

اِس سے ہم ایک ایسے مدار پر پہنچتے ہیں جو تقریباً دائری ہے۔ بالخصوص ہم یہ دریافت کرتے ہیں کہ آیا یہ دائری حرکت قائم ہے یعنے آیا ایک ذرہ جس کو قوت کے مرکز کے گرد دائری مدار میں گردش سے خفیف طور پر ہٹایا گیا ہو ہمیشہ دائرہ کے قریب رہیگا یا نہیں۔

اگر ہم $\frac{\text{فرطہ}}{\text{فزت}}$ کو مساواتوں

$$\frac{\text{فر}^{۲}\,\text{ر}}{\text{فزت}^{۲}} - \text{ر}\left(\frac{\text{فرطہ}}{\text{فزت}}\right)^{۲} = -\text{فہ}\,(\text{ر})\,،\quad \text{ر}^{۲}\,\frac{\text{فرطہ}}{\text{فزت}} = \text{ھ} \qquad \text{......(۳)}$$

سے ساقط کریں تو حسب سابق (۲۵۷)

$$\frac{\text{فر}^{۲}\,\text{ر}}{\text{فزت}^{۲}} - \frac{\text{ھ}^{۲}}{\text{ر}^{۳}} = -\text{فہ}\,(\text{ر}) \qquad \text{.....................(۴)}$$

حاصل ہوتا ہے۔ اب

$$\text{ر} = \text{ا} + \text{لا} \qquad \text{.....................(۵)}$$

لکھنے سے جہاں لا کو چھوٹا فرض کیا گیا ہے۔

$$\frac{ذ^{2}لا}{ذت^{2}} - \frac{ھ^{2}}{ا^{3}}\left(ا - \frac{۳لا}{ا}\right) = - فہ(ا) - لا\,فہَ(ا)$$ ....(۶)

تقریباً۔ اِس سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ $ا^{3}$ فہ (ا)، $ھ^{2}$ کے بہت قریب ہونا چاہیے یعنے اس دائرہ کا نصف قطر جس سے ذرہ کو خفیف طور پر ہٹا ہوا فرض کیا گیا ہے زاویٔی معیار حرکت کے ساتھ تقریباً رشتہ (۲) کے ذریعہ مربوط ہونا چاہیے۔ اس لیے (۲) کے مستقل ا کو ذرا ٹھیک کرکے یہ انتظام کرنا ممکن ہے کہ یہ شرط ٹھیک طور پر پوری ہو۔ اس مسلمہ پر

$$\frac{ذ^{2}لا}{ذت^{2}} + \left\{فہَ(ا) + \frac{۳}{ا}\,فہ(ا)\right\}لا = ۰$$ ....(۷)

حاصل ہوتا ہے۔ پس اگر

$$فہَ(ا) + \frac{۳}{ا}\,فہ(ا) > ۰$$ ....(۸)

تو لا کے تغیر سادہ موسیقی ہیں یعنے

$$لا = ج\ جم\,(ن ت + صہ)$$ ....(۹)

بشرطیکہ $$ن^{2} = فہَ(ا) + \frac{۳}{ا}\,فہ(ا)$$ ....(۱۰)

اس لیے شرط (۸) قائمیت کی شرط ہے۔

سہ کی رقوم میں، (۱) سے

$$\frac{ن^{2}}{سہ^{2}} = \frac{ا\,فہَ(ا)}{فہ(ا)} + ۳$$ ....(۱۱)

مثلاً ایک قوت کی صورت میں جو فاصلہ کی کسی قوت کے تناسب ہو فرض کرو

$$فہ(ر) = \frac{م}{ر^{ن}}$$ ....(۱۲)

تو $\frac{ن^{۲}}{سہ^{۲}} = ۳ - س$ ....(۱۳)

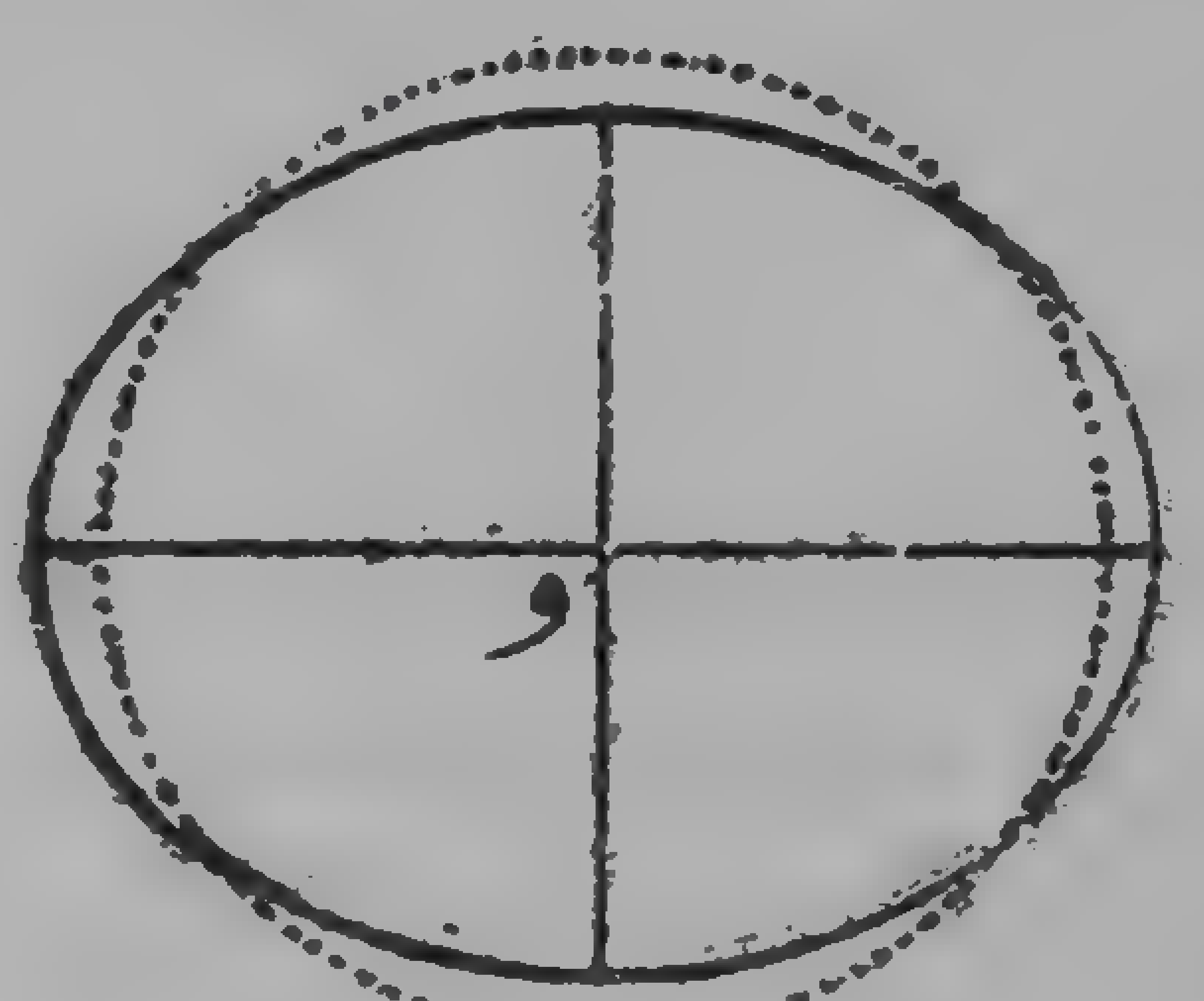
اس لیے مدار کی دائری شکل قائم ہے اگر س < ۳ اور غیر قائم اگر س > ۳ - صورت س = ۳ کو غیر قائم شمار کرنا چاہیے کیونکہ اس صورت میں

$\frac{فر^{۲} لا}{فرت^{۲}} = ۰$، لا = ا ت + ب ....(۱۴)

جس سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ لا کی مطلق قیمت میں برابر اضافہ ہوتا جاتا ہے -

عام جانچ (۸) سے یہ بیان ہوتا ہے کہ قائمیت کے لیے یہ ضروری ہے کہ مرکزی قوت، دائرہ کے قرب میں، ایک ایسی شرح سے باہر وار گھٹے یا اندر وار بڑھے جو اس شرح سے کم ہو اگر وہ فاصلہ کے مکعب کے بالعکس متناسب ہوتی -

(۸) سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ سمتی قطر کے طول میں ایک مکمل اہتزاز کا دور $\frac{۲\pi}{ن}$ ہے - فہ (ر) = مہ ر کی صورت میں



شکل ۸۴



شکل ۸۵

ہم دیکھتے ہیں کہ (۱۳) میں س = -۱ رکھنے سے ن = ۲ سہ اور اس لیے زیر بحث دور گردش کے دور کا نصف ہے - نیز اگر فہ (ر) = $\frac{مہ}{ر^{۲}}$ تو س = ۲ اور اس لیے ن = سہ اور دور گردش کے دور کے مساوی ہے - یہ بلا شبہ اس کے مطابق ہے جو ہم صحیح مداروں کے متعلق جانتے ہیں -

مثال ۔ دفعہ ۸۶ مثال ۴ کے مسئلہ میں

$$\ddot{ر} - \frac{ھ^2}{ر^3} = -\frac{مَ}{م+مَ}\left(ج + \frac{ھ^2}{ر^2}\right) \quad (۱۵)$$

یا

$$(م+مَ)\,\ddot{ر} - \frac{م\,ھ^2}{ر^3} = -مَ\,ج \quad (۱۶)$$

اس لیے نصف قطر ا کے دائری مدار کے لیے

$$م\,ھ^2 = مَ\,ج\,ا^3 \quad (۱۷)$$

۲۰۹ حاصل ہونا چاہیے ۔ اب ر = لا + ا لکھنے اور تقرب لینے سے

$$(م+مَ)\,\ddot{لا} + \frac{۳\,مَ\,ج}{ا}\,لا = ۰ \quad (۱۸)$$

اس لیے دائری مدار قائم ہے اور اِس کے گرد ایک چھوٹے اہتزاز کا دَور

$$۲\pi\sqrt{\frac{م+مَ}{۳مَ} \times \frac{ا}{ج}} \quad (۱۹)$$

ہے ۔

۸۸ ۔ اوجین ۔

وہ نقطہ جہاں قوت کے مرکز سے کھینچا ہوا نصف قطر مدار سے علی القوائم ملتا ہے ' اوج ' کہلاتا ہے اور زیرِ بحث نصف قطر کو ' خط اوج ' کہتے ہیں۔

اگر قوت ہمیشہ ایک ہی فاصلہ پر وہی ہو تو خط اوج مدار کو متشاکلاً منقسم کریگا۔ کیونکہ اگر اوج پر ذرہ کی رفتار کو الٹ دیا جائے تو اپنا پچھلا راستہ مکرر مرتسم کریگا۔ اس کے علاوہ وہ راستے جو دو ذرے جن کو اوج سے مساوی اور مخالف رفتاروں کے ساتھ چلایا گیا ہو مرتسم کرتے ہیں صریحاً متشاکل ہونے چاہییں ۔

اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ مساوی زاوئی وقفوں پر اوج تکرار پائینگے کیونکہ اگر و ا اور و ب وہ نصف قطر ہوں جو قوت کے مرکز سے دو متصلہ اوجوں تک کھینچے گئے ہوں تو نقطہ اَ جو و ب کے لحاظ سے ا کا خیال ہے

و ب کے لحاظ سے تشاکل ہونے کی وجہ سے بعد والا اوج ہوگا۔ اس کے بعد والا اوج بَ ہوگا جو و اَ کے لحاظ سے ب کا خیال ہے، اور علیٰ ہٰذا۔ زاویے ا و ب، ب و اَ، اَ و بَ، ... سب مساوی ہونگے، ان کی مقدار کو مدار کا اوجی زاویہ کہتے ہیں اور فاصلوں و ا، و ب، و اَ، و بَ، ... کو اوجی فاصلے کہتے ہیں۔ یہ فاصلے متبادلاً مساوی ہوتے ہیں۔ مرکز کے گرد ناقصی مدار میں اوجی زاویہ $\frac{1}{2}\pi$ ہوتا ہے اور اوجی فاصلے نیم محور ا، ب ہوتے ہیں۔ ماسکہ کے گرد مرتسم شدہ ناقص میں اوجی زاویہ π اور اوجی فاصلے ا(ا ± ز) ہوتے ہیں۔ دیکھو شکلیں ۸۴ اور ۸۵۔

کسی تقریبی دائری مدار میں سمتی نصف قطر کی اعظم قیمت سے اقل قیمت تک وقت کا وقفہ $\frac{\pi}{ن}$ ہوتا ہے جہاں ن، دفعہ ۸۷ (۱۱) سے حاصل ہوگا۔ اس وقفہ میں سمتی نصف قطر زاویہ

$$\frac{\pi\, \text{س}}{\text{ن}} = \pi \div \sqrt{\frac{\text{ا فہَ(ا)}}{\text{فہ(ا)}} + ۳} \quad \text{.........} \quad (۱)$$

مرتسم کرتا ہے جو اس لیے اوجی زاویہ ہے۔ ایک قوت کی صورت میں جو فاصلہ کی (۲۶۰)
کسی قوت کے متناسب ہو فرض کرو

$$\text{فہ(ر)} = \frac{\text{مہ}}{\text{ر}^{\text{س}}} \quad \text{.........} \quad (۲)$$

تو یہ زاویہ

$$\frac{\pi}{\sqrt{۳ - \text{س}}} \quad \text{.........} \quad (۳)$$

ہے اور اس لیے وہ دائرہ کے جسامت پر نہیں ہے۔

اس کے بالعکس ہم یہ دعویٰ کر سکتے ہیں کہ اوجی زاویہ کی قیمت تمام تقریبی دائری مداروں کے لیے وہی نہیں ہو سکتی اِلّا آنکہ قوت، فاصلہ کی کسی قوت کے

متناسب ہو۔ اگر زیر بحث زاویہ کی مستقل قیمت $\frac{\pi}{م}$ ہو تو ہمیں حاصل ہونا چاہیے

$$م^{2} = ۲ + \frac{ا\ فَ(ا)}{فہ(ا)}$$

یا
$$\frac{فَ(ا)}{فہ(ا)} = \frac{م^{2}-۳}{ا} \quad \ldots\ldots\ldots(۴)$$

اس لیے
$$\text{لوک}\ فہ(ا) = (م^{2}-۳)\ \text{لوک}\ ا + \text{مستقل}$$

یا
$$فہ(ا) = مہ\ ا^{م^{2}-۳} \quad \ldots\ldots\ldots(۵)$$

بالخصوص اوجی زاویہ π کے مساوی نہیں ہو سکتا اِلا آنکہ قوت قانون نیوٹن کے بموجب فاصلہ کے ساتھ بدلے۔ اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے جیسا کہ نیوٹن نے ظاہر کیا ہے کہ اگر تجاذب کا قانون فاصلہ کے معکوس مربع کی تناسبیت سے ذرا سا بھی منحرف ہو تو اس کا نتیجہ ہر سیارہ کے حضیض کی آگے بڑھنے والی حرکت ہوگا۔ مثلاً اگر (۲) میں قوت تناسب ۲ + لہ ہو جہاں لہ چھوٹا ہے تو (۳) کی رو سے اوجی زاویہ تقریباً $(۱ + \frac{۱}{۲}\ لہ)\pi$ ہوگا اور قریب تر اوج ہر گردش میں بقدر مقدار لہ π کے آگے بڑھیگا۔ واقعہ یہ ہے کہ اوج کی آگے بڑھنے والی حرکت ہر سیارہ کی صورت میں مشاہدہ میں آتی ہے اور چاند کی صورت میں تو وہ قابل لحاظ ہے۔ لیکن اس حرکت کا بدل دوسرے جسموں کے خلل انداز اثر سے کافی طور پر ہو جاتا ہے[1]۔

(۲۶۱) ایک گردش کے بعد تقریبی دائری مدار کے بند یا متداخلہ ہونے

---

[1] لیکن یہ معلوم ہوا ہے کہ بعض اختلافات ہیں خصوصاً مریخ، عطارد، اور زہرا کی صورت میں جن کی وضاحت اب تک نہیں ہو سکی۔ یہ بہت خفیف ہیں مثلاً عطارد کی صورت میں ۱۳ فی صدی تقریباً۔ تجاذب کے قانون میں خفیف سی ترمیم $لہ = ۱٫۵ \times ۱۰^{-۷}$ کی حد تک، اس کا معاوضہ ہوگی لیکن مریخ اور زہرا کی صورت میں اس سے بظاہر برا نتیجہ حاصل ہوگا۔

کے لیے اوجی زاویہ میں ۲ π کا جفت ضعف شامل ہونا چاہیے۔ اس لیے (۳) میں م کی قیمت ایک صحیح عدد ہونی چاہیے۔ وہ صورت جس میں فاصلہ کے بڑھنے کے ساتھ قوت گھٹتی ہے صرف م = ۱ کی ہے۔ اس لیے معکوس مربع کا قانون ہی صرف وہ قانون ہے جس کے تحت ایک سیارہ کا مدار جب کہ کوئی خلل نہ ہو اور مدار محدود ہو ایک بیضوی منحنی ہوتا ہے۔ دُہرے تاروں کی صورت میں اس کا ایک اطلاق ہے۔ ایک دُہرے تارہ کے دو اجزائے ترکیبی کا اضافی مدار جب کہ اس کو کافی طور پر مشاہدہ کیا جا سکے ایک بیضوی منحنی بلکہ بڑی حد تک ایک ناقص معلوم ہوا ہے اگرچہ وہ جسم جس سے حرکت کا حوالہ ہے ماسکہ پر نہ ہو۔ اس امر سے ہم اس نتیجہ پر پہنچتے ہیں کہ تجاذب کا قانون اس صورت میں بھی صادق آتا ہے اور ماسکہ سے قوت کے مرکز کے انحراف کی صراحت اس واقعہ سے ہوتی ہے کہ جو مشاہدہ کیا گیا ہے وہ اصلی مدار نہیں ہے بلکہ آسمان کے پس منظر پر اس کا ظل ہے۔

۸۹۔ فاصل مدار۔

ایک خاص شرط کے تحت ایک ذرہ جس کو راست جاذب قوت کے مرکز سے ایک خاص متعین رفتار کے ساتھ جو اس کے محل پر منحصر ہوتی ہے پھینکا جائے تو وہ رفتہ رفتہ لاتناہی تک ایک ایسی رفتار سے پہنچیگا جو متقارباً صفر کی جانب مائل ہوگی۔ پھینکنے کی اس متعین رفتار کو' دفعہ ۷۶ میں' ابتدائی محل کے متناظر "فاصل رفتار" کہا گیا ہے۔ وہ مدار جو مرتسم ہوتا ہے جب کہ ذرہ کو کسی دوسری سمت میں فاصل رفتار کے ساتھ متحرک کیا گیا ہو فاصل مدار کہلاتا ہے۔ دوسرے لفظوں میں فاصل مدار کی خاص خاصیت یہ ہے کہ ذرہ کی توانائی اس کو لاتناہی تک لیجانے کے لیے عین کافی ہے اگر اس کو ٹھیک سمت میں پھینکا جائے۔ ہم دیکھینگے کہ فاصل مدار کا لاتناہی تک وسیع ہونا ضروری نہیں ہے۔

توانائی کی مساوات

$$\text{و}^{2} = \text{ج} - 2\int \text{فہ}\,(\text{ر})\,\text{فر} \qquad \ldots\ldots (1)$$

اگر و کو ر = ∞ کے لیے معدوم ہونا ہے تو حسب ذیل ہو جاتی ہے

$$\text{و}^{2} = 2\int_{\text{ر}}^{\infty} \text{فہ}\,(\text{ر})\,\text{فر}$$

۲۶۲) اور وہ شرط جس کا ذکر دفعہ کے شروع میں کیا گیا ہے یہ ہے کہ یہ تکملہ متدق ہونا چاہیے یہ صورت ہوگی اگر

$$\underset{\text{ر}\to\infty}{\text{نہا}}\ \text{ر}^{1+\text{صہ}}\ \text{فہ}\,(\text{ر}) \qquad \ldots\ldots (2)$$

محدود ہو جہاں صہ کوئی مثبت مقدار ہے۔ اگر تکملہ متدق نہ ہو تو پھینکنے کی کوئی رفتار خواہ وہ کتنی ہی بڑی ہو ذرہ کو لامتناہی تک نہیں لیجا سکیگی۔

پس فاصل مدار میں

$$\left(\frac{\text{فرر}}{\text{فزت}}\right)^{2} + \left(\frac{\text{ر فرطہ}}{\text{فزت}}\right)^{2} = 2\int_{\text{ر}}^{\infty} \text{فہ}\,(\text{ر})\,\text{فر} \qquad \ldots\ldots (3)$$

اور

$$\text{ر}^{2}\,\frac{\text{فرطہ}}{\text{فزت}} = \text{ھ} \qquad \ldots\ldots (4)$$

اس لیے

$$\left(\frac{\text{فرر}}{\text{فزت}}\right)^{2} + \frac{\text{ھ}^{2}}{\text{ر}^{2}} = 2\int_{\text{ر}}^{\infty} \text{فہ}\,(\text{ر})\,\text{فر} \qquad \ldots\ldots (5)$$

عام صورت میں اس سے آگے سوال کو حل نہیں کیا جا سکتا لیکن اگر

$$\text{فہ}\,(\text{ر}) = \frac{\text{مہ}}{\text{ر}^{\text{س}}} \qquad \ldots\ldots (6)$$

تو

$$\left(\frac{\text{فرر}}{\text{فزت}}\right)^{2} + \frac{\text{ھ}^{2}}{\text{ر}^{2}} = \frac{2\,\text{مہ}}{\text{س}-1} \times \frac{1}{\text{ر}^{\text{س}-1}} \qquad \ldots\ldots (7)$$

بشرطیکہ س > ۱۔ اگر س = ۰ یا > ۱ تو کوئی فاصل رفتار نہیں ہے۔ اِن صورتوں کو چھوڑنے سے

$$\text{ر}^{\text{س}-۱}\left(\frac{\text{فر ر}}{\text{فر ت}}\right)^{۲} = \text{ھ}^{۲}\left(\text{ک}^{\text{س}-۳} - \text{ر}^{\text{س}-۳}\right) \quad \ldots\ldots (۸)$$

حاصل ہوتا ہے جہاں

$$\text{ک}^{\text{س}-۳} = \frac{۲\ \text{مہ}}{(\text{س}-۱)\ \text{ھ}^{۲}} \quad \ldots\ldots (۹)$$

جذر المربع لینے اور (۴) سے تقسیم کرنے سے

$$\frac{\text{فر ر}\ \text{ر}^{\frac{۱}{۲}(\text{س}-۵)}}{\left(\text{ک}^{\text{س}-۳} - \text{ر}^{\text{س}-۳}\right)^{\frac{۱}{۲}}} = \text{فر طہ} \quad \ldots\ldots (۱۰)$$

اس لیے

$$\text{جم}^{-۱}\left(\frac{\text{ر}}{\text{ک}}\right)^{\frac{۱}{۲}(\text{س}-۳)} = \frac{۱}{۲}(\text{س}-۳)\ \text{طہ} + \text{مستقل} \quad \ldots\ldots (۱۱)$$

یا

$$\text{ر}^{\text{ف}} = \text{ج}^{\text{ف}}\ \text{جم ف}\ (\text{طہ} - \text{عہ}) \quad \ldots\ldots (۱۲)$$

اگر

$$\text{ف} = \frac{۱}{۲}(\text{س}-۳) \quad \ldots\ldots (۱۳)$$

اگر س = ۲ تو ف = $-\frac{۱}{۲}$ اور مساوات (۱۲) ماسکہ کے حوالہ سے (۲۶۳)
ایک مکافی کی مساوات ہے۔ اگر س = ۵ تو ف = ۱ اور فاصل مدار قوت کے مرکز میں سے گزرتا ہوا ایک دائرہ ہے۔ اگر س = ۷ تو ف = ۲ اور مدار ایک اٹیرن (Lemniscate) ہے جس کا عقدہ قوت کے مرکز پر ہے۔

صورت س = ۳ میں اس تحقیق میں کچھ ترمیم کرنی ہوگی۔ (۷) سے

$$\text{ر}\ \frac{\text{فرر}}{\text{فرت}} = \pm\ \text{ر}\sqrt{\text{مہ هہ}^{2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۱۴)$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس کو (۴) سے تقسیم کرنے سے

$$\frac{\text{فرر}}{\text{فرط}} = \text{م ر} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۱۵)$$

جہاں

$$\text{م} = \pm\sqrt{\frac{\text{مہ}}{\text{هہ}^{2}} - ۱} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۱۶)$$

اس لیے

$$\text{ر} = \text{ج و}^{\text{م ط}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۱۷)$$

اس لیے فاصل مدار ایک مساوی الزاویہ لولب ہے اِلّا آنکہ هہ = $\sqrt{\text{مہ}}$ اور اِس صورت میں وہ ایک دائرہ ہوگا، دیکھو دفعہ ۹۱۔
(۱۲) سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ فاصل مدار محدود ہوگا اگر س > ۳ اور لاتناہی تک وسیع ہوگا اگر س < ۳۔

۹۰۔ مرکزی مداروں کی تفرقی مساوات

مرکزی مداروں کی تفرقی مساوات اپنی سادہ ترین شکل اختیار کرتی ہے اگر ہم سمتی قطر کے متکافی کو تابع متغیر کے طور پر لیں۔

$$\text{ع} = \frac{۱}{\text{ر}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۱)$$

لکھنے سے

$$\frac{\text{فرط}}{\text{فرت}} = \frac{\text{هہ}}{\text{ر}^{۲}} = \text{هہ ع}^{۲} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۲)$$

پس

$$\frac{\text{فرر}}{\text{فرت}} = -\frac{۱}{\text{ع}^{۲}}\,\frac{\text{فرع}}{\text{فرت}} = -\frac{۱}{\text{ع}^{۲}}\,\frac{\text{فرع}}{\text{فرط}}\,\frac{\text{فرط}}{\text{فرت}} = -\text{هہ}\,\frac{\text{فرع}}{\text{فرط}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۳)$$

$$\frac{\text{فر}^2\text{ر}}{\text{فرت}^2} = -\text{ھ}\,\frac{\text{فر}}{\text{فرت}}\left(\frac{\text{فرع}}{\text{فرط}}\right) = -\text{ھ}\,\frac{\text{فر}^2\text{ع}}{\text{فرط}^2}\,\frac{\text{فرط}}{\text{فرت}}$$

$$= -\text{ھ}^2\text{ع}^2\,\frac{\text{فر}^2\text{ع}}{\text{فرط}^2} \quad \ldots\ldots\ldots (۴)$$

اب مساوات

$$\frac{\text{فر}^2\text{ر}}{\text{فرت}^2} - \text{ر}\left(\frac{\text{فرط}}{\text{فرت}}\right)^2 = -\text{فہ}(\text{ر}) \quad \ldots\ldots\ldots (۵)$$

میں (۲) اور (۴) سے اندراج کرنے پر

$$\frac{\text{فر}^2\text{ع}}{\text{فرط}^2} + \text{ع} = \frac{\text{ف}(\text{ع})}{\text{ھ}^2\text{ع}^2} \quad \ldots\ldots\ldots (۶)$$

(۲۶۴) جہاں $\text{ف}(\text{ع}) = \text{فہ}(\text{ر}) = \text{فہ}\left(\frac{1}{\text{ع}}\right) \quad \ldots\ldots\ldots (۷)$

مساوات (۶) مطلوبہ تفرقی مساوات ہے۔
اگر ہم اِس کو شکل

$$\text{ف}(\text{ع}) = \text{ھ}^2\text{ع}^2\left(\frac{\text{فر}^2\text{ع}}{\text{فرط}^2} + \text{ع}\right) \quad \ldots\ldots\ldots (۸)$$

میں لکھیں تو اس سے قوت کا وہ قانون معلوم ہوگا جس کے تحت ایک دیا ہوا مدار مرتسم ہوسکتا ہے۔

(۶) کا پہلا تکملہ فوراً حاصل ہو سکتا ہے۔ چنانچہ $2\,\frac{\text{فرع}}{\text{فرط}}$ سے ضرب دینے پر

$$2\,\frac{\text{فرع}}{\text{فرط}}\,\frac{\text{فر}^2\text{ع}}{\text{فرط}^2} + 2\text{ع}\,\frac{\text{فرع}}{\text{فرط}} = \frac{2\,\text{ف}(\text{ع})}{\text{ھ}^2\text{ع}^2}\,\frac{\text{فرع}}{\text{فرط}}$$

اس لیے $\text{ھ}^2\left\{\left(\frac{\text{فرع}}{\text{فرط}}\right)^2 + \text{ع}^2\right\} = 2\int\frac{\text{ف}(\text{ع})\,\text{فرع}}{\text{ع}^2} + \text{ج} \quad \ldots\ldots\ldots (۹)$

یہ فی الحقیقت دفعہ ۸۴ (۳) کے مماثل ہے کیونکہ علم الاحصا کے ایک مشہور ضابطہ سے

$$\left(\frac{\text{فر}۶}{\text{فرطہ}}\right)^۲ + ۶^۲ = \frac{۱}{\text{ع}^۲} \qquad \text{(۱۰)}$$

اور

$$\int \frac{\text{ف}(۶)}{۶^۲}\,\text{فر}۶ = -\int \text{فہ}(\text{ر})\,\text{فرر} \qquad \text{(۱۱)}$$

(۹) کا مزید تکمل بالعموم مشکل ہے۔ لیکن

$$\text{ف}(۶) = \text{مہ}\,۶^۲ \qquad \text{(۱۲)}$$

کی صورت میں جو معکوس مربع کا قانون ہے تفرقی مساوات سادہ شکل

$$\frac{\text{فر}^۲۶}{\text{فرطہ}^۲} + ۶ = \frac{\text{مہ}}{\text{ھ}^۲} \qquad \text{(۱۳)}$$

اختیار کرتی ہے۔ یہ مساوات دفعہ ۴۲ (۲) کے مماثل ہے، صرف ترقیم کا فرق ہے، چنانچہ اس کا حل

$$۶ = \frac{\text{مہ}}{\text{ھ}^۲} + \text{ا}\,\text{جم}(\text{طہ} - \text{عہ}) \qquad \text{(۱۴)}$$

ہے جہاں مستقل ا اور عہ اختیاری ہیں۔ اگر ہم

$$\text{ل} = \frac{\text{ھ}^۲}{\text{مہ}} \qquad \text{(۱۵)}$$

رکھیں تو یہ

$$\text{ل}۶ = ۱ + \text{ز}\,\text{جم}(\text{طہ} - \text{عہ}) \qquad \text{(۱۶)}$$

۲۶۵ کے معادل ہے جو ماسکہ کے حوالے سے ایک مخروطی کی قطبی مساوات ہے۔ دیکھو دفعہ ۷۶۔

مثال ۱۔ (۱) کو خفیف طور پر بگڑی ہوئی دائری حرکت پر استعمال کرنے میں فرض کرو کہ اختصاراً ہم

$$\text{ف}(۶) = ۶^۲\,\text{فا}(۶) \qquad \text{(۱۷)}$$

لکھتے ہیں تو مساوات

$$\frac{\text{فر}^{2}\,\text{ہ}}{\text{فرط}^{2}} + \text{ہ} = \frac{\text{فا}(\text{ہ})}{\text{ھ}^{2}} \qquad (۱۸)$$

ہو جاتی ہے۔ یہ ہ = ک سے پوری ہوتی ہے اگر

$$\text{ھ}^{2}\,\text{ک} = \text{فا}(\text{ک}) \qquad (۱۹)$$

یہ نصف قطر ک^{-1} کے دائری مدار کے لیے شرط ہے۔

اب اگر ہم

$$\text{ہ} = \text{ک} + \text{ضا} \qquad (۲۰)$$

رکھیں جہاں ضا کو چھوٹا فرض کیا گیا ہے تو مساوات (۱۸)،

$$\frac{\text{فر}^{2}\,\text{ضا}}{\text{فرط}^{2}} + \left(۱ - \frac{\text{فاَ}(\text{ک})}{\text{ھ}^{2}}\right)\text{ضا} = ۰$$

یا

$$\frac{\text{فر}^{2}\,\text{ضا}}{\text{فرط}^{2}} + \left\{۱ - \frac{\text{ک}\,\text{فاَ}(\text{ک})}{\text{فا}(\text{ک})}\right\}\text{ضا} = ۰ \qquad (۲۱)$$

ہو جاتی ہے بشرطیکہ ک کو اس طرح مقرر کیا گیا ہو کہ وہ (۱۹) کو پورا کرے۔ اگر ضا کا سر مثبت ہو تو ہم

$$۱ - \frac{\text{ک}\,\text{فاَ}(\text{ک})}{\text{فا}(\text{ک})} = \text{م}^{2} \qquad (۲۲)$$

رکھ سکتے ہیں اور

$$\text{ضا} = \text{ج}\ \text{جم}\ \text{م}\,(\text{ط} - \text{بہ}) \qquad (۲۳)$$

حاصل کر سکتے ہیں جہاں مستقل ج اور بہ اختیاری ہیں۔ اس لیے اوجی زاویہ $\frac{\pi}{\text{م}}$ ہے۔

$$\text{اگر ف}(\text{ہ}) = \text{مہ}\,\text{ہ}^{\text{س}}،\ \text{فا}(\text{ہ}) = \text{مہ}\,\text{ہ}^{\text{س}-۲} \qquad (۲۴)$$

$$\text{تو}\quad \text{م}^{2} = ۳ - \text{س} \qquad (۲۵)$$

اگر $\text{س} < ۳$ اور یہ دفعہ ۸۸ کے مطابق ہے۔

مثال ۲۔ یہ دیا گیا ہے کہ مدار

ع = خہ (طہ) ....(۲۶)

مرکزی قوت ف (ع) کے تحت مرتسم ہو سکتا ہے۔ وہ قانون معلوم کرو جس کے تحت مدار

عَ = خہ (طہَ) ....(۲۷)

مرتسم ہو سکے جہاں عَ = ع اور طہَ = لہ طہ۔ اِن دو مداروں کے متناظر نقطوں پر سمتی قطروں کی قیمتیں مساوی ہیں اور سمتی زاویے ایک مستقل نسبت میں ہیں۔ اگر ان مداروں کو مرتسم کرنے والے دو ذرّے ہمیشہ متناظر محلوں پر رہیں تو ہم کہہ سکتے ہیں کہ دوسرا ذرہ ایک ایسا مدار مرتسم کرتا ہے جو وہی ہے جو پہلے ذرہ کا ہے لیکن اس کے لحاظ سے شرح (لہ ۔ ۱) طہٖ سے گردش کرتا ہے جو ہمیشہ پہلے ذرہ کی زاویائی رفتار (اس کے مدار میں) کے متناسب ہے۔

(۲۶۶) اگر اِن دو صورتوں میں زاویائی معیار حرکت کے مستقل ھ ، ھَ ہوں تو

طہٖ = ھ ع^۲ ، طہَٖ = ھَ عَ^۲ ....(۲۸)

اور اس لیے

ھَ = لہ ھ ....(۲۹)

(۸) کی رو سے مطلوبہ قانون

ف (عَ) = ھَ^۲ عَ^۲ (ف^۲عَ / فطہَ^۲ + عَ) = ھ^۲ ع^۲ (ف^۲ع / فطہ^۲ + لہ^۲ ع)

= ف (ع) + (لہ^۲ ۔ ۱) ھ^۲ ع^۳ ......(۳۰)

اس لیے ابتدائی مرکزی قوت میں یہ ترمیم ہونی چاہیے کہ ایک رقم کا اضافہ کیا جائے جو فاصلہ کے مکعب کے بالعکس متناسب ہو۔

یہ ”گرداں مداروں“ کے متعلق نیوٹن کا مسئلہ ہے جس کو صاحب موصوف نے ایک ہندسی طریقہ سے حاصل کیا تھا[۱]

[۱] Principia, lib. i., Prop. xliii.

۹۱۔ معکوس مکعب کا قانون۔

متعدد مقامات پر ہم یہ بتا چکے ہیں کہ معکوس مکعب کا قانون ایک خاص اہمیت رکھتا ہے۔ اِس سبب سے اور اس واقعہ سے کہ وہ اُن چند صورتوں میں سے ایک ہے جن میں مختلف ممکن مداروں کی شکلیں بغیر دقت کے حاصل ہوتی ہیں وہ بڑی ریاضیاتی دلچسپی کا موجب ہے۔ کوٹس[1] نے اس کی خاص طور پر تحقیق کی چنانچہ مدار "کوٹس کے لولب" کے طور پر موسوم ہیں۔

اِس قانون کی طبعی خصوصیتیں یہ ہیں کہ زاوئی معیار حرکت تمام دائری مداروں کے لیے وہی ہوتا ہے اور یہ کہ دائری مدار میں رفتار اُس **فاصل** رفتار کے مساوی ہوتی ہے جو مرکز سے فاصلہ کے تناظر ہے۔ کیونکہ اگر

$$\text{ف}(\text{ر}) = \frac{\text{مہ}}{\text{ر}^3} \qquad \text{(1)}$$

تو نصف قطر ا کے ایک دائِری مدار میں رفتار و،

$$\frac{\text{مہ}}{\text{ا}^3} = \frac{\text{و}^2}{\text{ا}} \qquad \text{(2)}$$

سے حاصل ہوتی ہے اور اس لیے

$$\text{ھ}^2 = \text{و}^2\,\text{ا}^2 = \text{مہ} \qquad \text{(3)}$$

نیز فاصلہ ا کے لیے فاصل رفتار

$$\text{و}^2 = 2\int_{\text{ا}}^{\infty} \text{ف}(\text{ر})\,\text{فر} = \frac{\text{مہ}}{\text{ا}^2} \qquad \text{(4)}$$

---

[1] روجر کوٹس (۱۶۸۲ء تا ۱۷۱۶ء) پروفیسر علم ہیئت کیمبرج ۱۷۰۶ء تا ۱۷۱۶ء اور پرنسپیا (Principia) کی دوسری اشاعت کے اڈیٹر۔

سے حاصل ہوتی ہے اور اس لیے نصف قطر ا کے ایک دائری مدار میں رفتار کے مساوی ہے جیسا کہ (۲) سے متعین ہوتی ہے۔ (۲۴۷)

مداروں کو متعین کرنے کے لیے ہم بالعموم دفعہ ۹۶ کی تفرقی مساوات (۶) میں

$$\text{ف}(\text{و}) = \text{مہ}\,\text{و}^{۳} \qquad \text{(۵)}$$

رکھتے ہیں اور

$$\frac{\text{فز}^{۲}\,\text{و}}{\text{فز}\,\text{ط}^{۲}} + \left(۱ - \frac{\text{مہ}}{\text{ہ}^{۲}}\right)\text{و} = ۰ \qquad \text{(۶)}$$

حاصل کرتے ہیں۔

اول فرض کرو کہ زاویٔی معیار حرکت اس سے بڑا ہے جو ایک دائری مدار کے لیے درست ہے اور اس لیے

$$\text{ہ}^{۲} > \text{مہ} \qquad \text{(۷)}$$

اس لیے کسی نقطہ پر رفتار فاصل رفتار سے بڑی ہے کیونکہ ع > ر کی وجہ سے $\frac{\text{ہ}}{\text{ع}} > \sqrt{\frac{\text{مہ}}{\text{ر}}}$ اگر ہم

$$۱ - \frac{\text{مہ}}{\text{ہ}^{۲}} = \text{م}^{۲} \qquad \text{(۸)}$$

رکھیں تو (۶) کا حل

$$\text{و} = \text{ا}\,\text{جم}\,\text{م}\,\text{ط} + \text{ب}\,\text{جب}\,\text{م}\,\text{ط} \qquad \text{(۹)}$$

ہے یا اگر ط کے مبدا کو مناسب طور پر منتخب کیا جائے تو

$$\text{ا}\,\text{و} = \text{جم}\,\text{م}\,\text{ط} \qquad \text{(۱۰)}$$

اس لیے ر کی ایک اقل قیمت ہے اور اس کے متناظر خط ط = ۰ ایک خط او ج ہے۔ دو متقارب ہیں جن کی سمتیں م ط = ± $\frac{۱}{۲}\pi$ سے حاصل ہوتی ہیں۔ اس لیے مدار میں حرکت کی سمت کل زاویہ $\frac{\pi}{\text{م}} - \pi$ میں سے گردش کرتی ہے۔ قوت کے مرکز سے ان متقاربوں کے فاصلے $\frac{\text{ا}}{\text{م}}$ کے مساوی ہیں۔

شکل ۸۶ سے مدار کی متغیر شکلوں کو جیسے جیسے ہ، ∞ سے $\sqrt{\text{مہ}}$ تک

گھٹتا ہے مرتسم کرنے میں مدد ملیگی۔ جب، ھ = ∞ تو م = ۱ اور راستہ ایک خط مستقیم ہے، اس کو شکل میں اس خط سے واضح کیا گیا ہے جس پر (۱) کا نشان ہے ۔۔۔ منحنی (۲)، (۳)، (۴)، اور (۵) م کی گھٹتی ہوئی قیمتوں کے علی الترتیب ۳/۵، ۱/۲، ۳/۸، ۱/۴ کے متناظر ہیں، اس لیے گردش شدہ زاویے °۱۲۰، °۱۸۰، °۳۰۰، °۵۴۰ ہیں۔ م کی قیمت جتنی چھوٹی ہوتی جائیگی مبدا کے گرد لفیفوں کی تعداد بڑھتی جائیگی۔

جب زاویٔ معیار حرکت کی قیمت ٹھیک "دائری قیمت" ہوتی ہے تو

ھ۲ = مہ .... (۱۱)

(۲۶۸) اور اس لیے فر۲ع / فرط۲ = ۰، ع = ا ط + ب .... (۱۲)

اگر ا = ۰ تو ایک دائرہ حاصل ہوتا ہے جس کو پچھلی شکلوں کی ایک انتہا سمجھا جا سکتا ہے۔ لیکن اگر ا ≠ ۰ تو "مکانی لولب" حاصل ہوتا ہے۔ اِن کو مداروں کے اُن دو سلسلوں کے ابتدائی نقطے سمجھنا چاہیے جن کا ذکر آئندہ آئیگا۔

بالآخر وہ صورتیں ہیں جن میں زاویٔ معیار حرکت کی قیمت دائری قیمت سے کم ہوتی ہے اور اس لیے

ھ۲ < مہ .... (۱۳)

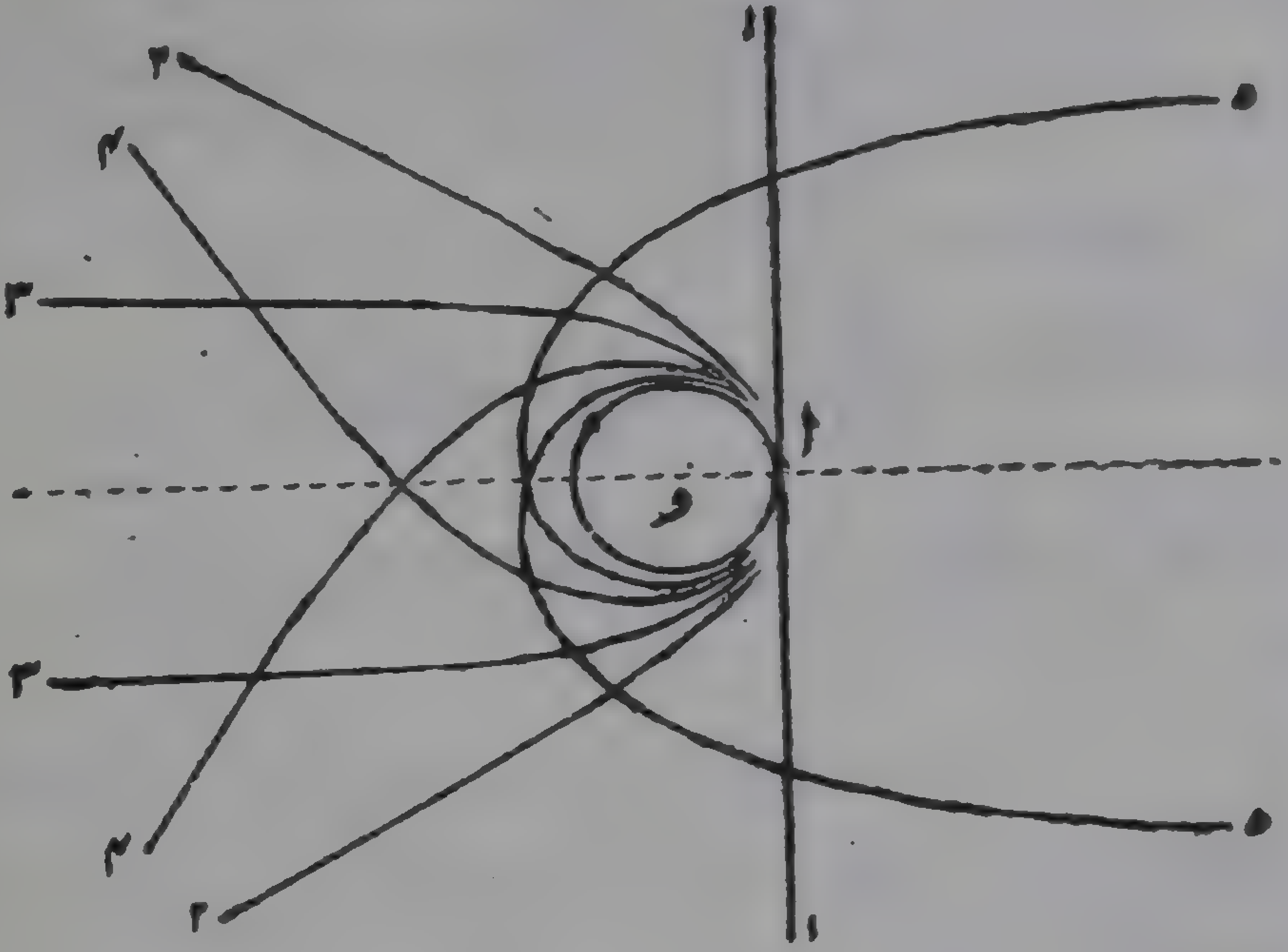
اب اگر ہم مہ / ھ۲ − ۱ = ن۲ .... (۱۴)

رکھیں تو ع = ا و^ن ط + ب و^-ن ط .... (۱۵)

(۲۶۹) نقطہ ط = ۰ پر

ع = ا + ب، فرع / فرط = ن (ا − ب) .... (۱۶)

اور اس لیے (۱۴) کی رو سے



شکل ۸۶

$$\text{و}^2 - \text{مہ}\,\text{ع}^2 = \frac{\text{ھ}^2}{\text{ع}^2} - \text{مہ}\,\text{ع}^2 = \text{ھ}^2 \left\{ \text{ع}^2 + \left(\frac{\text{فرع}}{\text{فرطہ}}\right)^2 \right\} - \text{مہ}\,\text{ع}^2$$

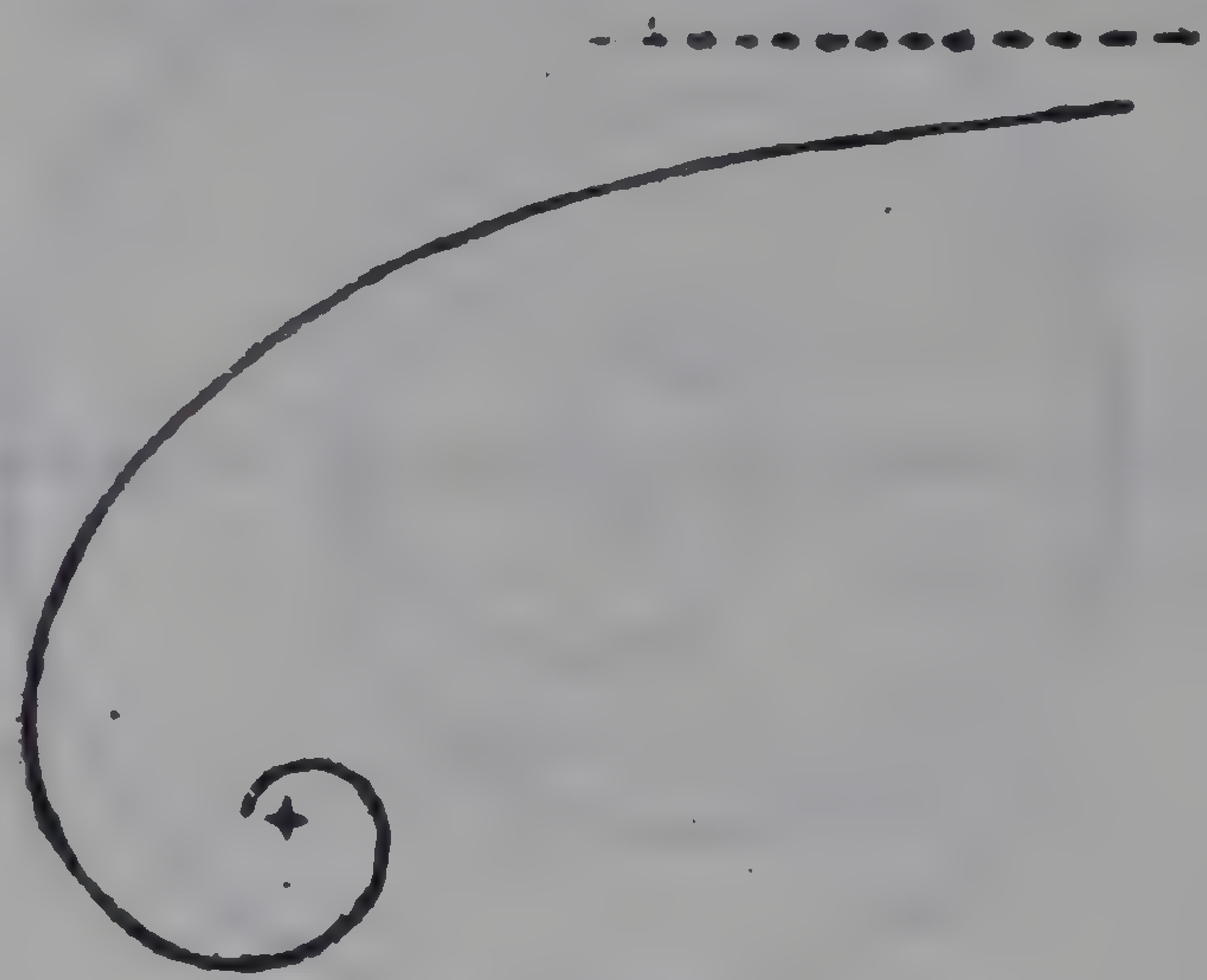
$$= \text{ھ}^2 \left\{ \left(\frac{\text{فرع}}{\text{فرطہ}}\right)^2 - \text{ن}^2\,\text{ع}^2 \right\} = -4\,\text{ن}^2\,\text{ھ}^2\,\text{ا}\,\text{ب} \quad \ldots\ldots (17)$$

پس ا اور ب کی علامتیں مختلف ہونگی یا وہی ہونگی بموجب اس کے کہ رفتار فاصل رفتار سے بڑی یا چھوٹی ہو۔

پہلی صورت میں ہم طہ کے مبدا کو مناسب طور پر منتخب کرکے مساوات (۱۵) کو شکل

$$\text{ا}\,\text{ع} = \text{جبزن}\;\text{طہ} \quad \ldots\ldots (18)$$

میں تحویل کر سکتے ہیں۔ چونکہ طہ = ۰ کے لیے ۶ = ۰ یا ز = ∞ اس لیے ایک



شکل ۸۷

متقارب ابتدائی خط کے متوازی ہے۔ چونکہ طہ = ∞ کے لیے ۶ = ∞ اس لیے راستہ مبداء کے قریب متقاربأ پہنچتا ہے چنانچہ وہ اس کے گرد تنگ اور زیادہ تنگ لولب ہوتے ہوئے مڑتا جاتا ہے۔ شکل ۸۷ میں اس نمونہ کا ایک مدار دکھایا گیا ہے۔

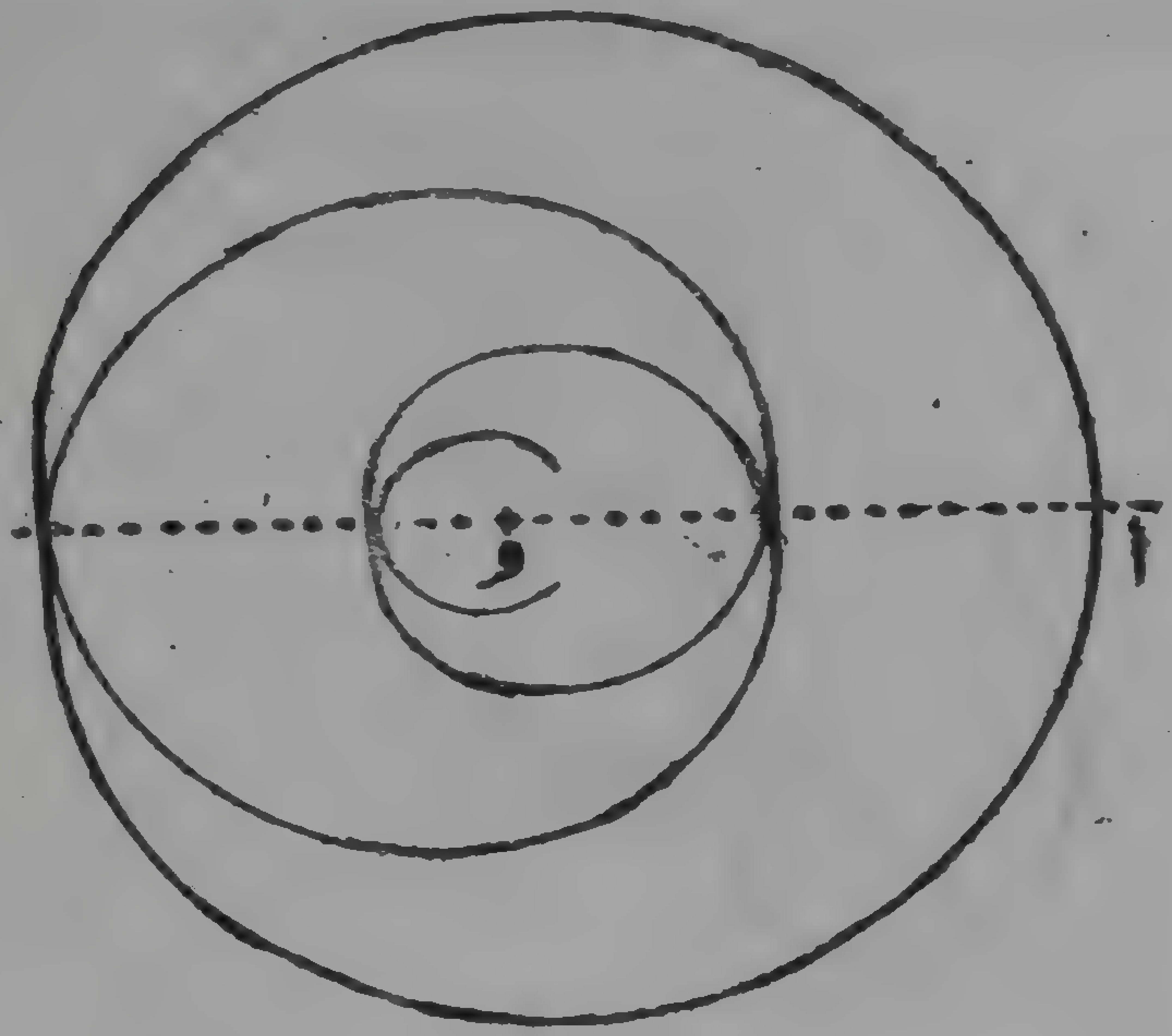
اگر ا اور ب کی علامتیں وہی ہوں تو مساوات (۱۵) کو شکل (۴۷۰)

ا ۶ = جمزن طہ ......(۱۹)

میں تحویل کیا جا سکتا ہے۔ اب ر کی ایک اعظم قیمت (ا) ہے اور متناظر نصف قطر (طہ = ۰) ایک خط اوج ہے۔ چونکہ طہ = ± ∞ کے لیے ۶ = ∞ یا ر = ۰ اس لیے ذرہ مبداء کے گرد گھٹتے ہوئے لفیفوں میں گردش کرتا ہے جیسا کہ پچھلی صورت میں[1] دیکھو شکل (۸۸)۔

---

[1] شکلوں ۸۶، ۸۸ سے مدار کے ان مختلف نمونوں کا اظہار ہوتا ہے جو پیدا ہوتے ہیں (بقیہ بر صفحہ ۴۰۸)



شکل ۸۸

اگر ا اور ب معدوم ہوں تو آیا

$$\text{ا۶} = \text{و}^{\text{م ط}} \quad \text{یا} \quad \text{ا۶} = \text{و}^{-\text{م ط}} \qquad (۲۰)$$

اور اس لیے مدار ایک مساوی الزاویہ لولب ہے۔ ہم پہلے دیکھ چکے ہیں کہ یہ ایک فاصل مدار ہے۔

پس یہ معلوم ہوتا ہے کہ سوائے ایک دائری مدار کی صورت کے باقی تمام صورتوں میں ایک ذرہ جو معکوس مکعب کے قانون کے تحت حرکت کر رہا ہو بالآخر

(بقیہ حاشیہ صفحہ ۴۰۷) جب کہ ذرہ کو ایک اوج (ا) سے رفتار کے مختلف مدارج کے ساتھ پھینکا گیا ہو۔ شکل ۸۶ سے وہ صورتیں معلوم ہوتی ہیں جہاں پھینکنے کی رفتار دائری رفتار سے بڑی ہے اور شکل ۸۸ سے (ذرا بڑے پیمانہ پر) وہ صورت جہاں وہ چھوٹی ہے۔

لا تناہی تک بچ نکلیگا اور مرکز میں متقارباً گر یگا۔ اس لیے دائری مدار کو غیر قائم سمجھنا چاہیے جیسا کہ دفعہ ۷۰ میں پہلے ثابت کیا جا چکا ہے۔ (۲۷۱)

مثال۔

$$ف\,(ع) = مہ\, ع^{2} + نہ\, ع^{3} \qquad (۲۱)$$

کی صورت بھی جس میں قوت جزؤ معکوس مربع کے اور جزؤ معکوس مکعب کے بدلتی ہے آسانی سے تکمل پذیر ہے۔ چنانچہ

$$\frac{فر^{2} ع}{فر ط^{2}} + \left(1 - \frac{نہ}{ھ^{2}}\right) ع = \frac{مہ}{ھ^{2}} \qquad (۲۲)$$

فرض کرو کہ نہ < $ھ^{2}$ اور

$$1 - \frac{نہ}{ھ^{2}} = م^{2} \qquad (۲۳)$$

تو

$$ع = \frac{مہ}{ھ^{2} - نہ} + ج\; جم\,(م ط - ھ) \qquad (۲۴)$$

اسی کی شکل

$$ل ع = 1 + ز\; جم \left\{ ط - (1 - م)\, ط - ھ \right\} \qquad (۲۵)$$

ہے اور اس لیے اس کو ایک مخروطی کی مساوات سمجھا جا سکتا ہے جو ماسکہ کے گرد ایسی زاوئی رفتار سے گردش کرتا ہے جو سمتی قطر کے متناسب ہے اور خط اوج کا محدو

$$(1 - م)\, ط + ھ$$

ہے۔ یہ بیان زیادہ درست ہے، جس قدر م اکائی کے قریب آتا ہے نہ کی قیمت چھوٹی ہوتی جاتی ہے۔ دیکھو دفعہ ۹۰ مثال ۲۔

کلیرو[1] نے ایک زمانہ میں شکل ۲۱ کے قانون قوت کو قانون تجاذب کے طور پر تجویز کیا تھا تاکہ اُس فرق کی توجیہ ہوجائے جو قمری مدار کے اوج کی فی الواقع مشاہدہ کردہ آگے بڑھنے والی حرکت (ایک گردش میں تقریباً $3°$) اور اُس میں ہے جو خللوں کو محسوب کرنے سے حاصل ہوئی تھی جس حد تک کہ اس زمانے میں حساب لگانا ممکن تھا۔ لیکن بعد ازاں خود کلیرو نے اس کا اقبال کیا کہ عمل حساب ناقص تھے اور نیوٹن کے قانون کی بنیاد پر زیادہ

[1] A.C.Clairaut (1713-65). His *Theorie de la lune* was published in 1752

احتیاط کے ساتھ حساب لگانے میں ایسا نتیجہ حاصل ہوتا ہے جو مشاہدوں کے مطابق ہے۔

مثالیں (۲۰)

۱۔ اگر ایک ذرّہ ایک مستقل قوت کے تحت ہو جو سمت حرکت کے ساتھ ایک مستقل زاویہ بنائے تو ذرّہ کا راستہ ایک مساوی الزاویہ لولب ہوگا۔

۲۔ ایک ذرّہ جو مرکز کے گرد ایک ناقص مرتسم کر رہا ہے حرکت کی سمت میں ایک چھوٹا دھکہ مف و حاصل کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ صدر نیم محوروں کے طولوں میں تبدیلیاں

$$\frac{\text{مف}\,ا}{ا} = \frac{\text{مف}\,و}{و}\,\text{جب}^{2}\,\text{ف}\ ،\quad \frac{\text{مف}\,ب}{ب} = \frac{\text{مف}\,و}{و}\,\text{جم}^{2}\,\text{ف}$$

سے حاصل ہوتی ہیں جہاں ف خارج المرکز زاویہ ہے۔

(۲۷ ۳۔ ثابت کرو کہ اگر ایک مرکز دار مدار کے مساوی المیلان میں مساوی وقتوں میں قطب کے گرد مساوی رقبے مرتسم ہوں تو قوت کو فاصلہ کے متناسب ہونا چاہیے۔

۴۔ ثابت کرو کہ ایک مرکز دار مدار کا مساوی المیلان، قوت کے مرکز کے لحاظ سے مدار کے متکافی قطبی کے مشابہ ہوتا ہے۔

۵۔ ثابت کرو کہ ایک دائری مدار کی صورت میں جو قوت کے ایک مرکز کے گرد مرتسم ہو کسی دیے ہوئے نقطہ پر مساوی المیلان ایک ناقص، مکافی، یا زائد ہوگا بموجب اس کے کہ نقطہ دائرے کے محیط کے اندر، اس پر یا اس کے باہر ہو۔

۶۔ ثابت کرو کہ مدار

$$ر^{ن} = ا^{ن-1}\,ع$$

کے لیے قوت کا قانون $\text{ف}(ر) = \frac{\text{مُ}}{ر^{2ن+1}}$ ہے۔ کیا یہ اس قانون کے لیے کبھی عام مدار ہے۔

۷۔ ثابت کرو کہ اگر ایک مرکز دار مدار میں قوت کا قانون

$$\frac{مہ}{ر^2}\ \text{و}\ \overline{\text{ک ر}}$$

ہو جہاں ک چھوٹا ہے تو ایک تقریبی دائری مدار میں خط اوج پر گردش میں زاویہ π ک ا میں سے آگے بڑھیگا اگر ا مدار کا نصف قطر ہو۔

۸۔ اگر پچھلے سوال میں توانائی بالقوہ

$$-\frac{مہ}{ر}\ \text{و}\ \overline{\text{ک ر}}$$

ہو تو آگے بڑھنے کا زاویہ تقریباً π ک² ا² ہوگا۔

۹۔ ثابت کرو کہ دفعہ ۸۸ کی شرطوں کے تحت دو اوجی فاصلے مساوی نہیں ہوسکتے جب تک کہ مدار دائری نہو۔

۱۰۔ ایک ذرّہ کو جو مرکزی اسراع $\frac{مہ}{ر^2}$ + ف کے تحت ہے فاصلہ ا پر ایک اوج سے رفتار $\sqrt{\frac{مہ}{ا}}$ کے ساتھ پھینکا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ اس کے بعد کسی وقت ت پر

$$ر = ا - \frac{1}{2}\ ف\ ت^2$$

۱۱۔ ثابت کرو کہ معکوس مکعب کا قانون ہی صرف وہ قانون ہے جس سے کسی فاصلہ پر فاصل رفتار اس رفتار کے مساوی حاصل ہوتی ہے جو اسی فاصلہ پر ایک دائرہ میں ہے۔

۱۲۔ ثابت کرو کہ ایک مرکز دار مدار میں

$$\frac{فر^2\,(ر^2)}{فر\,ت^2} = ج - \frac{2}{ر}\,\frac{فر}{فر\,ر}\left\{ر^2 \int فہ\,(ر)\,فر\,ر\right\}$$

صورتوں فہ (ر) = مہ ر اور فہ (ر) = $\frac{مہ}{ر^2}$ کا امتحان کرو۔

(۲۷۳ ۱۳۔ ایک حلقہ ایک پہیہ کے آرے میں پھسل سکتا ہے۔ پہیہ اپنے مرکز کے گرد مستقل زاویۂ رفتار سہ کے ساتھ گردش کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ اگر حلقہ مرکز سے فاصلہ ا پر سکون سے حرکت کرے تو اس کے بعد کسی وقت ت پر اس کا فاصلہ ا جز سہ ت ہوگا۔

۱۴۔ دو ذرّے م۱، م۲ ایک ڈوری سے مربوط ہیں اور مساوی رفتاروں و کے ساتھ اس کے علی القوائم حرکت کر رہے ہیں۔ اگر ڈوری ایک چکنی میخ سے ٹکرائے جو ڈوری کے طول کو مقطوعوں ا۱، ا۲ میں تقسیم کرتی ہے تو ابتدائی تناؤ معلوم کرو۔

$$\left[\frac{م_1 م_2 (ا_1 + ا_2) و^2}{(م_1 + م_2) ا_1 ا_2}\right]$$

۱۵۔ فہ (ر) = مہ ر = $\frac{مہ}{ر^6}$ کی صورت میں مرکز دار مداروں کی قطبی تفرقی مساواتوں (دفعہ ۹۰ (۶)) کا حل معلوم کرو۔

۱۶۔ ایک ذرہ کسی مرکزی اسراع $\frac{مہ}{ر^2}$ کے تحت نصف قطر ا کا ایک دائری مدار مرتسم کر رہا ہے۔ اس پر ایک چھوٹی مستقل قوت ف کی وجہ سے جو سمتی قطر کے علی القوائم ہے خلل واقع ہوتا ہے۔ ثابت کرو کہ سمتی قطر اور زاویٔ رفتار میں مابعد تبدیلیاں مساواتوں

$$ر = ا + \frac{۲ ف ت}{ن} ، \quad ط = ن - \frac{۳ ف ت}{و}$$

سے حاصل ہوتی ہیں۔

۱۷۔ قوت کا وہ قانون معلوم کرو جس کے تحت قلب نما ر = ا (۱ + جم ع) مرتسم ہو سکے جہاں قوت کا مرکز قطب پر ہو۔ زاویٔ معیار حرکت، مطلق اسراع اور طول ا کے درمیان رشتہ معلوم کرو۔

۱۸۔ اگر ایک مرکز دار مدار میں دو اوجی فاصلے ا، ب (ا > ب) ہوں تو ثابت کرو کہ فاصلہ ر پر رفتار مساوات

$$و^2 = \frac{۲ ا^2}{ب^2 - ا^2} \int_{ا}^{ر} فہ (ر) فر + \frac{۲ ب^2}{ب^2 - ا^2} \int_{ر}^{ب} فہ (ر) فر$$

سے حاصل ہوتی ہے۔

۱۹۔ ثابت کرو کہ اگر ایک ذرہ قوت کے دو میدانوں ($لا_1$، $ما_1$) اور ($لا_2$، $ما_2$) کے تحت وہی آزاد راستہ مرتسم کر سکے تو وہ وہی راستہ میدان

$(\text{لا}_1 + \text{لا}_2 ، \text{ھا}_1 + \text{ھا}_2)$ کے تحت مرتسم کر سکتا ہے بشرطیکہ وہ ایک دیے ہوئے نقطہ ا سے رفتار $\sqrt{\text{و}_1^2 + \text{و}_2^2}$ کے ساتھ متحرک کیا جائے جہاں پہلی دو صورتوں میں ا پر کی رفتاریں و_1 ، و_2 ہیں۔

ثابت کرو کہ ایک مکافی، محور کے متوازی اسراع ج اور ماسکہ سے اسراع $\frac{\text{ج ا}^2}{\text{ر}}$ کے متحدہ اثر کے تحت مرتسم ہو سکتا ہے اور یہ کہ راس پر رفتار معدوم ہوتی ہے۔ [وتر خاص ۴ ا ہے]۔

بارھواں باب (۲۷۴

انتشاری قوتیں

۹۲۔ رفتار کے متناسب مزاحمت۔

چند مسئلوں کے سوا جن میں پھسلواں رگڑ کا لحاظ رکھا گیا ہے اب تک ہم یہ مانتے آئے ہیں کہ حیلی توانائی کا تحفظ ان مختلف سوالات میں صادق آتا ہے جن پر ہم غور کر چکے ہیں۔ وہ قوتیں جو انتشاری قوتوں کے طور پر موسوم ہیں اور جو توانائی کو صریحاً حیلی شکلوں کے سواء دوسری شکلوں میں تبدیل کرتی ہیں وہ نظر انداز کی گئی ہیں۔

جب ایک جسم مزاحم واسطہ کو طے کرتا ہے تو ٹھیک طور پر کیا واقع ہوتا ہے اس پر نظری طور پر بحث کرنا مشکل ہے، تجربہ سے کوئی ایسا سادہ قانون حاصل نہ ہو سکا جو تمام رفتاروں کے لیے درست ہوتا۔ ہم صرف ایک یا دو سادہ تجربی مفروضوں کے نتیجوں کا امتحان کرنے کی یہاں کوشش کر سکتے ہیں، ان میں سے ہر ایک بعض شرطوں کے تحت غالباً بڑی حد تک درست ہے۔

ہم اول خطی حرکت کی صورت لیتے ہیں جو واسطہ کی مزاحمت کے علاوہ کسی اور قوت کے تحت نہیں ہے۔ تب حرکت کی مساوات نمونہ

$$\frac{\text{فرع}}{\text{فرت}} = -\,\text{فہ}\,(\text{ع})\text{، یا }\ \text{ع}\,\frac{\text{فرع}}{\text{فرلا}} = -\,\text{فہ}\,(\text{ع}) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

کی ہوگی جہاں فہ (۶)، رفتار ۶ کا کوئی تفاعل ہے۔ بعض اوقات مساوات کی دونوں شکلیں استعمال کرنے اور ہر ایک کا پہلا تکملہ حاصل کرنے میں سہولت ہوتی ہے۔ پہلی شکل سے ۶ اور ت میں ایک رشتہ حاصل ہوتا ہے جس میں ایک اختیاری مستقل ہوتا ہے، چنانچہ

$$\frac{1}{\text{فہ}(۶)}\,\frac{\text{فر}۶}{\text{فرت}} = -1،$$

$$\int \frac{\text{فر}۶}{\text{فہ}(۶)} = -\text{ت} + \text{ا} \quad ......(۲)$$

دوسری شکل سے ۶ اور لا کے درمیان ایک رشتہ ملتا ہے جس میں دوسرا (۲۷۵)
اختیاری مستقل شریک رہتا ہے، چنانچہ

$$\frac{۶}{\text{فہ}(۶)}\,\frac{\text{فر}۶}{\text{فرلا}} = -1،$$

$$\int \frac{۶\,\text{فر}۶}{\text{فہ}(۶)} = -\text{لا} + \text{ب} \quad ......(۳)$$

اب (۲) اور (۳) سے ۶ کو ساقط کرنے سے لا اور ت میں رشتہ حاصل ہوتا ہے جس میں دو اختیاری مستقل شریک رہتے ہیں جن کو ابتدائی شرطوں کے پورا کرنے میں استعمال کیا جاسکتا ہے۔

تفاعل فہ (۶) کو بلاشبہ مثبت ہونا چاہیے اور ۶ کے [illegible] معدوم ہونا چاہیے۔ ریاضی کے نقطۂ نظر سے ایک معقول مفروضہ یہ ہے کہ ۶ کی ایک خاص سمت کے لیے وہ ۶ کی قوتوں کے ایک سلسلہ میں پھیلایا جاسکے، مثلاً

$$\text{فہ}(۶) = \text{ا}\,۶ + \text{ب}\,۶^{2} + \text{ج}\,۶^{3} + \ldots \quad ......(۴)$$

اور اس لیے یہ کہ جب '۶' کافی چھوٹا ہو تو پہلی رقم اہم ترین ہو۔

اس طرح ہم مساواتوں

$$\frac{\text{فر}۶}{\text{فرت}} = -\text{ک}\,۶،\quad \frac{\text{فر}۶}{\text{فرلا}} = -\text{ک} \quad ......(۵)$$

پر پہنچتے ہیں - اس لیے

لوک ع = - ک ت + ا ، ع = - ک لا + ب ....(۶)

اب اگر ہم یہ مان لیں کہ ت = ۰ کے لیے لا = ۰ اور ع = ع۰ تو ا = لوک ع۰ اور ب = ع۰ اور اس لیے

ع = ع۰ قو^(-ک ت) ، ع = ع۰ - ک لا ....(۷)

ع کو ساقط کرنے سے

لا = (ع۰ / ک) (۱ - قو^(-ک ت)) ....(۸)

اگر (۷) میں ع = ۰ یا (۸) میں ت = ∞ رکھا جائے تو لا = ع۰ / ک
پس مزاحمت کے اس قانون کی بموجب فاصلہ طے شدہ پر ایک حد ہے -

مقدار ک ایک وقت کے متکافی ہے یعنے اُس وقت کے جس میں رفتار نسبت ۱/قو میں گھٹتی ہے - اس وقت کو تہ سے تعبیر کیا جائے تو

لا = ع۰ تہ (۱ - قو^(-ت/تہ)) ....(۹)

۹۳ - مستقل آگے بڑھانیوالی قوت مع مزاحمت - (۲۲۶

جب زیر بحث ذرہ ایک مستقل آگے بڑھانے والی قوت اور نیز واسطہ کی مزاحمت کے تحت ہو تو ساوات شکل

فرع / فرت = ف - فہ (ع) ....(۱)

اختیار کرتی ہے - اب چونکہ فہ (ع) ، ع کے ساتھ لا انتہا[۱] بڑھتا ہے اس لیے ایک

---

[۱] پایاب پانی میں کشتیوں کی موج خیز مزاحمت کی صورت میں اس بیان کے خلاف بعض مستثنیات ہیں لیکن یہاں ان پر غور کرنے کی ضرورت نہیں -

خاص رفتار و ہونی چاہیے جس کے لیے

$$\text{فہ}\,(\text{و}) = \text{ف} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (۲)$$

یعنے مزاحمت، آگے بڑھانے والی قوت کو عین متوازن کرتی ہے۔ اس کو جسم کی "انتہائی رفتار" یا "پوری چال" کہتے ہیں۔ اگر جسم کو اس سے کم رفتار کے ساتھ چلایا جائے تو آگے بڑھانے والی قوت مزاحمت سے بڑی ہوگی اور اس لیے رفتار بڑھتی جائیگی۔ لیکن اگر جسم کو و سے بڑی رفتار سے چلایا جائے تو مزاحمت، آگے بڑھانے والی قوت سے متجاوز ہوگی اور رفتار گھٹیگی۔ ہر صورت میں رفتار قیمت و کی جانب متقاربًا مائل ہوتی ہے۔

اگر مزاحمت رفتار کے متناسب ہو تو فہ (ع) = ک ع اور اس لیے $\text{و} = \frac{\text{ف}}{\text{ک}}$ اور مساوات (۱) کو

$$\frac{\text{فرع}}{\text{فرت}} = \frac{\text{ف}}{\text{و}}\,(\text{و} - \text{ع}) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (۳)$$

لکھا جا سکتا ہے۔ پس

$$\frac{۱}{\text{و} - \text{ع}}\,\frac{\text{فرع}}{\text{فرت}} = \frac{\text{ف}}{\text{و}}،\quad \text{لوک}\,(\text{و} - \text{ع}) = -\frac{\text{ف ت}}{\text{و}} + \text{ا} \qquad \ldots\ldots (۴)$$

اگر ابتدائً ت = ۰، ع = ع۰ تو ا = لوک (و - ع۰) اور

$$\text{و} - \text{ع} = (\text{و} - \text{ع}_۰)\,\text{ق}^{-\frac{\text{ف ت}}{\text{و}}} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (۵)$$

اس لیے

$$\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}} = \text{ع} = \text{و} - (\text{و} - \text{ع}_۰)\,\text{ق}^{-\frac{\text{ف ت}}{\text{و}}} \qquad \ldots\ldots (۶)$$

$$\text{لا} = \text{و ت} + \frac{\text{و}\,(\text{و} - \text{ع}_۰)}{\text{ف}}\,\text{ق}^{-\frac{\text{ف ت}}{\text{و}}} + \text{ب} \qquad \ldots\ldots (۷)$$

اگر ت = ۰ کے لیے لا = ۰ تو ب = - و (و - ع۰) \ ف، اس لیے

$$\text{لا} = \text{و ت} - \frac{\text{و}\,(\text{و} - \text{ع}_۰)}{\text{ف}}\left(۱ - \text{ق}^{-\frac{\text{ف ت}}{\text{و}}}\right) \qquad \ldots\ldots (۸)$$

(۲۷۷) ہم (۵) سے اس کی تصدیق کرتے ہیں کہ ت = ∞ کے لیے ع = و، آخری مساوات سے بھی یہ معلوم ہوتا ہے کہ ت کی بڑی قیمتوں کے لیے

$$\text{لا} = \text{و ت} - \frac{\text{و}(\text{و} - \text{غ})}{\text{ف}} \qquad (9)$$

اگر ہم ف = ج رکھیں تو اوپر کے عمل حساب سے، پانی کے ایک بہت چھوٹے قطرہ کے ہوا میں سے اُتار کی توضیح ہوتی ہے۔

مثال ۔ اگر مزاحمت کے اس قانون کے تحت ایک ذرہ کو انتصاباً اوپر وار پھینکا جائے اور اگر لا کی مثبت سمت اوپر وار ہو تو

$$\text{ع} = (\text{و} + \text{غ})\,\text{و}^{-\frac{\text{ج ت}}{\text{و}}} - \text{و} \qquad (10)$$

$$\text{لا} = -\,\text{و ت} + \frac{\text{و}(\text{و} + \text{غ})}{\text{ج}}\left(1 - \text{و}^{-\frac{\text{ج ت}}{\text{و}}}\right) \qquad (11)$$

بشرطیکہ ت = ۰ کے لیے لا = ۰، ع = غ، ذرہ ساکن ہوگا جب کہ

$$\text{ت} = \frac{\text{و}}{\text{ج}}\,\text{لوک}\left(1 + \frac{\text{غ}}{\text{و}}\right) \qquad (12)$$

اور اس وقت اس کا ارتفاع

$$\text{ھ} = \frac{\text{و}^2}{\text{ج}}\left\{\frac{\text{غ}}{\text{و}} - \text{لوک}\left(1 + \frac{\text{غ}}{\text{و}}\right)\right\} \qquad (13)$$

ہوگا۔

۹۴۔ مقصور اہتزازوں کا نظریہ —

ایک ذرہ کی خطی حرکت کا مسئلہ جب کہ ذرہ ایک مرکزی قوت (جو فاصلہ کے متناسب ہو) اور ایک مزاحمت (جو رفتار کے متناسب ہو) کے تحت ہوا ہم ہے

نہ صرف بذاتہ بلکہ اس کی کثیر تمثیلوں کی وجہ سے ۔ وہ تفرقی مساوات جس پر وہ منحصر ہے ٹھیک طور پر اُسی نمونہ کی ہے جو حسب ذیل صورتوں میں حاصل ہوتی ہے ۔ ایک رقاص کے چھوٹے اہتزازوں کے لیے، یا ایک لٹکے ہوئے ڈنڈے کے مروڑ کے ارتعاشوں کے لیے جیسا کہ وہ ہوا کی مزاحمت سے متاثر ہوتے ہیں، یا مقناطیسی برق پیما سوئی کے ارتعاشوں کے لیے جیسا کہ وہ اُن رَووں سے متاثر ہوتے ہیں جو دھات کے قریبی کمیتوں میں امالہ سے پیدا ہوتی ہیں وغیرہ۔

زیر بحث مساوات

$$\frac{\text{فر}^2\,\text{لا}}{\text{فرت}^2} = -\,\text{مہ}\,\text{لا} - \text{ک}\,\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

ہے جہاں بائیں جانب کی پہلی رقم اُس اسراع کو تعبیر کرتی ہے جو قوت عود کی وجہ سے ہے اور دوسری رقم مزاحمت کی وجہ سے ہے ۔ اس مساوات کو شکل

$$\frac{\text{فر}^2\,\text{لا}}{\text{فرت}^2} + \text{ک}\,\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}} + \text{مہ}\,\text{لا} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

میں رکھ کر حل کیا جاتا ہے ۔

(۲۷۸) اس کو حسب ذیل طریقہ پر تحویل کیا جاتا ہے ۔ اگر

$$\text{لا} = \text{ما}\,\text{و}^{\text{لہ}\,\text{ت}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

رکھا جائے تو

$$\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}} = \left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرت}} + \text{لہ}\,\text{ما}\right)\text{و}^{\text{لہ}\,\text{ت}} \quad \ldots\ldots\ldots (4)$$

$$\frac{\text{فر}^2\,\text{لا}}{\text{فرت}^2} = \left(\frac{\text{فر}^2\,\text{ما}}{\text{فرت}^2} + 2\,\text{لہ}\,\frac{\text{فرما}}{\text{فرت}} + \text{لہ}^2\,\text{ما}\right)\text{و}^{\text{لہ}\,\text{ت}} \quad \ldots\ldots (5)$$

(۲) میں درج کرنے پر

$$\frac{\text{فر}^2\,\text{ما}}{\text{فرت}^2} + (2\,\text{لہ} + \text{ک})\,\frac{\text{فرما}}{\text{فرت}} + (\text{لہ}^2 + \text{ک}\,\text{لہ} + \text{مہ})\,\text{ما} = 0 \quad \ldots\ldots (6)$$

مقدار لہ اختیاری ہے ۔ اگر $\text{لہ} = -\frac{1}{2}\,\text{ک}$ رکھا جائے تو (۶) میں دوسری رقم غائب ہو جاتی ہے اور مساوات اُس شکل میں تحویل ہوتی ہے جو دفعات

۵، ۱۱، ۵ وغیرہ میں ہم دیکھ چکے ہیں۔ اس لیے مساوات (۲)

$$\text{لا} = \text{و}^{-\frac{1}{2}\text{ک ت}}\ \text{ما} \qquad \text{(۷)}$$

سے پوری ہوتی ہے بشرطیکہ

$$\frac{\text{فر}^2\ \text{ما}}{\text{فر ت}^2} + \left(\text{مہ} - \frac{1}{4}\text{ک}^2\right)\text{ما} = 0 \qquad \text{(۸)}$$

اب تین صورتیں پیدا ہوتی ہیں۔ پہلی اور سب سے اہم وہ ہے جس میں

$$\text{مہ} > \frac{1}{4}\text{ک}^2 \qquad \text{(۹)}$$

یہ شرط رگڑ کی قدر کی اُن تمام قیمتوں کے لیے پوری ہوتی ہے جو ایک خاص حد کے اندر ہیں۔ اب

$$\text{مہ} - \frac{1}{4}\text{ک}^2 = \text{ن}^2 \qquad \text{(۱۰)}$$

رکھنے سے

$$\text{ما} = \text{ا جم ن ت} + \text{ب جیب ن ت} \qquad \text{(۱۱)}$$

یا

$$\text{ما} = \text{ا جم (ن ت + صہ)} \qquad \text{(۱۲)}$$

جہاں مستقل ا، ب یا ا، صہ اختیاری ہیں۔ پس

$$\text{لا} = \text{ا و}^{-\frac{1}{2}\text{ک ت}}\ \text{جم (ن ت + صہ)} \qquad \text{(۱۳)}$$

اس ضابطہ سے حرکت کا جو نمونہ تعبیر ہوتا ہے اُس کو سادہ موسیقی ارتعاش کہہ سکتے ہیں جس کا حیطہ $\text{ا و}^{-\frac{1}{2}\text{ک ت}}$ قوت میں صفر کی طرف گھٹتا جاتا ہے جیسے ت بڑھتا ہے۔ چونکہ مثلثی جزو ضربی قیمتوں ± 1 کے درمیان اہتزاز کرتا ہے اس لیے فضا زمانی منحنی منحنیوں $\text{لا} = \pm\ \text{ا و}^{-\frac{1}{2}\text{ک ت}}$ کے درمیان شامل ہے دیکھو شکل ۹۸۔

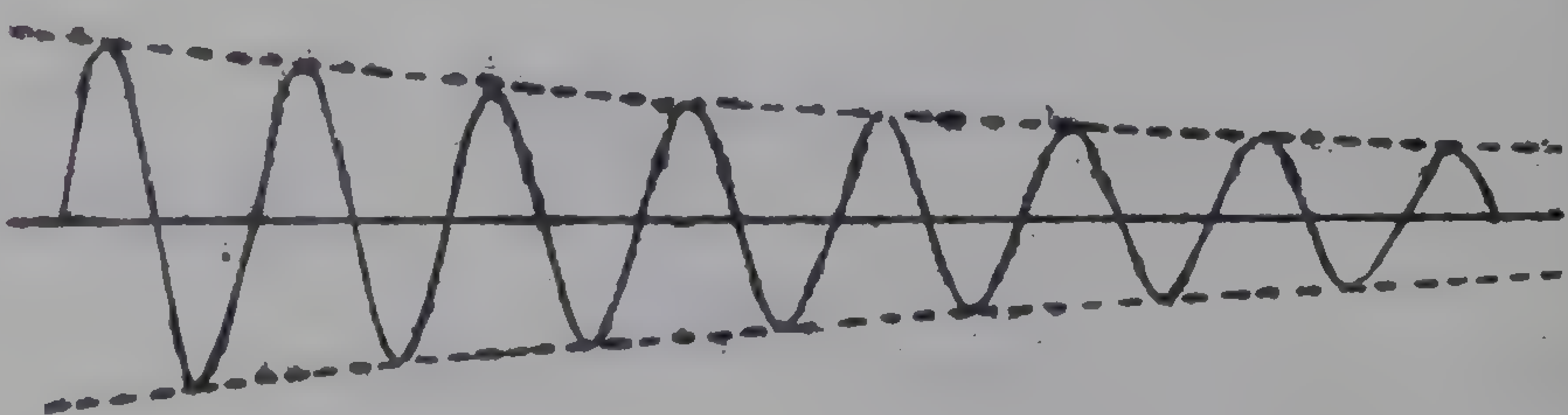
(۲۷۹) (۲) کے تفرق سے یہ ظاہر ہے کہ رفتار ع $\left(= \frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}}\right)$ ٹھیک اسی نمونے کی مساوات کو پورا کرتی ہے۔ اس لیے ہم لکھ سکتے ہیں

$$ع = اُ \bar{و}^{\frac{1}{2} ک ت} \text{جم} (ن ت + \bar{صہ}) \quad \ldots\ldots\ldots (۱۴)$$

جیسا کہ (۱۳) سے دوسری طرح معلوم کیا جا سکتا ہے۔ لا کی عظیم قیمتیں واقع ہوتی ہیں جب کہ جم (ن ت + صہَ) = ۰ اور اس لیے وہ وقت کے مساوی وقفوں $\frac{\pi}{ن}$ پر واقع ہوتی ہیں۔ لا کی دو متصل اعظم قیمتوں کے درمیان وقفہ $\frac{۲\pi}{ن}$ ہے اور اس لیے اس کو دَور کہتے ہیں۔ ایک سفر کے طول کو دوسرے (مخالف جانب) سفر کے طول کے ساتھ جو نسبت ہے وہ $و^{\frac{ک\pi}{۲ن}}$ ہے، اور اسی نسبت کے لوکارتم یعنی

$$\frac{ک\pi}{۲ن} \text{لوک}_{۱۰} و = ۱۷۱۲ء۲ \frac{ک\pi}{ن} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۱۵)$$

کو اہتزازوں کی ''لوکارتمی تخفیف'' کہتے ہیں۔



شکل ۸۹

(۱۰) سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ مزاحمت کی وجہ سے دَور

$$\frac{۲\pi}{\sqrt{مہ}} \quad \text{سے} \quad \frac{۲\pi}{\sqrt{(مہ - \frac{1}{۴}ک^۲)}} \text{تک}$$

بڑھتا ہے۔ اگر رگڑ کی قدر، ن^2 کے مقابلہ میں چھوٹی ہو جیسا کہ بہت سے اطلاقات میں (مثلاً رقاص کی صورت میں) ہوتا ہے تو ان دو دوروں میں فرق دوسرے رتبے کی صرف ایک چھوٹی مقدار کا ہوتا ہے۔ اس لیے تھوڑی سی رگڑ اہتزاز کے دور کو بمشکل متاثر کرتی ہے، اس کا اثر خاص کر حیطہ پر ہوتا ہے۔

دفعہ ۱۰ میں یہ بتایا جا چکا ہے کہ ایک ذرے کی خطی حرکت جب کہ وہ صرف ایک مرکزی قوت کے تحت ہو جو فاصلہ کے متناسب ہے اس حرکت کے مماثل ہوتی ہے جو ایک نقطہ کے قائم ظل سے حاصل ہوتی ہے جب کہ نقطہ مستقل زاویئی رفتار سے ایک دائرہ مرتسم کر رہا ہو۔ اس تعبیر میں ترمیم کی جا سکتی
ہے تاکہ وہ تبدیل شدہ حالات کے مطابق ہو جائے اگر ہم دائرے کی بجائے (۲۸۰)
ایک مساوی الزاویہ لولب[1] لیں۔ چنانچہ ہم دیکھتے ہیں کہ مساواتوں

$$\left.\begin{aligned} \text{لا} &= \text{ا}\,\text{و}^{-\frac{1}{2}\text{ک ت}}\,\text{جم}\,(\text{ن ت}+\text{صہ}),\\ \text{ما} &= \text{ا}\,\text{و}^{-\frac{1}{2}\text{ک ت}}\,\text{جب}\,(\text{ن ت}+\text{صہ}) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots(16)$$

میں لا، ما کو ایک متحرک نقطہ کے قائم محدد سمجھا گیا ہے ایسا لولب متعین ہوتا ہے جو

$$\text{لا} = \text{ر}\,\text{جم}\,\text{طہ}،\quad \text{ما} = \text{ر}\,\text{جب}\,\text{طہ} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(17)$$

کے معادل ہے اگر

$$\text{ر} = \text{ا}\,\text{و}^{-\frac{1}{2}\text{ک ت}}،\quad \text{طہ} = \text{ن ت}+\text{صہ} \quad \ldots\ldots\ldots(18)$$

کیونکہ ت کو ساقط کرنے پر

$$\text{ر} = \text{اَ}\,\text{و}^{\text{طہ مم عہ}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(19)$$

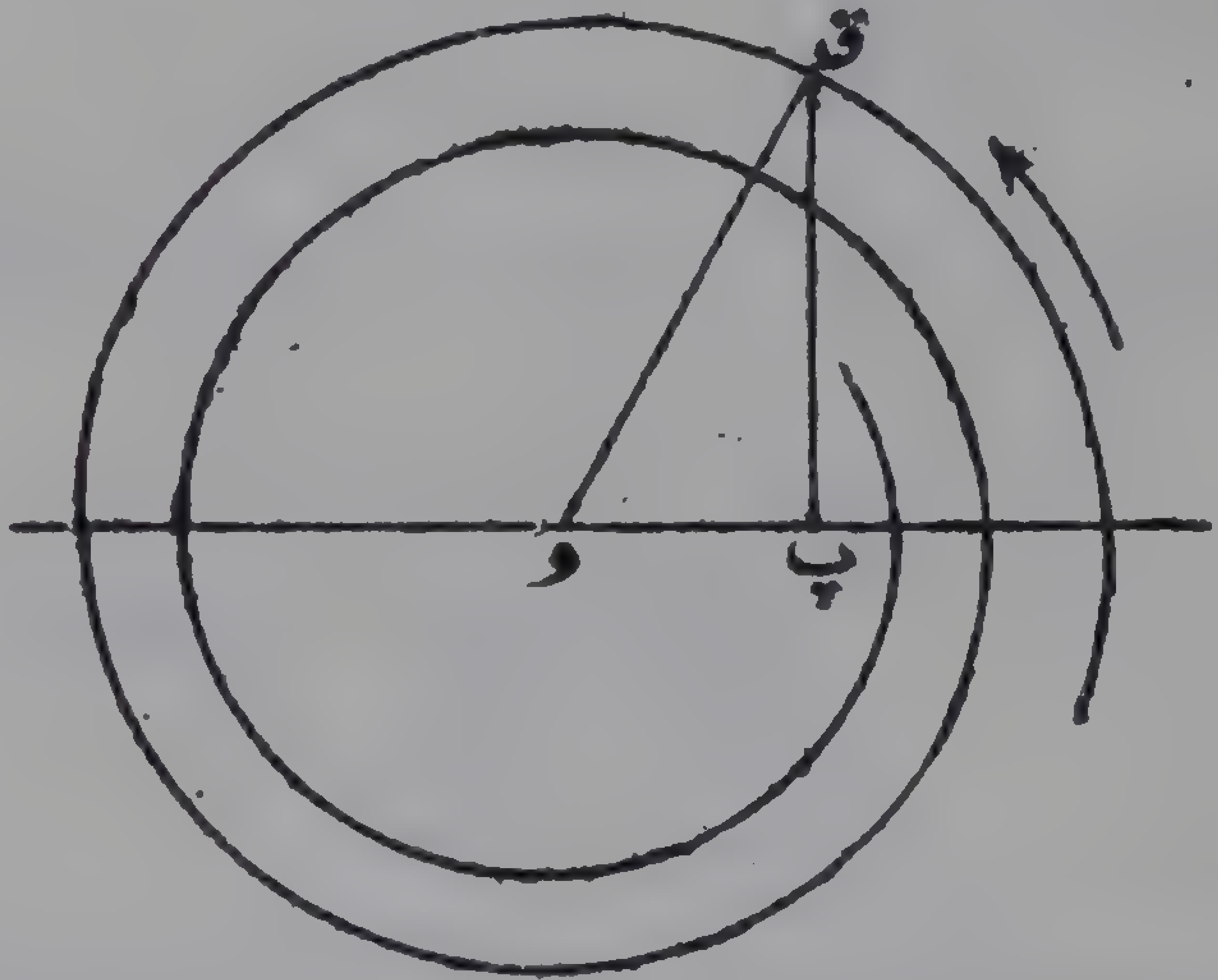
جہاں

$$\text{اَ} = \text{ا}\,\text{و}^{\frac{1}{2}\text{ک صہ}\backslash\text{ن}}،\quad \text{مم عہ} = -\frac{1}{2}\frac{\text{ک}}{\text{ن}} \quad \ldots\ldots(20)$$

[1] یہ بات پی۔ جی۔ ٹیٹ (۱۸۶۷) نے کہی تھی۔

اس لیے لولب کا زاویہ

$$عہ = \frac{1}{2}\pi + مس^{-1}\frac{ک}{۲ن} \qquad \text{.........(۲۱)}$$



شکل ۹

سے حاصل ہوتا ہے۔ جب، $\frac{ک}{ن}$ چھوٹا ہوتا ہے تو یہ زاویہ ایک قائمہ زاویہ سے صرف قدرے متجاوز ہوتا ہے۔

جب رگڑ کی قدر $۲\sqrt{مہ}$ سے بڑی ہوتی ہے تو مساوات (۸) شکل

$$\frac{د^۲ ما}{د ت^۲} - ن^۲ ما = ۰ \qquad \text{.............(۲۲)}$$

اختیار کرتی ہے جہاں

(۲۸۱) $$ن^۲ = \frac{1}{۴}ک^۲ - مہ \qquad \text{.............(۲۳)}$$

حل $$ما = ا\, و^{نت} + ب\, و^{-نت} \qquad \text{.............(۲۴)}$$

ہے اس لیے (۷) سے

$$\text{لا} = \text{ا}\ \text{و}^{-\text{لہ}_1 \text{ت}} + \text{ب}\ \text{و}^{-\text{لہ}_2 \text{ت}} \qquad \text{.............} (۲۵)$$

بشرطیکہ

$$\left.\begin{aligned} \text{لہ}_1 &= \tfrac{1}{2}\text{ک} - \left(\tfrac{1}{4}\text{ک}^2 - \text{مہ}\right)^{\frac{1}{2}}،\\ \text{لہ}_2 &= \tfrac{1}{2}\text{ک} + \left(\tfrac{1}{4}\text{ک}^2 - \text{مہ}\right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}\right\} \qquad \text{.........} (۲۶)$$

اِس حل کو راست ابتدائی مساوات (۲) سے بھی حاصل کیا جا سکتا ہے۔ اگر

$$\text{لا} = \text{ا}\ \text{و}^{-\text{لہ ت}} \qquad \text{....................} (۲۷)$$

فرض کیا جائے تو مساوات (۲) پوری ہوگی اگر

$$\text{لہ}^2 - \text{ک لہ} + \text{مہ} = ۰ \qquad \text{..............} (۲۸)$$

اس سے لہ کی دو قابل قبول قیمتیں متعین ہوتی ہیں جو فی الحقیقت اوپر لہ_1، لہ_2 سے تعبیر کی گئی ہیں۔ نمونہ (۷) کے دو حل جو اس طرح حاصل ہوتے ہیں اُن کو جمع کرنے سے نتیجہ (۲۵) حاصل ہوتا ہے۔

چونکہ لہ_1، لہ_2 دونوں مثبت ہیں اس لیے لا کی قیمت بالآخر صفر کی طرف مائل ہوتی ہے۔ نیز لا کے معدوم ہونے کے لیے ہمیں

$$\text{و}^{(\text{لہ}_2 - \text{لہ}_1)\text{ت}} = -\frac{\text{ب}}{\text{ا}} \qquad \text{....................} (۲۹)$$

حاصل ہونا چاہیے۔ اگر ا اور ب کی علامتیں مختلف ہوں تو یہ مساوات ت کی ایک اور صرف ایک حقیقی قیمت سے پوری ہوگی۔ اگر ا اور ب کی علامتیں ایک ہی ہوں تو کوئی حقیقی حل حاصل نہیں ہوگا۔ پس ذرّے کو خواہ کسی طرح متحرک کیا جائے وہ اپنے توازن کے محل میں سے ایک سے زیادہ مرتبہ گزر نہیں سکتا اور اس محل پر بھی وہ بالآخر متقاربا پہنچتا ہے۔ اس لیے اس نمونے کی حرکت کو "نادوری" کہتے ہیں۔ یہ ایسے رقاص کی صورت میں وقوع پذیر ہوتی ہے جو بہت ہی

لزج واسطہ میں غرق ہو مثلاً سست گام مقناطیسی برق پیما میں جہاں سوئی بہت زیادہ موصلیت کی دھات سے خوب قریب سے گھری ہوئی ہو جس میں حرکت کے مزاحم اِمالی رَوئیں پیدا ہوتی ہیں، اور جدید وضع کے زلزلہ نگاروں میں۔

صورت مرور میں جہاں

$$ک^2 = ۴م \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۳۰)$$

مساوات (۸)

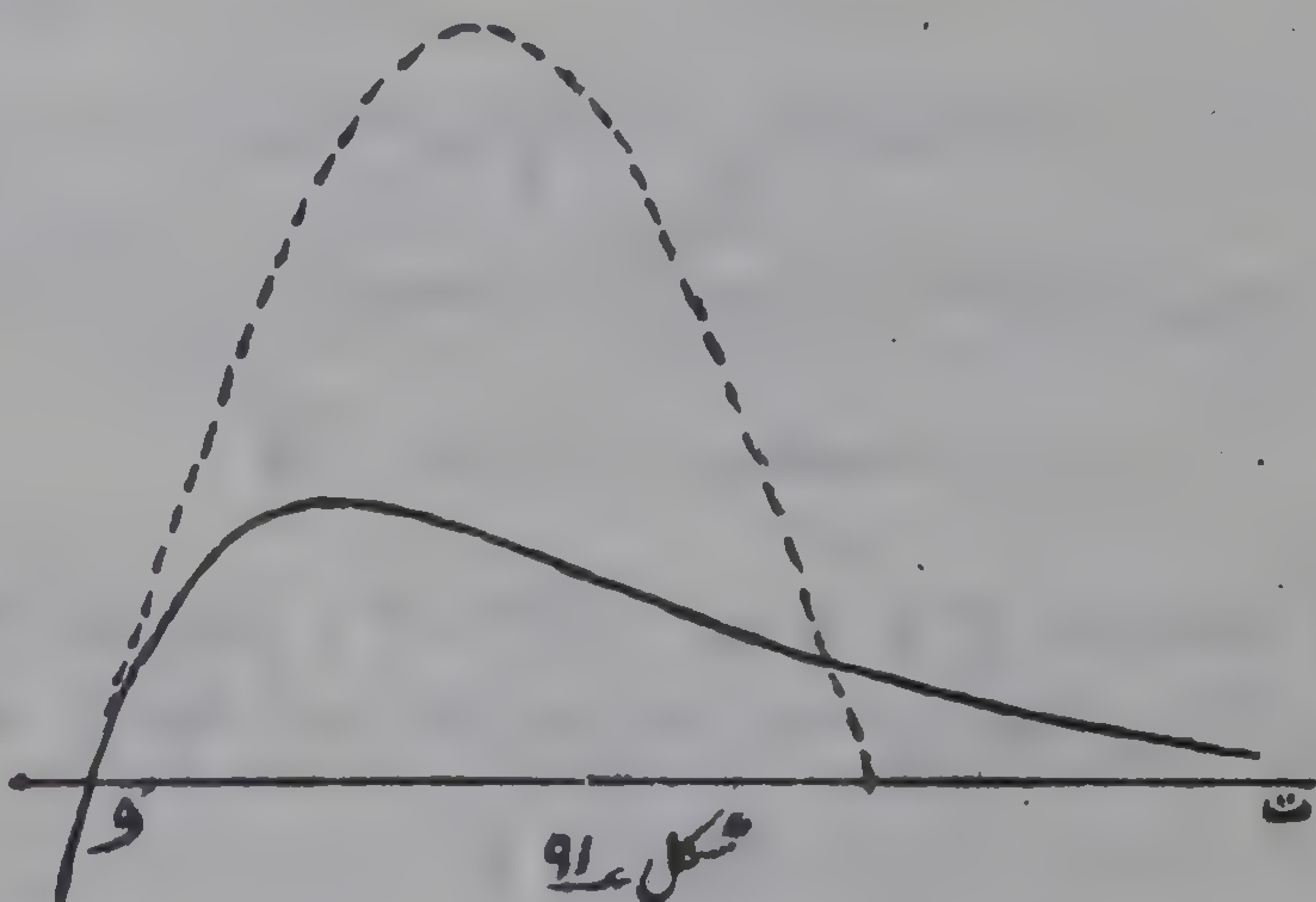
$$\frac{فر^2\, ما}{فر\, ت^2} = ۰ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۳۱)$$

ہو جاتی ہے، اس لیے

$$ما = ا ت + ب \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۳۲)$$

اور $$لا = و^{-\frac{۱}{۲} ک ت} (ا ت + ب) \quad (۳۳)$$

قوت نما جزو ضربی کی تخفیف دوسرے جزو ضربی میں ت کے اضافے پر بالآخر (۲۸۲)
غالب آتی ہے، علاوہ ازیں لا صرف ت کی ایک محدود قیمت کے لیے معدوم ہو سکتا ہے اس نمونے کی حرکت کو بھی "ناوری" جماعت میں رکھا جا سکتا ہے شکل ذیل میں اس صورت کے لیے فضا زمانی منحنی پیش کیا گیا ہے۔ نیز مقابلہ کے لیے



شکل ۹۱

شکل میں ایک ایسے ذرّے کا نصف دور بھی دکھایا گیا ہے (نقطہ دار منحنی سے) جس پر کوئی مزاحمت عمل نہیں کرتی اور جو مبدا سے اسی رفتار کے ساتھ متحرک کیا گیا ہے۔

۹۵۔ قسری اہتزاز۔

اب ہمیں یہ غور کرنا ہے کہ قسری اہتزاز مثلاً وہ جن پر دفعہ ۱۳ میں بحث ہو چکی ہے مزاحمت سے کس طرح تبدیل ہوتے ہیں۔ دفعہ ۹۴ (۱) کی بائیں جانب ایک رقم لا کا اضافہ کرو جو مخل قوت کے اسراعی اثر کو تعبیر کرے۔ اس طرح

$$\frac{\text{فر}^2 \text{لا}}{\text{فر ت}^2} + \text{ک} \frac{\text{فر لا}}{\text{فر ت}} + \text{مہ لا} = \text{لا} \quad ....(1)$$

اس مساوات سے فوراً وہ قوت حاصل ہوتی ہے جو کسی مقررہ نمونے کی حرکت کو قائم رکھنے کے لیے ضروری ہے۔ چنانچہ سادہ موسیقی ارتعاش

$$\text{لا} = \text{ا جم پ ت} \quad ....(2)$$

کو قائم رکھنے کے لیے

$$\text{لا} = \text{ا} \left\{ (\text{مہ} - \text{پ}^2) \text{ جم پ ت} - \text{ک پ جب پ ت} \right\} \quad ....(3)$$

(۲۸) ہونا چاہیے۔ اگر

$$\text{مہ} - \text{پ}^2 = \text{س جم ع}، \text{ک پ} = \text{س جب ع} \quad ....(4)$$

رکھا جائے جو س اور ع کو ٹھیک طور پر منتخب کرنے سے ہمیشہ ممکن ہے تو

$$\text{لا} = \text{س ا جم} (\text{پ ت} + \text{ع}) \quad ....(5)$$

ہو جاتا ہے۔ پس س ا = ف رکھنے اور پ ت کی بجائے پ ت ۔ ع لکھنے سے جو صرف ت کے مبدا کو بدلنے کے مرادف ہے ہم دیکھتے ہیں کہ مخل قوت

$$\text{لا} = \text{ف جم پ ت} \quad ....(6)$$

کے جواب میں قسری اہتزاز

$$لا = \frac{ف}{سا} \text{ جم } (پ ت - عہ) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (۷)$$

حاصل ہوتا ہے۔

یہ بلاشبہ لا کی قیمت (۶) کے ساتھ (۱) کا کامل حل نہیں ہے۔ ہم لا کی کسی ایسی قیمت کا اضافہ کرسکتے ہیں آزاد ہیں جو (۱) کے دائیں جانبی جملہ کو معدوم کردے۔ مثلاً $ک^۲ < ۴ مہ$ کی صورت میں شکل

$$لا = و^{-\frac{۱}{۲}ک ت} (ا \text{ جم } ن ت + ب \text{ جیب } ن ت)$$

$$+ \frac{ف}{سا} \text{ جم } (پ ت - عہ) \quad \cdots\cdots\cdots (۸)$$

حاصل ہوتی ہے جہاں ن، دفعہ ۹۴ کی مساوات (۱۰) سے حاصل ہوتا ہے۔ اختیاری مستقل ا اور ب، ابتدائی شرطوں پر منحصر ہونگے۔

حل (۸) کے پہلے حصے کے متعلق یہ توجیہ کی جاسکتی ہے کہ وہ ایک آزاد ارتعاش کو تعبیر کرتا ہے جیسا کہ مخل قوت کی عدم موجودگی میں ذرہ کرسکتا ہے، اور اس کو قسری اہتزاز میں اضافہ کیا گیا ہے۔ قوت نما جزو ضربی کی لا انتہا تخفیف کی وجہ سے آزاد ارتعاش اور ابتدائی شرطوں کے اثر بتدریج ختم ہوجاتے ہیں اور ایک وقت کے بعد قسری اہتزاز ہی جو آخری رقم سے تعبیر ہوتا ہے قابل قدر رہ جاتا ہے۔ $ک^۲ > ۴ مہ$ اور $ک^۲ = ۴ مہ$ کی صورتوں میں یہی نتیجہ صادق آتا ہے۔

قسری ارتعاش کے متعلق بعض اہم امور قابل توجہ ہیں۔

اول، حیطہ $\frac{ف}{سا}$ کے متعلق (۴) سے

$$سا^۲ = (مہ - پ^۲)^۲ + ک^۲ پ^۲$$

$$= \left\{پ^۲ - (مہ - \frac{۱}{۲} ک^۲)\right\}^۲ + ک^۲ (مہ - \frac{۱}{۴} ک^۲) \quad \cdots\cdots\cdots (۹)$$

حاصل ہوتا ہے۔ اگر $ک^۲ < ۲ مہ$ تو یہ اقل ہے، بلحاظ پ کے ارتعاش کے،

کیونکہ

$$\text{پ}^2 = \text{مہ} - \frac{1}{2}\,\text{ک}^2 \qquad \text{(10)}$$

اور اعظم حیط (۲۰۴)

$$\frac{\text{ف}}{\text{ک ن}} \qquad \text{(11)}$$

ہے ۔ اگر $\sqrt{\text{مہ}}$ کے مقابلہ میں ک چھوٹا ہو تو حیط بڑے سے بڑا ہوگا جب کہ $\text{پ} = \sqrt{\text{مہ}}$ تقریباً یعنے جب کہ مخل قوت کا دور اس آزاد ارتعاش کے دور کے مساوی ہو جس میں کوئی مزاحمت عمل نہیں کرتی ۔ (۱۱) کے نسب نما میں جزو ضربی ک کی وجہ سے اعظم حیط نسبتہً بڑا ہوتا ہے چنانچہ ایک رقاص کی صورت میں جو ہوا میں جھول رہا ہو وہ آسانی سے اس قدر بڑا ہو سکتا ہے کہ ان تقربات کا جواز جن پر بنیادی مساوات (۱) مبنی ہے قائم نہ رہ سکے ۔

ہیئت کے رشتے بھی اہم ہیں ۔ (۷) سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ قسری ارتعاش کی ہیئت مخل قوت کی ہیئت سے بقدر عہ کے پیچھے رہ جاتی ہے جہاں (عہ) (۸) سے متعین ہوتا ہے ۔ چونکہ جیب عہ مثبت ہے اور جم عہ مثبت یا منفی ہے بموجب اس کے کہ $\text{پ}^2 \gtrless$ مہ ہے اس لیے زاویہ عہ کو پہلے ربع میں یا دوسرے ربع میں لیا جا سکتا ہے بموجب اس کے کہ مخل قوت کا دور، رگڑ کی عدم موجودگی میں آزاد ارتعاش کے دور سے بڑا یا چھوٹا ہو ۔ مزید برں چونکہ

$$\text{مس عہ} = \frac{\text{ک پ}}{\text{مہ} - \text{پ}^2} \qquad \text{(12)}$$

اس لیے عہ بالعموم متناظر صورتوں میں تقریباً صفر کے یا ‎π‎ کے مساوی ہوگا اگر قصر چھوٹا ہو ۔ یہ اس کے مطابق ہے جس کی توقع دفعہ (۱۳) کی رو سے ہو سکتی تھی جہاں رگڑ کی عدم موجودگی کے مفروضہ پر ان دو صورتوں میں ہیئت کی ٹھیک مطابقت یا مخالفت معلوم ہوئی تھی ۔ لیکن جب دوروں کے درمیان تقریباً ٹھیک مطابقت ہو یا زیادہ صحیح طور پر جب $\frac{\text{پ}}{\sqrt{\text{مہ}}}$ اور اکائی کے درمیان فرق $\frac{\text{ک}}{\text{پ}}$ کے مقابلہ میں چھوٹا ہو تو زاویہ

عہ، $\frac{1}{2}\pi$ پر ایک یا دوسری جانب سے پہنچتا ہے اور اعظم گمک کی صورت میں جب کہ پ = $\sqrt{مہ}$ ہمیں عہ = $\frac{1}{2}\pi$ حاصل ہوتا ہے یعنے اعظم ہٹاؤ ایک ربع دَور کے وقفے سے اعظم قوت کے پیچھے رہتا ہے اب قوت رفتار کے ساتھ ہم آہنگ ہوتی ہے۔

ہیئت کے سوال اور توانائی کی رسد کے سوال میں قریب کا رشتہ ہے۔ جب عہ = ۔ تو ایک نصف دَور میں انجام پایا ہوا کام اُس کام سے ساقط ہو جاتا ہے جو دوسرے نصف دَور میں جمع ہوتا ہے اور بہ حیثیت مجموعی کوئی توانائی کا انجذاب نہیں ہوتا۔ عام صورت میں وہ شرح جس سے کام مزاحمت کے خلاف ارتعاش کو قائم رکھنے میں انجام پا رہا ہے (۹) اور (۷) کی رو سے (۲۸۵)

$$ف \frac{فرلا}{فرت} = - \frac{پ ف^2}{سا} جب (پ ت - عہ) جم پ ت$$

$$= \frac{پ ف^2}{2 سا} \left\{ جب عہ - جب (2 پ ت - عہ) \right\} \quad ......(۱۳)$$

بڑے خطوط وحدانی کے اندر دوسری رقم کی اوسط قیمت صفر ہے اور اس لیے توانائی کے انجذاب کی اوسط شرح

$$\frac{پ ف^2 جب عہ}{2 سا} = \frac{ک پ^2 ف^2}{2 ر^2} = \frac{\frac{1}{2} ک ف^2}{ک^2 + (پ - \frac{مہ}{پ})^2} \quad .....(۱۴)$$

ہے۔ اس لیے انجذاب اعظم ہوگا جب کہ پ = $\sqrt{مہ}$ یعنے جب کہ قسری دَور ٹھیک طور پر رگڑ کے غیاب میں آزاد دَور پر منطبق ہو جائے۔ اعظم انجذاب

$$\frac{ف^2}{2 ک} \quad ....(۱۵)$$

ہے اور اس لیے جیسے جیسے ک کی قیمت چھوٹی ہوگی وہ بڑا ہوتا جائیگا۔

اِس اعظم قیمت میں کمی پیدا کرنے میں ٹھیک انطباق سے خفیف انحراف کا جو اثر ہے وہ واضح کرنے کے لیے فرض کرو کہ

$$\frac{\text{پ}}{\text{ن}_{\text{م}}} = 1 + \text{ی} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (16)$$

جہاں ی کو چھوٹا فرض کیا گیا ہے۔ جملہ (۱۴) کو اب شکل

$$\frac{\text{ف}^2}{4\,\text{ن}_{\text{م}}} \times \frac{\text{بہ}}{\text{بہ}^2 + \text{ی}^2} \quad \text{تقریباً} \ldots\ldots\ldots (17)$$

میں رکھا جا سکتا ہے جہاں

$$\text{بہ} = \frac{\text{ک}}{2\,\text{ن}_{\text{م}}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (18)$$

اس لیے انجذاب اپنی اعظم قیمت کا نصف گر جاتا ہے جب کہ ی = بہ یا

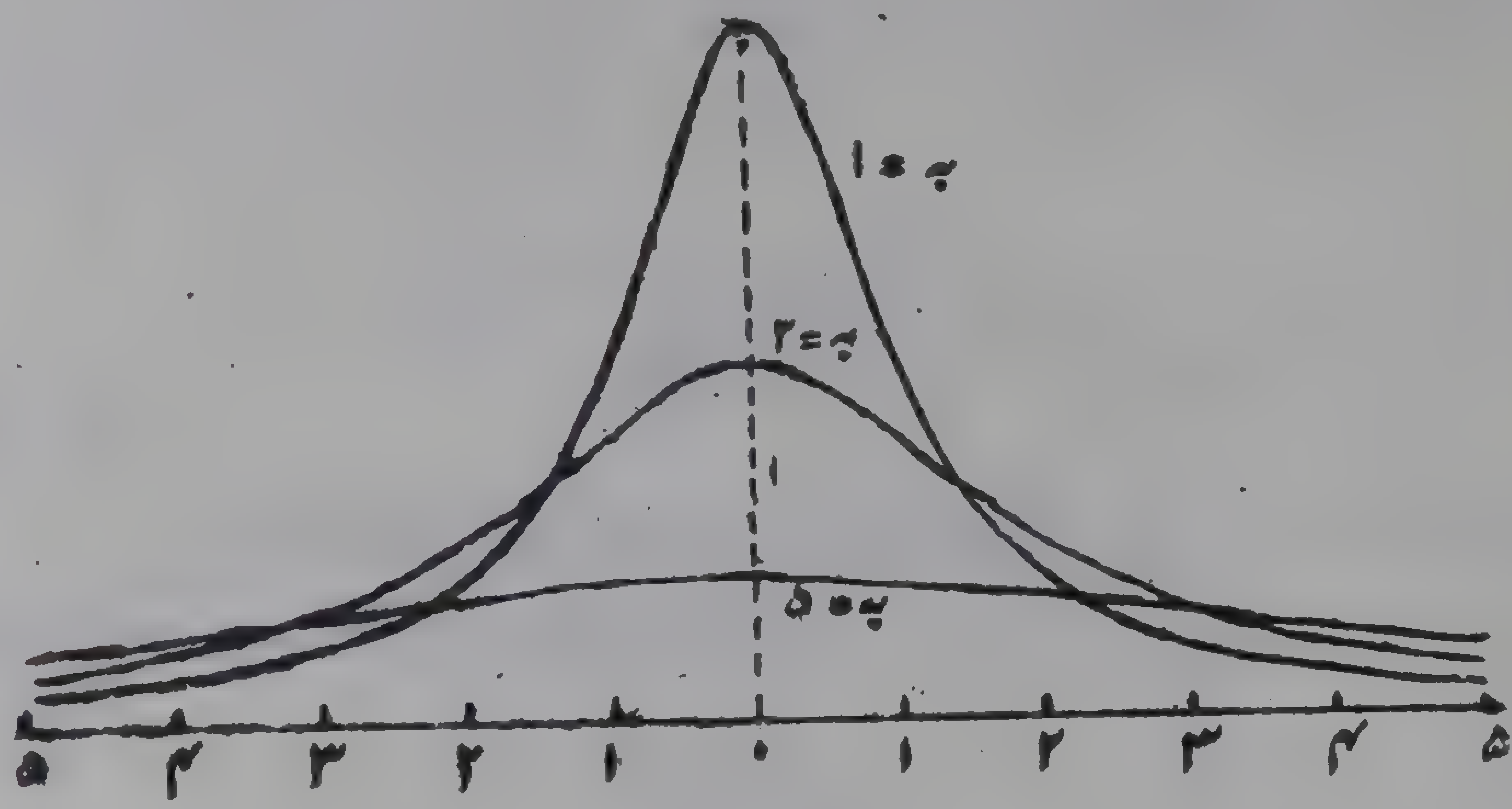
$$\text{پ} = \text{ن}_{\text{م}} + \tfrac{1}{2}\,\text{ک} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (19)$$

بہ کی تین مختلف قیمتوں کے لیے تفاعل

$$\frac{\text{بہ}}{\text{بہ}^2 + \text{ی}^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (20)$$

(۲۸۴ کی ترسیم شکل ۹۲ میں دکھائی گئی ہے۔ وہ رقبہ جو منحنی اور صفر کے خط کے درمیان ہے بہ کے غیر تابع ہے، بہ کی چھوٹی قیمتوں کے لیے اعظم معین کی بلند تر قیمتوں کی تلافی دونوں جانب زیادہ تیز اتار سے ہو جاتی ہے۔ یہ اصول کہ دَوروں کے درمیان ٹھیک مطابقت کی صورت میں گمک کی شدت جتنی بڑی ہو گی اتنی ہی تنگ وہ وسعت ہو گی جس پر وہ اعظم قیمت کے تقریباً مساوی ہوتی ہے علم آواز میں بہت سے اہم اطلاقات رکھتا ہے۔ مثلاً کسی ایسے نظام کو جیسا کہ سُر کا دو شاخہ یا پیانو کا تار ہے جن کے آزاد ارتعاش انتشار سے بہت ہی سستی کے ساتھ ختم ہوتے ہیں شدید تائیدی ارتعاش میں آسانی سے نہیں لایا جا سکتا جب تک کہ قسری اور آزاد دَوروں کے درمیان بہت زیادہ مطابقت نہ ہو۔ اس کے برخلاف بانسری کی ہوا کی نالی مقابلتہً تعداد کی ایک بڑی وسعت سے متاثر ہو گی۔

اس کے مشابہ نتیجے، حیطہ کے مربع کے لحاظ سے یا ارتعاش کی کُل توانائی کے لحاظ سے درست ہیں۔



شکل ۹۲

جدید زلزلہ نگاروں میں قصر پیدا کرنے والی تدبیریں اختیار کی جاتی ہیں تاکہ آزادار تعاشوں کا اثر گھٹے۔ مثلاً گیالیبزن نمونہ میں رقاص سے ایک دھاتی تختی لگی ہوئی ہوتی ہے جو خود اپنے مستوی میں ایک مقناطیسی میدان میں جھولتی ہے اور اس طرح برقی رَوؤں پر جو تختی میں امالہ سے پیدا ہوتی ہیں مقناطیسوں کا تعامل ایک مزاحمت پیدا کرتا ہے جو رفتار کے تناسب ہوتی ہے۔

مثلاً افقی رقاص (دفعات ۵۵، ۶۷) کی صورت لو تو حرکت کی مساوات جب کہ اُس کی تقصیح تکسیر کے لیے کردی گئی ہو شکل

$$\frac{\text{ف}^2\text{ط}}{\text{فت}^2} + \text{ک}\,\frac{\text{فط}}{\text{فت}} + \text{مہ ط} = -\frac{1}{\text{ل}}\,\frac{\text{ف}^2\text{ضا}}{\text{فت}^2} \quad \ldots\ldots (\text{۲۱})$$

اختیار کرتی ہے جہاں ڈنڈے کے توازن کے محل کے علی القوائم محور کا ہٹاؤ ضا ہے۔ (۲۸۷)
حرکت

$$\text{ضا} = \text{ا جم پ ت} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (\text{۲۲})$$

کی وجہ سے آلہ کے فریم کا قسری اہتزاز پچھلی ترقیم میں

$$\text{ط} = \frac{\text{ا}}{\text{ل}} \times \frac{\text{پ}^2}{\text{ر}}\,\text{جم}\,(\text{پ ت} - \text{مہ}) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (\text{۲۳})$$

ہے ۔ فریم کے لحاظ سے ڈنڈے پر کے ایک نقطہ کے ارتعاش کے حیطہ کو جو نسبت خود ڈنڈے کے حیطہ کے ساتھ ہے وہ جزو ضربی

$$\frac{ب^2}{ت} = \frac{پ^2}{\sqrt{\{(مہ - پ^2)^2 + ک^2 پ^2\}}} \quad \cdots\cdots\cdots (۲۴)$$

پر منحصر ہے ۔

گیلیبزن آلوں میں تکسیر کو اس طرح ٹھیک بنایا جاتا ہے کہ آزاد ارتعاش نادَوریت کے خط حاشیہ پر ہوتا ہے یا $ک^2 = ۴ مہ$ ، تب جزو ضربی (۲۴) سادہ شکل

$$\frac{پ^2}{پ^2 + مہ} \quad \cdots\cdots\cdots (۲۵)$$

اختیار کرتا ہے ۔ یہ بڑی حد تک پ کے غیر تابع ہوتا ہے جب تک کہ $\sqrt{مہ}$ کے مقابلہ میں پ بڑا ہو یعنے جب تک کہ زلزلوں کا دَور بے تکسیر آزاد ارتعاش کے دَور کے مقابلہ میں چھوٹا ہو ۔

لیکن ان آلوں میں اندراج، مقناطیسی برق پیما طریقہ سے جس کا ذکر دفعہ ۹۷ میں آچکا ہے ہوتا ہے جس میں نشان زاویٔ ہٹاؤ طہ پر منحصر نہیں ہوتے بلکہ زاویٔ رفتار $\frac{فرطہ}{فرت}$ پر منحصر ہوتے ہیں ۔ اس طرح ایک مزید جزو ضربی مقناطیسی برق پیما آئینہ کے اہتزاز کے قانون پر غور کرنے سے داخل ہوتا ہے، اس کی بھی تکسیر ہوتی ہے تاکہ وہ نادَوریت کے خط حاشیہ پر ہو ۔ چنانچہ وہ پیمانہ جس پر زمین کی رفتار کا اندراج ہوتا ہے شکل

$$\frac{پ^2}{(پ^2 + مہ)(پ^2 + مہَ)} \quad \cdots\cdots\cdots (۲۶)$$

کے جزو ضربی سے متعین ہوتا ہے ۔ یہ $\sqrt{مہ\, مہَ}$ کے قریب، $پ^2$ کی قیمتوں کے لیے بہت سستی سے متغیر ہوتا ہے اور اس قیمت کے لیے وہ اعظم ہے ۔ عمل میں مقناطیسی برق پیما اور زلزلہ نگار کے بے تکسیر دَوروں کو حتی الامکان مساوی بنایا جاتا ہے اور اس طرح $مہ = مہَ$ ۔

۹۶۔ کروی رقاص ۔۔

کروی رقاص (دفعہ ۲۹) کے چھوٹے اہتزازوں پر رگڑ کا اثر آسانی سے معلوم کیا جا سکتا ہے۔ حرکت کی مساواتیں شکلوں

$$\left.\begin{aligned}\frac{\text{فر}^2\,\text{لا}}{\text{فرت}^2} + \text{ک}\,\frac{\text{فر لا}}{\text{فرت}} + \text{مہ لا} = ۰،\\ \frac{\text{فر}^2\,\text{ما}}{\text{فرت}^2} + \text{ک}\,\frac{\text{فر ما}}{\text{فرت}} + \text{مہ ما} = ۰\end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots (۱)$$

میں حاصل ہوتی ہیں خواہ محوروں کی سمتیں کچھ ہی ہوں۔ اگر $\text{ک}^2 < ۴\,\text{مہ}$ تو حل (۲۸۸)

$$\left.\begin{aligned}\text{لا} &= \text{و}^{-\frac{1}{2}\text{کت}}\,(\text{ا جم ن ت} + \text{ب جب ن ت})،\\ \text{ما} &= \text{و}^{-\frac{1}{2}\text{کت}}\,(\text{ج جم ن ت} + \text{د جب ن ت})\end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots (۲)$$

ہے۔

اگر ہم ت کا مبداء وہ لمحہ اختیار کریں جب کہ ذرہ محور لا کو عبور کرتا ہے فرض کرو نقطہ (اَ، ۰) پر، تو ا = اَ، ج = ۰ ۔ اور اگر محور ما کو اس محل میں گزرتا ہوا سمجھا جائے جو ذرہ وقفہ $\frac{1}{2}\frac{\pi}{\text{ن}}$ کے بعد اختیار کرتا ہے تو ب = ۰ ۔ اس طرح حل شکل

$$\text{لا} = \text{ا}\,\text{و}^{-\frac{1}{2}\text{کت}}\,\text{جم ن ت}\,،\quad \text{ما} = \text{ب}\,\text{و}^{-\frac{1}{2}\text{کت}}\,\text{جب ن ت} \quad \cdots\cdots (۳)$$

اختیار کرتا ہے۔ پس یہ کہا جا سکتا ہے کہ ذرہ ایک ناقص میں حرکت کرتا ہے جو قوت نمائی قانون کی بموجب مسلسل سکڑتا ہے لیکن ہمیشہ اسی تعین سمت کے ساتھ اسی شکل کا رہتا ہے۔

اگر ہم دو عمود وار نصف قطر کھینچیں تو یہ واضح ہے کہ بعض محلوں میں ایک سے دوسرے تک گزرنے کا وقت ایک چوتھائی گردش کے دور $\frac{1}{2}\frac{\pi}{\text{ن}}$ سے کم اور دوسرے

محلوں میں زیادہ ہوگا۔ اس لیے عمود وار نصف قطروں کا ایک زوج ایسا ہے کہ یہ وقفہ ٹھیک ۱/۲ π/ن ہوگا اور اس لیے قایم محوروں کا ایک جٹ ایسا ہے جن کے حوالے سے ضابطے (۳) حاصل ہونگے۔

ذرہ کے حقیقی راستہ کو ناقصی لولب کی ایک قسم سمجھا جا سکتا ہے۔ اگر ا = ب تو دفعہ ۹۴ کا مساوی الزاویہ لولب حاصل ہوگا۔

کُروی رقاص کا مسئلہ اس مسئلے کے مماثل ہے جو ایک کُروی پیالے میں کسی ذرہ کی حرکت کا ہے۔ دلچسپ تغیر پیدا ہوتا ہے اگر ہم یہ فرض کریں کہ پیالہ، اپنے مرکز میں سے گزرتے ہوئے انتصابی محور کے گرد مستقل زاویٔی رفتار سہ سے گردش کرتا ہے۔ اگر ہم حسب سابق ثابت افقی محور لا، ما لیں اور مبدا زیر ترین نقطہ ہو پیالہ کے کسی نقطہ (لا، ما) کی رفتار کے اجزائے ترکیبی علی الترتیب ـ سہ ما، سہ لا حاصل ہوتے ہیں۔ اس لیے پیالے کے لحاظ سے ایک ذرہ کی رفتاریں جیسی

لاَ + سہ ما، ماَ ـ سہ لا .... (۴)

سے حاصل ہونگی۔ اس لیے یہ مان لینے سے کہ رگڑ اضافی رفتار کے متناسب ہے

لاً = ـ ن۲ لا ـ ک (لاَ + سہ ما)،
ماً = ـ ن۲ ما ـ ک (ماَ ـ سہ لا) .... (۵)

جہاں ن۲ = ج/ل .... (۶)

اور ل پیالے کا نصف قطر ہے۔

نمونہ (۵) کی ہمزاد خطی مساواتوں کا حل، خیالی مقداروں کی رقوم میں بہترین طریقہ پر حاصل ہوتا ہے لیکن موجودہ مقصد میں ہم حسب ذیل طریقہ پر ایک کافی حل معلوم کرینگے۔ فرض کرو کہ

لا = رجم (لہت + صہ)، ما = رجب (لہت + صہ) .... (۷)

جہاں رُ ت کا ایک تفاعل ہے جس کو معلوم کرنا ہے۔ اگر ہم (۵) میں اندراج کریں تو (۲۰۹)

معلوم ہوگا کہ دونوں مساواتیں پوری ہوتی ہیں اگر

ز² + ک ز + (ن² ـ لہ²) ر = ۰ ، .... (۸)

۲ لہ ز + ک (لہ ـ سہ) ر = ۰ .... (۹)

اس لیے ر کو ساقط کرنے پر

لہ² (لہ² ـ ن²) + ¼ ک² (لہ² ـ سہ²) = ۰ .... (۱۰)

اِس کی حقیقی اصلیں تقریباً

لہ = ± ن .... (۱۱)

ہیں اگر ہم ک کے مربع کو نظر انداز کریں[1]۔ نیز (۹) سے

ر = ج وَ^(ـ ½ ک (۱ ـ سہ/لہ) ت) .... (۱۲)

اس لیے حل

لا = ج وَ^(ـ نہ ت) جم (ن ت + صہ)
ما = ج وَ^(ـ نہ ت) جب (ن ت + صہ) .... (۱۳)

اور

لا = جَ وَ^(ـ نہَ ت) جم (ن ت + صہَ)
ما = جَ وَ^(ـ نہَ ت) جب (ن ت + صہَ) .... (۱۴)

حاصل ہوتے ہیں جہاں

نہ = ½ ک (۱ ـ سہ/ن) ، نہَ = ½ ک (۱ + سہ/ن) .... (۱۵)

---

[1] اگر خیالی حلوں کا امتحان کیا جائے تو معلوم ہوگا کہ اُن سے کوئی نئے نتیجے حاصل نہیں ہوتے۔ یہ واقعہ کہ ضابطوں (۱۳) اور (۱۴) میں چار اختیاری مستقل ج ، جَ ، صہ ، صہَ ہیں اس امر کی شہادت ہے کہ حاصل شدہ حل کامل ہے۔

چونکہ تفرقی مساواتیں خطی ہیں اس لیے اِن نتیجوں کو جمع کیا جا سکتا ہے ۔

ضابطے (۱۳) اور (۱۴) بتدریج متغیر ہونے والے حیطہ کے دائری ارتعاشوں کو تعبیر کرتے ہیں اور گردش کی سمتیں ان دو صورتوں میں مختلف ہیں ۔ اگر سہ < ن تو ہر صورت میں حیطہ قوت نمائی طور پر گھٹتا ہے ۔ لیکن اگر سہ > ن تو نہ کی علامت تبدیل ہوتی ہے اور اس دائری ارتعاش کا حیطہ جس کی جہت وہی ہے جو زاویئی رفتار سہ کی ہے مسلسل بڑھتا ہے ۔ تب ذرّہ ہمیشہ پھیلتے ہوئے لولبی راستہ میں متحرک رہتا ہے اور تقریباً اُس حالت میں پہنچتا ہے جس میں وہ پیالے کے ساتھ اضافی توازن میں گردش کرتا ہے ۔ اِس کی یہ گردش مخروطی رقاص (دفعہ ۳۵ مثال ۱) کے لنگر کے مانند ہوتی ہے اور انتصابی سے زاویئی فاصلہ

$$جم^{-1}\frac{ج}{سہ^2 ا}$$

ہوتا ہے ۔ چنانچہ ذرّہ کا اضافی توازن جب کہ وہ پیالے کے زیر ترین نقطہ پر ہو غیر قائم ہوتا ہے ۔

یہ پہلے بتایا جا چکا ہے (دفعہ ۳۳) کہ قائمیت کی جانچ کی ترمیم کرنی پڑتی ہے جب کہ **اضافی** توازن زیر بحث ہو ۔ اگر اُس دلیل کو جو صفحہ (۱۳۲) پر بیان کی گئی ہے اضافی توانائی {دفعہ ۳۳ (۱۰)} پر استعمال کیا جائے تو یہ معلوم ہوگا کہ موجودہ صورت میں عملی قائمیت کے لیے جملہ

$$قہ - \frac{1}{2} م سہ^2 (لا^2 + ما^2) \quad .... (۱۶)$$

کو اقل ہونا چاہیے ۔ اگر زیر ترین نقطہ پر کے مماس مستوی کے اوپر ذرّہ کا ارتفاع ی سے تعبیر کیا جائے تو $لا^2 + ما^2 = ۲ ا ی$ تقریباً اور اس لیے

$$قہ - \frac{1}{2} م سہ^2 (لا^2 + ما^2) = م (ج - سہ^2 ا) ی \quad .... (۱۷)$$

یہ مثبت ہوگا اور اِس لیے زیر ترین محل قائم ہوگا صرف اگر $سہ^2 < \frac{ج}{ا}$ ۔

اگر زیر ترین نقطہ سے ذرّہ کا زاویئی فاصلہ طہ ہو تو

$$\text{قہ} - \tfrac{1}{2}\,\text{م}\,\text{سہ}^{2}\left(\text{لا}^{2} + \text{ما}^{2}\right)$$

$$= \text{م}\,\text{ا}\left\{\text{ج}\left(1 - \text{جم}\,\text{طہ}\right) - \tfrac{1}{2}\,\text{سہ}^{2}\,\text{ا}\,\text{جب}^{2}\,\text{طہ}\right\} \quad \ldots\ldots (18)$$

اور یہ آسانی سے ثابت کیا جا سکتا ہے کہ اگر $\text{سہ}^{2} > \frac{\text{ج}}{\text{ا}}$ تو یہ جملہ اقل ہے جب کہ $\text{جم}\,\text{طہ} = \frac{\text{ج}}{\text{سہ}^{2}\,\text{ا}}$ ۔ اس لیے اضافی توازن کا مائل محل جب کہ وہ موجود ہو قائم رہوتا ہے۔

۹۷ - مزاحمت کا دو درجی قانون —

مزاحمت کا خطی قانون جس کو اب تک ہم مانتے رہے صرف بہت ہی چھوٹی رفتاروں کے لیے عملاً درست ہے۔ اُن رفتاروں کے لیے جو نہ بہت بڑی ہوں نہ بہت چھوٹی، مزاحمت کا اِس مفروضہ سے کہ وہ رفتار کے مربع کے متناسب ہوتی ہے بہتر نتیجے حاصل ہوئے ہیں۔

اِس قانون کو کچھ نظری تائید بھی حاصل ہے۔ مثلاً ایک جسم کی صورت میں جو ہوا میں حرکت کر رہا ہو ع مف ت کے متناسب ہوا کی کمیت جہاں ع رفتار ہے وقت مف ت میں مغلوب (کہنے میں ایسا کہہ سکتے ہیں) ہوتی ہے اور ع کے متناسب اوسط رفتار اس کو ایصال ہوتی ہے۔ اس لیے وہ معیارِ حرکت جو ہوا حاصل کرتی ہے اور اس لیے جو جسم کھوتا ہے ع^{2} فی اکائی وقت کے متناسب ہے[1]۔ اِس استدلال میں ایک نقص ہے اور وہ یہ کہ اس میں یہ تسلیم کیا گیا ہے کہ جسم کے لحاظ سے ہوا کا بہاؤ تمام رفتاروں کے لیے وہی ہندسی تقسیم رکھتا ہے، لیکن اس میں ایک فائدہ یہ ہے کہ ہم یہ دکھا سکتے ہیں کہ بعض شرطوں کے تحت مزاحمت کا ایک معتد بہ حصہ مذکورۂ بالا قانون کی پابندی کر سکتا ہے۔

---

[1] نیوٹن، *Princi pia, Lib 11, prop iv (Scholium)*

چنانچہ مان لو کہ یہ قانون درست ہے تو ایک ذرہ کی صورت میں جو مزاحمت کے سوائے کسی اور قوت کے تحت نہیں ہے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{فرع}}{\text{فرت}} = -\text{ک}\,\text{ع}^{2}\text{،}\quad \frac{\text{فرع}}{\text{فرلا}} = -\text{ک}\,\text{ع} \quad \ldots\ldots\ldots (۱)$$

اس لیے

$$-\frac{1}{\text{ع}^{2}}\,\frac{\text{فرع}}{\text{فرت}} = \text{ک}\text{،}\ \text{یا}\ \frac{1}{\text{ع}} = \text{ک ت} + \text{ا} \quad \ldots\ldots\ldots (۲)$$

اگر ت = ۰ کے لیے ع = ع۰ تو $\text{ا} = \frac{1}{\text{ع}_{0}}$ اور اس لیے

$$\text{ع} = \frac{\text{ع}_{0}}{1 + \text{ک}\,\text{ع}_{0}\,\text{ت}} \quad \ldots\ldots\ldots (۳)$$

(۲۹۱) نیز مساوات کی دوسری شکل ہے

$$\frac{1}{\text{ع}}\,\frac{\text{فرع}}{\text{فرلا}} = -\text{ک}\text{،}\quad \text{لوک ع} = -\text{ک لا} + \text{ب} \quad \ldots\ldots\ldots (۴)$$

اگر ع = ع۰ کے لیے لا = ۰ تو ب = لوک ع۰ اور اس لیے

$$\text{ع} = \text{ع}_{0}\,\text{ق}^{-\text{ک لا}} \quad \ldots\ldots\ldots (۵)$$

ع کو ساقط کرنے سے یا (۳) کے تکمل سے یہ معلوم ہوگا کہ

$$\text{لا} = \frac{1}{\text{ک}}\,\text{لوک}\left(1 + \text{ک}\,\text{ع}_{0}\,\text{ت}\right) \quad \ldots\ldots\ldots (۶)$$

(۵) سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ لا کی کسی محدود قیمت کے لیے ع معدوم نہیں ہوتا اور اس لیے موجودہ مفروضہ کے تحت فاصلہ طے شدہ کی کوئی حد نہیں ہے۔ لیکن یہ قانون چھوٹی رفتاروں کے لیے کوئی عملی اہمیت نہیں رکھتا۔ کہ حقیقی مزاحمت بالآخر ع کے، نہ کہ ع^{2} کے متناسب گھٹتی ہے۔

$\frac{1}{\text{ک}}$ ایک طول کا متکافی ہے یعنے اُس فاصلہ کا جس میں رفتار نسبت $\frac{1}{\text{ق}}$ میں گھٹتی ہے۔ اس طول کو ا سے تعبیر کیا جائے تو

$$\text{لا} = \text{ا}\,\text{لوک}\left(1 + \frac{\text{ع}_{0}\,\text{ت}}{\text{ا}}\right) \quad \ldots\ldots\ldots (۷)$$

۹۸ مستقل آگے بڑھانے والی قوت

ایک ایسے جسم کی صورت میں جو ایک مستقل آگے بڑھانے والی قوت کے تحت بھی ہو اور ایک ایسی مزاحمت کے تحت بھی جو رفتار کے مربع کے متناسب ہے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{فرو}}{\text{فرت}} = \text{ف} - \text{ک}\,\text{و}^{۲} ،\quad \text{و}\,\frac{\text{فرو}}{\text{فرلا}} = \text{ف} - \text{ک}\,\text{و}^{۲} \quad \ldots\ldots(۱)$$

اختتامی رفتار و جب کہ اسراع معدوم ہوتا ہے،

$$\text{ک}\,\text{و}^{۲} = \text{ف} \quad \ldots\ldots(۲)$$

سے حاصل ہوتی ہے۔ اس لیے

$$\frac{\text{فرو}}{\text{فرت}} = \frac{\text{ف}}{\text{و}^{۲}}(\text{و}^{۲} - \text{و}^{۲}) ،\quad \text{و}\,\frac{\text{فرو}}{\text{فرلا}} = \frac{\text{ف}}{\text{و}^{۲}}(\text{و}^{۲} - \text{و}^{۲}) \quad \ldots(۳)$$

اس لیے

$$\frac{۱}{\text{و}^{۲} - \text{و}^{۲}}\,\frac{\text{فرو}}{\text{فرت}} = \frac{\text{ف}}{\text{و}^{۲}} ،\quad \text{مستز}^{-۱}\frac{\text{و}}{\text{و}} = \text{ف}\,\text{ت} + \text{ا} \quad \ldots\ldots(۴)$$

اگر ابتدائی رفتار صفر ہو تو ا = ۰ اور

$$\text{و} = \text{و}\,\text{مستز}\,\frac{\text{ف}\,\text{ت}}{\text{و}} \quad \ldots\ldots(۵)$$

جو ت ← ∞ کے لیے انتہا و کی طرف مائل ہے۔ و = $\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}}$ رکھنے اور (۲۹۲)
ت کے لحاظ سے تکمیل کرنے سے

$$\text{لا} = \frac{\text{و}^{۲}}{\text{ف}}\,\text{لوک جمز}\,\frac{\text{ف}\,\text{ت}}{\text{و}} \quad \ldots\ldots(۶)$$

کسی مستقل کے اضافہ کی ضرورت نہیں، اگر ت = ۰ کے لیے لا = ۰۔
(۳) کی دوسری مساوات سے

$$\text{لا} = \frac{\text{و}^2}{2\text{ف}}\ \text{لوک}\ \frac{\text{و}^2}{\text{و}^2 - \text{ع}^2} \qquad \ldots\ldots\ldots\ (۷)$$

حاصل ہوتا ہے جس کو (۵) اور (۶) سے اخذ کرنا ہوگا۔

اگر ہم ف = ج رکھیں تو اس تحقیق سے وہ مثال ملتی ہے جب کہ ایک جسم جاذبہ کے تحت سکون سے گرتا ہے۔ یہ ایک دخانی جہاز کو متحرک کرنے پر بھی اطلاق پذیر ہے۔ ت کی بڑی قیمتوں کے لیے

$$\text{جمز}\left(\frac{\text{ف ت}}{\text{و}}\right) = \frac{1}{2}\ \text{و}^{\frac{\text{ف ت}}{\text{و}}}\ \text{تقریباً}$$

اور اس لیے

$$\text{لا} = \text{و ت} - \frac{\text{و}^2}{\text{ف}}\ \text{لوک}\ 2 \qquad \ldots\ldots\ldots\ (۸)$$

جہاں آخری رقم اس فاصلہ کو تعبیر کرتی ہے جو رفتار حاصل کرنے میں ضائع ہوتا ہے۔ ضائع شدہ وقت

$$\frac{\text{و}}{\text{ف}} \times \text{لوک}\ 2$$

ہے۔

ایک ایسی مستقل قوت کی صورت میں جو حرکت کے **مزاحم** ہو

$$\frac{\text{فرع}}{\text{فرت}} = -\text{ف} - \text{ک ع}^2 \ \text{یا}\ \text{ع}\frac{\text{فرع}}{\text{فرلا}} = -\text{ف} - \text{ک ع}^2 \qquad \ldots\ldots\ (۹)$$

یہ مساواتیں صرف اس وقت تک درست رہتی ہیں جب تک کہ ع مثبت رہتا ہے۔ اگر دی ہوئی قوت کے تحت و انتہائی رفتار ہو جو (۲) سے تعین ہوتی ہے تو

$$\frac{\text{فرع}}{\text{فرت}} = -\frac{\text{ف}}{\text{و}^2}(\text{و}^2 + \text{ع}^2)\text{، ع}\frac{\text{فرع}}{\text{فرلا}} = -\frac{\text{ف}}{\text{و}^2}(\text{و}^2 + \text{ع}^2)$$

$\ldots\ldots\ (۱۰)$

اس لیے

$$\frac{1}{\text{و}^2 + \text{ع}^2}\ \frac{\text{فرع}}{\text{فرت}} = -\frac{\text{ف}}{\text{و}^2}\text{، مس}^{-1}\frac{\text{ع}}{\text{و}} = -\frac{\text{ف ت}}{\text{و}} + \text{ا}$$

$\ldots\ldots\ (۱۱)$

یا اگر ت = ۰ کے لیے ع = ع۰ تو

$$مس^{-1}\frac{ع}{و} = مس^{-1}\frac{ع_{۰}}{و} - \frac{ف\,ت}{و} \quad \text{......(۱۲)}$$

(۲۹۳) نیز (۱۰) کی دوسری مساوات سے

$$لوک\,(و^{۲} + ع^{۲}) = -\frac{۲\,ف\,لا}{و^{۲}} + ب \quad \text{......(۱۳)}$$

اگر ع = ع۰ کے لیے لا = ۰ تو ب = لوک $(و^{۲} + ع_{۰}^{۲})$ اور اس لیے

$$لا = \frac{و^{۲}}{۲\,ف}\,لوک\,\frac{و^{۲} + ع_{۰}^{۲}}{و^{۲} + ع^{۲}} \quad \text{......(۱۴)}$$

جب جسم سکون میں آتا ہے تو ع = ۰ اور اس لیے

$$ت = \frac{و}{ف}\,مس^{-1}\frac{ع_{۰}}{و}\,،\quad لا = \frac{و^{۲}}{۲\,ف}\,لوک\left(۱ + \frac{ع_{۰}^{۲}}{و^{۲}}\right) \quad \text{......(۱۵)}$$

ایک دخانی جہاز کی صورت میں جس کے انجنوں کو اُلٹا دیا گیا ہو جب کہ وہ پوری رفتار سے جا رہا تھا ع۰ = و حاصل ہوتا ہے۔ اس لیے وہ وقت جو جہاز کو ٹھیرانے میں مطلوب ہے

$$ت = \frac{۱}{۴}\,\frac{\pi\,و}{ف} \quad \text{......(۱۶)}$$

ہے اور اِس وقت میں فاصلہ طے شدہ

$$لا = \frac{و^{۲}}{۲\,ف}\,لوک\,۲ \quad \text{......(۱۷)}$$

ہے۔

مثال ۔ ایک ذرہ کی صورت میں جس کو انتصاباً اوپر وار رفتار ع۰ سے پھینکا گیا ہو حاصل کردہ ارتفاع ھ، (۱۴) میں ع = ۰ رکھنے سے حاصل ہوتا ہے چنانچہ

$$ھ = \frac{و^{۲}}{۲\,ج}\,لوک\left(۱ + \frac{ع_{۰}^{۲}}{و^{۲}}\right) \quad \text{......(۱۸)}$$

اور (۱۵) کی رو سے چڑھاؤ کا وقت

$$\text{ت} = \frac{\text{و}}{\text{ج}}\,\text{مس}^{-1}\frac{\text{ع}_0}{\text{و}} \qquad (19)$$

ہے۔

وقت ت_1 جو اس کے بعد اُتار میں صرف ہوتا ہے (۶) سے حاصل ہوتا ہے، چنانچہ

$$\text{ت}_1 = \frac{\text{و}}{\text{ج}}\,\text{جنز}^{-1}\,\text{و}^{\frac{\text{ج ھ}}{\text{و}^2}} = \frac{\text{و}}{\text{ج}}\,\text{جنز}^{-1}\left(1 + \frac{\text{ع}_0^2}{\text{و}^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{\text{و}}{\text{ج}}\,\text{لوک}\left\{\frac{\text{ع}_0}{\text{و}} + \left(1 + \frac{\text{ع}_0^2}{\text{و}^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right\} \qquad (20)$$

اُتار میں جو رفتار ع_1 حاصل ہوتی ہے (۷) سے معلوم ہوتی ہے چنانچہ

$$\frac{\text{ع}_1^2}{\text{و}^2} = 1 - \text{و}^{-\frac{2\text{ج ھ}}{\text{و}^2}} = \frac{\text{ع}_0^2}{\text{و}^2 + \text{ع}_0^2} \qquad (21)$$

(۱۸) سے۔

جب نسبت $\frac{\text{ع}_0}{\text{و}}$ چھوٹی ہو تو تقریباً (294

$$\text{ھ} = \frac{\text{ع}_0^2}{2\text{ج}}\left(1 - \frac{\text{ع}_0^2}{2\text{و}^2}\right),\quad \text{ت} = \frac{\text{ع}_0}{\text{ج}}\left(1 - \frac{\text{ع}_0^2}{3\text{و}^2}\right) \qquad (22)$$

$$\text{ت}_1 = \frac{\text{ع}_0}{\text{ج}}\left(1 - \frac{\text{ع}_0^2}{6\text{و}^2}\right),\quad \text{ع}_1 = \text{ع}_0\left(1 - \frac{\text{ع}_0^2}{2\text{و}^2}\right) \qquad (23)$$

۹۹۔ مرمیوں پر مزاحمت کا اثر

ایک مرمی کی حرکت پر مزاحمت کا عمومی اثر آسانی سے سمجھ میں آسکتا ہے اگر ہم فوری عماسی دھکوں کے تواتر کے اثر پر غور کریں جن میں سے ہر ایک رفتار کو گھٹاتا ہے۔ چونکہ عماوی اسراع $\frac{\text{و}^2}{\text{ہ}}$ جاذبہ کے اُس جزو ترکیبی کے مساوی ہے جو راستہ [illegible]

عماد کی سمت میں ہے اس لیے اُس میں کوئی فوری تبدیلی نہیں ہوتی، و کی تخفیف سے انحنا و بڑھتا ہے۔ اس لیے راستہ اس مکافی راستہ سے جو ذرّہ مرتسم کرتا اگر کوئی مزید مزاحمت نہ ہوتی مسلسل اندروار منحرف ہوتا ہے اور حرکت بالآخر اختتامی رفتار کے ساتھ انتصابی ہونے کا میلان رکھتی ہے۔

اگر "فوری مکافی" کا نیم وتر خاص ل ہو تو دفعہ ۲۷ سے

ل = و² جم² سا / ج .... (۱)

جہاں راستہ کا میلان افقی کے ساتھ سا ہے۔ اس لیے ایک چھوٹے مماسی دھکہ کی صورت میں

مف ل / ل = ۲ مف و / و .... (۲)

مف و = - ف مف ت رکھنے سے جہاں ف، واسطہ کی وجہ سے ابطاء ہے حاصل ہوتا ہے

(۱ / ل) (فرل / فرت) = - ۲ف / و .... (۳)

مثلاً اگر ف = ک و² .... (۴)

تو (۱ / ل) (فرل / فرت) = - ۲ک و = - ۲ک فرس / فرت .... (۵)

اس لیے ل = ج ہ^(-۲ک س) .... (۶)

جس سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ مکافی کے مبدل میں بتدریج تخفیف ہوتی ہے۔

مزاحمت کی وہ مخصوص صورت جس میں مزاحمت رفتار کے متناسب ہوتی ہے پوری طرح کارٹیزی مساواتوں کے ذریعہ حل ہوسکتی ہے کہ اس صورت میں کارٹیزی مساواتیں ایک دوسرے کے غیر تابع ہوتی ہیں۔ معمولی محوروں (افقی اور انتصابی) کے حوالے سے۔

$$\frac{فر^{2} لا}{فر ت^{2}} = - ک \frac{فر س}{فر ت} جم سا = - ک \frac{فر لا}{فر ت} \qquad .... (۷)$$

اور

$$\frac{فر^{2} ما}{فر ت^{2}} = - ج - ک \frac{فر س}{فر ت} جب سا = - ج - ک \frac{فر ما}{فر ت} \qquad ..... (۸)$$

پس پہلی مساوات سے حاصل ہوتا ہے

$$لوک \frac{فر لا}{فر ت} = - ک ت + ا ، \quad \frac{فر لا}{فر ت} = ج \, و^{-ک ت} ،$$

$$لا = د - \frac{ج}{ک} و^{-ک ت} \qquad .... (۹)$$

اگر ت = ۰ کے لیے لا = ۰، $\frac{فر لا}{فر ت} = ع_{۰}$ تو ج = $ع_{۰}$، د = $\frac{ع_{۰}}{ک}$ اس لیے

$$لا = \frac{ع_{۰}}{ک} \left(۱ - و^{-ک ت}\right) \qquad .... (۱۰)$$

جیسا کہ دفعہ ۹۲ (۸) میں حاصل ہوا تھا۔

نیز (۸) کو شکل

$$\frac{فر^{2} ما}{فر ت^{2}} + ک \frac{فر ما}{فر ت} = - ج \qquad .... (۱۱)$$

میں لکھنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ ایک خاص پہلا تکملہ $\frac{فر ما}{فر ت} = - \frac{ج}{ک}$ ہے، اس لیے تکملہ کی تکمیل کرنے سے

$$\frac{فر ما}{فر ت} = - \frac{ج}{ک} + ج \, و^{-ک ت} \qquad .... (۱۲)$$

پھر تکمیل کرنے سے

$$ما = - \frac{ج ت}{ک} - \frac{جَ}{ک} و^{-ک ت} + دَ \qquad .... (۱۳)$$

اگر ت = ۰ کے لیے ما = ۰، $\frac{فر ما}{فر ت} = و_{۰}$ تو جَ = $\frac{ج}{ک} + و_{۰}$، دَ = $\frac{جَ}{ک}$ ،
اس لیے

$$\text{ما}' = -\frac{\text{ج ت}}{\text{ک}} + \left(\frac{\text{و}_0}{\text{ک}} - \frac{\text{ج}}{\text{ک}^2}\right)\left(1 - \text{و}^{-\text{ک ت}}\right) \quad \ldots\ldots (14)$$

(۱۰) سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ خط مستقیم

$$\text{لا} = \frac{\text{ع}_0}{\text{ک}} = \frac{\text{ع}_0\,\text{و}}{\text{ج}} \quad \ldots\ldots (15)$$

راستہ کا متقارب ہے جہاں و اختتامی رفتار ہے۔

یہ امر قابل ذکر ہے کہ اس تحقیق کی صرف تمثیلی قدر ہے کیونکہ مزاحمت کا خطی قانون مرمی کی صورت میں درست نہیں ہوتا۔

رفتار کے مربع کے متناسب مزاحمت کا مفروضہ عملی نقطۂ نگاہ سے قابل ترجیح (۲۹۶)
ہے لیکن اس کو اس قدر آسانی کے ساتھ حل نہیں کیا جا سکتا۔ اب حرکت کی مساواتیں

$$\frac{\text{فر}^2\text{لا}}{\text{فرت}^2} = -\text{ک و}^2\,\text{جم سا}، \quad \frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فرت}^2} = -\text{ج} - \text{ک و}^2\,\text{جب سا} \quad \ldots\ldots (16)$$

ہیں چونکہ $\frac{\text{فر لا}}{\text{فرت}}$ = و جم سا اس لیے ان میں سے پہلی مساوات کو

$$\frac{\text{لا}''}{\text{لا}'} = -\text{ک و} = -\text{ک س}' \quad \ldots\ldots (17)$$

لکھا جا سکتا ہے۔ اس لیے

$$\text{لوگ لا}' = -\text{ک س} + \text{مستقل}$$

یا

$$\text{لا}' = \text{ع}_0\,\text{و}^{-\text{ک س}} \quad \ldots\ldots (18)$$

جہاں س = ۰ کے متناظر افقی رفتار ع۰ ہے۔ یہ آسانی سے معلوم ہوگا کہ یہ مساوات (۹) کے معادل ہے۔

عمل کو آگے بڑھانے میں (۱۶) کی دوسری مساوات کو استعمال کرنے کی بجائے عماد کی سمت میں تحلیل کرنا سہولت بخش ہے۔ چنانچہ عہ کی علامت کے متعلق معمولی قرارداد کے مطابق

$$\frac{\text{و}^2}{\text{عہ}} = -\text{ج جم سا} \quad \ldots\ldots (19)$$

حاصل ہوتا ہے - اب

$$\text{و} = \text{لا قطسا} = \text{ع}\,\bar{\text{و}}^{\text{ک س}}\,\text{قطسا} \qquad (۲۰)$$

رکھنے سے

$$\frac{۱}{\text{ع}^{۲}} = \frac{\text{فر}^{۲}\text{ما}}{\text{فرلا}^{۲}}\,\text{جم}^{۳}\text{سا} \qquad (۲۱)$$

اور اس لیے

$$\frac{\text{فر}^{۲}\text{ما}}{\text{فرلا}^{۲}} = -\frac{\text{ج}}{\text{ع}^{۲}}\,\text{و}^{۲\text{ک س}} \qquad (۲۲)$$

اگر ہم مرمی کے اُس حصہ پر اپنی توجہ محدود رکھیں جو تقریباً افقی ہے تو ہم س کی بجائے لا رکھ سکتے ہیں کیوں کہ ان میں چھوٹی مقداروں کے دوسرے رتبہ کا فرق ہے - اس طرح

$$\frac{\text{فر}^{۲}\text{ما}}{\text{فرلا}^{۲}} = -\text{ج}\,\frac{\text{و}^{۲\text{ک لا}}}{\text{ع}^{۲}} \qquad (۲۳)$$

تکمل کرنے سے

$$\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = -\frac{\text{ج}}{۲\text{ک ع}^{۲}}\,\text{و}^{۲\text{ک لا}} + \text{ا} \qquad (۲۴)$$

$$\text{ما} = -\frac{\text{ج}}{۴\text{ک}^{۲}\text{ع}^{۲}}\,\text{و}^{۲\text{ک لا}} + \text{ا لا} + \text{ب} \qquad (۲۵)$$

اگر ہم یہ فرض کریں کہ لا = ۰ کے لیے ما = ۰، $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ = مس عہ جہاں عہ (۲۹۰)
بلاشبہ چھوٹا فرض کیا گیا ہے تو حاصل ہوتا ہے

$$\text{ا} = \frac{\text{ج}}{\text{ک ع}^{۲}} + \text{مس عہ}،\quad \text{ب} = \frac{\text{ج}}{۴\text{ک}^{۲}\text{ع}^{۲}}$$

اور راستہ (تقریباً افقی) کی مساوات

$$\text{ما} = \text{لا}\left(\text{مس عہ} + \frac{\text{ج}}{۲\text{ک ع}^{۲}}\right) + \frac{\text{ج}}{۴\text{ک}^{۲}\text{ع}^{۲}}\left(۱ - \text{و}^{۲\text{ک لا}}\right) \qquad (۲۶)$$

ہے -

یہ ہم دیکھ چکے ہیں کہ ک = $\frac{1}{\text{ا}}$ جہاں ا وہ فاصلہ ہے جس کے اندر ایک ذرہ کی رفتار جو صرف مزاحمت کے تحت ہے نسبت $\frac{1}{\text{ر}}$ میں گھٹتی ہے۔ اگر لا اس فاصلہ کے مقابلہ میں چھوٹا ہے تو (٢٦) میں قوت نما کو پھیلانے سے

$$\text{ما} = \text{لا}\,\text{س}\,\text{ع} - \frac{\text{ج}}{\text{٢}\,\text{ع}^{2}}\,\text{لا}^{2} - \frac{\text{ج}\,\text{ک}}{\text{٣}\,\text{ع}^{2}}\,\text{لا}^{3} \qquad \ldots\ldots\ldots (\text{٢٧})$$

اس سلسلہ کی پہلی دو رقموں سے وہ مکافی راستہ حاصل ہوتا ہے جو مزاحمت کی عدم موجودگی میں مرتسم ہوتا۔

١٠٠۔ سیاروی مداروں پر مزاحمت کا اثر

ایک سیارہ کی حرکت پر مزاحم واسطہ کا اثر دفعہ ٨٢ کے ضابطوں سے معلوم کیا جا سکتا ہے۔ وہاں یہ ثابت کیا گیا تھا کہ مماسی دھکہ مف و کی وجہ سے اوسط فاصلہ میں جو تبدیلی ہوتی ہے وہ

$$\frac{\text{مف}\,\text{ا}}{\text{ا}} = \frac{\text{٢}\,\text{و}\,\text{مف}\,\text{و}}{\text{ن}^{2}\,\text{ا}^{2}} \qquad \ldots\ldots\ldots (\text{١})$$

سے حاصل ہوتی ہے جہاں ن اوسط زاویئی رفتار ہے۔ مف و = ۔ ف مف ت رکھنے سے (جہاں ف ابطاء ہے) حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{فر}\,\text{ا}}{\text{فر}\,\text{ت}} = -\frac{\text{٢}\,\text{و}\,\text{ف}}{\text{ن}^{2}\,\text{ا}} \qquad \ldots\ldots\ldots (\text{٢})$$

نیز دفعہ ٨٢ (٤) سے

$$\frac{\text{فر}\,\text{ے}}{\text{فر}\,\text{ت}} = -\left(\text{١} + \frac{\text{و}^{2}}{\text{ن}^{2}\,\text{ا}^{2}}\right)\frac{\text{ے}\,\text{ف}}{\text{ا}} \qquad \ldots\ldots\ldots (\text{٣})$$

اس لیے مدار مسلسل سکڑتا ہے۔

اوسط حرکت میں تبدیلی

$$\frac{\text{فر}\,\text{ن}}{\text{فر}\,\text{ت}} = \frac{\text{٣}\,\text{و}\,\text{ف}}{\text{ن}\,\text{ا}^{2}} \qquad \ldots\ldots\ldots (\text{٤})$$

سے حاصل ہوتی ہے ۔ اس لیے زاویٰ رفتار مسلسل بڑھتی ہے ۔
اوسط توانائی بالحرکت (ک) بھی مسلسل بڑھتی ہے، اس کے لیے ضابطہ (۲۹

$$\frac{\text{فرک}}{\text{فرت}} = \text{وف} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (۵)$$

ہے ۔لیکن کُل توانائی بلاشبہ مسلسل گھٹتی ہے ۔

مثالیں (۲۱)

۱ ۔ ایک ذرہ کو انتصاباً اوپر وار پھینکا گیا ہے ۔ اگر ہوا کی مزاحمت مستقل اور ذرہ کے وزن کا $\frac{1}{\text{ن}}$ ہو تو ثابت کرو کہ چڑھاؤ اور اُتار کے وقتوں میں نسبت

$$\sqrt{\text{ن} - 1} : \sqrt{\text{ن} + 1}$$

ہے ۔

۲ ۔ ایک قصری برق مقناطیسی سوئی کے تین متصلہ نقاط سکون کی پیمانہ کی قرائتیں لا_1، لا_2، لا_3 ہوں تو ثابت کرو کہ توازن کی قرارت

$$\frac{\text{لا}_1\text{لا}_3 - \text{لا}_2^2}{\text{لا}_1 + \text{لا}_3 - 2\text{لا}_2}$$

ہے ۔

اگر قصر خفیف ہو تو ثابت کرو کہ یہ تقریباً

$$\frac{1}{4}(\text{لا}_1 + 2\text{لا}_2 + \text{لا}_3)$$

کے مساوی ہے ۔

۳ ۔ اگر ایک ذرہ جاذبہ کے اور ایک مزاحمت کے تحت ہو جو رفتار کے متناسب ہے تو ثابت کرو کہ رسم الطریق ایک خط مستقیم ہے ۔

۴ ۔ اگر ایک دائرہ کے انتصابی قطر کے دو سروں میں سے کسی ایک سے وتر کھینچے جائیں تو ثابت کرو کہ ان میں سے ہر وتر پر اُتار کا وقت ایسے واسطہ میں جو رفتار کے متناسب ہے وہی ہے ۔

۵ ۔ ایک ذرہ ایک چکنے خط تدویر پر جس کا محور انتصابی اور راس نیچے وار ہے حرکت کرتا ہے ۔ اگر وہ جاذبہ کے علاوہ ایک مزاحمت کے تحت ہو جو رفتار کے متناسب ہے تو ثابت کرو کہ اہتزاز پھر بھی مساوی الوقت ہوں گے ۔

۶ ۔ ثابت کرو کہ دفعہ ۹۵ کے مسئلہ میں قسری اہتزاز کی اوسط توانائی اعظم ہوگی جب کہ

$$\text{پ}^2 = \text{مہ} - \frac{1}{4}\text{ک}^2 \quad \text{تقریباً}$$

اگر $\frac{\text{ک}^2}{4\,\text{مہ}}$ چھوٹا ہو۔

۷ ۔ ثابت کرو کہ مساوات

$$\frac{\text{فر}^2\,\text{لا}}{\text{فرت}^2} + \text{ک}\,\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}} + \text{مہ}\,\text{لا} = \text{ف}\,(\text{ت})$$

کا حل

$$\text{لا} = -\frac{1}{\text{ن}}\,\text{و}^{-\frac{1}{2}\text{ک ت}}\,\text{جم ن ت} \int \text{و}^{\frac{1}{2}\text{ک ت}}\,\text{ف}\,(\text{ت})\,\text{جب ن ت فرت}$$

$$+\,\frac{1}{\text{ن}}\,\text{و}^{-\frac{1}{2}\text{ک ت}}\,\text{جب ن ت} \int \text{و}^{\frac{1}{2}\text{ک ت}}\,\text{ف}\,(\text{ت})\,\text{جم ن ت فرت}$$

ہے جہاں

$$\text{ن} = \sqrt{\text{مہ} - \frac{1}{4}\text{ک}^2}$$

۸ ۔ ثابت کرو کہ اگر $\text{ک}^2 = 4\,\text{مہ}$ تو پچھلی مساوات کا حل

$$\text{لا} = \text{و}^{-\frac{1}{2}\text{ک ت}} \iint \text{و}^{\frac{1}{2}\text{ک ت}}\,\text{ف}\,(\text{ت})\,\text{فرت فرت}$$

ہے۔

(۲۹۹) ۹ ۔ ثابت کرو کہ خطی حرکت کی صورت میں جو صرف ایک ایسی مزاحمت کے تحت ہو جو رفتار کے مربع کے متناسب ہے وقت کے کسی وقفہ میں اوسط ابطاء وقفہ کے شروع اور ختم پر کے ابطاؤں کے ہندسی اوسط کے مساوی ہوتا ہے ۔

۱۰ ۔ ایک جسم ایک واسطہ میں جس کی مزاحمت رفتار کے مربع کے متناسب ہے حرکت کرتا ہے ۔ ثابت کرو کہ اگر رفتار قانون

$$ع = ع (۱ + عہ جم پ ت)$$

کے بموجب متغیر ہو تو مطلوبہ آگے بڑھانے والی قوت (فی اکائی وقت) اُس سے نسبت ۱ + $\frac{۱}{۲}$ عہ^۲ میں بڑی ہو گی اگر رفتار مستقل اور ع کے مساوی ہوتی۔
نیز ثابت کرو کہ توانائی کے خرچ کی اوسط شرح نسبت ۱ + $\frac{۳}{۲}$ عہ^۲ میں بڑھ جاتی ہے۔

۱۱ - اگر رفتار قانون

$$ع = ع (۱ + بہ جم م لا)$$

کی بموجب بدلے جہاں بہ چھوٹا ہے تو ثابت کرو کہ اوسط آگے بڑھانے والی قوت (فی اکائی وقت) اُس سے نسبت ۱ - $\frac{۱}{۲}$ بہ^۲ میں کم ہے اگر رفتار ع ہوتی اور یہ کہ ایک دیے ہوئے فاصلہ کو طے کرنے کا اوسط وقت نسبت ۱ + $\frac{۱}{۲}$ بہ^۲ میں بڑا ہے۔
ثابت کرو کہ توانائی کے خرچ کی اوسط شرح نہیں بدلتی۔

۱۲ - ایک ذرہ کو انتصاباً اوپر وار ایسے واسطہ میں پھینکا گیا ہے جس کی مزاحمت رفتار کے مربع کے متناسب ہے اور مزاحمت کی قدر ایسی ہے کہ اختتامی رفتار ۳۰۰ فٹ فی ثانیہ ہو گی۔ اگر پھینکنے کی رفتار ایسی ہو کہ وہ مزاحمت کی عدم موجودگی میں ذرہ کو ۱۰۰ فٹ کے ارتفاع تک لے جاتی تو معلوم کرو کہ فی الواقع ذرہ نے کیا ارتفاع حاصل کیا ہے
[۹۶٫۴ فٹ]

۱۳ - ق ٹن کا ایک جہاز ایسی طاقت ھ کے تحت پوری رفتار (و بحری میل) سے ایک ایسی مزاحمت کے خلاف جا رہا ہے جو رفتار کے مربع کے متناسب ہے ثابت کرو کہ پیچ کا کل دباؤ

$$\frac{۱٫۴۵ ھ}{و} \text{ ٹن}$$

ہے۔
اگر انجنوں کو الٹا دیا جائے تو ثابت کرو کہ جہاز

$$\frac{۲۸۳ ق و^۲}{ھ} \text{ ثانیوں}$$

میں فاصلہ

$$\frac{\text{۲۱۱ء ق و}^{۳}}{\text{ھ}} \text{ فٹ}$$

طے کرنے کے بعد سکون میں آئے گا۔

صورت ق = ۰۰۲ء، ھ = ۵۰۰ء، و = ۲۰ میں نتیجے حاصل کرو۔

[۵۴ ثانیے، ۶۷ء۵ فٹ]

(مان لو کہ بحری میل = ۶۰۸۰ فٹ)

۱۴۔ ایک ذرہ قوت کے ایک مرکز کے گرد جو فاصلہ کے متناسب ہے ایک خط مستقیم میں اہتزاز کرتا ہے اور ابطار ک × (رفتار)^{۲} کے تحت ہے۔ اگر مخالف جانبوں پر دو متصلہ ابتعاد ا، ب ہوں تو ثابت کرو کہ

$$(\text{۱} + \text{۲ک ا})\ \text{و}^{\text{۲ک ا}} = (\text{۱} - \text{۲ک ب})\ \text{و}^{\text{۲ک ب}}$$

اگر ا لا متناہی ہو تو نتیجہ کیا شکل اختیار کریگا۔

۱۵۔ اگر ایک ذرہ جس کو رفتار ع سے چلایا گیا ہے صرف مزاحمت

$$\text{ک ع} + \text{کَ ع}^{۲}$$

کے تحت ہو تو ثابت کرو کہ اس کے ساکن ہونے سے پہلے طے شدہ فاصلہ

$$\frac{۱}{\text{کَ}} \text{ لوک } \left(۱ + \frac{\text{کَ}}{\text{ک}} \text{ ع}\right)$$

ہوگا۔

۱۶۔ اگر ابطار ک لا^{۳} کے مساوی ہو تو ثابت کرو کہ

$$\text{ت} = \text{ا لا}^{۲} + \text{ب لا} + \text{ج}$$

جہاں ا، ب، ج مستقل ہیں۔ ان مستقلوں کو معلوم کرو اگر یہ دیا گیا ہو کہ ت = ۰ کے لیے لا = لا، لاَ = ع۔

۱۷۔ ایک گولی افقی طور پر حرکت کر رہی ہے اور وہ تین پردوں کو جو فصلوں ا پر ہیں متواتر چھیدتی ہے۔ یہ مان کر کہ مزاحمت رفتار کے مکعب کے متناسب ہے ثابت کرو کہ درمیانی پردہ پر رفتار اُس وقفہ میں اوسط رفتار کے مساوی ہے جو

پہلے اور تیسرے پردوں سے گزرنے کے درمیان ہے۔

نیز ثابت کرو کہ اگر پہلے پردے سے دوسرے تک اور دوسرے سے تیسرے تک گزرنے کے وقت علی الترتیب $ت_۱$، $ت_۲$ ہوں تو ابتدائی اور آخری رفتاریں علی الترتیب

$$\frac{۲ا}{۲ت_۱ - ت_۲} \quad \text{اور} \quad \frac{۲ا}{۲ت_۲ - ت_۱}$$

ہیں۔

۱۸۔ ثابت کرو کہ پچھلے سوال میں گولی درمیانی پردے سے ایک ایسے فاصلہ پر چلنی چاہیے جو

$$\frac{ت_۱ + ت_۲}{ت_۱ - ت_۲} \times \frac{ا}{۲}$$

سے کم ہے اور یہ کہ وہ وقت جو اِس نقطہ تک گزر چکا ہے

$$\frac{۱}{۸} \frac{(ت_۱ + ت_۲)^۲}{ت_۱ - ت_۲}$$

سے کم ہونا چاہیے۔

۱۹۔ ایک نقطہ جو ایسے ابطاء کے تحت ہے جو رفتار کے مکعب کے متناسب ہے رفتار ب سے چلتا ہے اور ابتدائی ابطاء ف ہے۔ ثابت کرو کہ وقت ت میں طے شدہ فاصلہ

$$\frac{ب^۲}{ف} \left\{ \sqrt{۱ + \frac{۲ف ت}{ب}} - ۱ \right\}$$

ہے۔

۲۰۔ ایک ذرہ ابطاء ف (ت) کے تحت ہے جو اس کو وقت تہ میں ساکن کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ طے شدہ فاصلہ

$$\int_{ب}^{تہ} ت\, ف(ت)\, فرت$$

ہے۔

۲۱ - ثابت کرو کہ ایک مرمی کی حرکت میں

$$\frac{\text{فر}^{۲}\,\text{ما}}{\text{فر}\,\text{لا}^{۲}} = -\frac{\text{ج}}{\text{ع}^{۲}}$$

جہاں ع افقی رفتار ہے خواہ مزاحمت کا قانون کچھ ہی ہو - محاور لا اور ما علی الترتیب افقی اور انتصابی ہیں -

تیرھواں باب

آزادی کے دو درجوں کے نظام

۱۰۱- چکنی سطح پر ذرّہ کی حرکت

جب کسی جیلی نظام کے مختلف حصوں کے محلوں کو مشخص کرنے کے لیے ن غیر تابع متغیر ضروری اور کافی ہوں تو ہم کہتے ہیں کہ یہ نظام آزادی کے ن درجے رکھتا ہے۔ ان متغیروں کو ایک عام مفہوم میں نظام کے محدد کہا جاتا ہے۔ مثلاً ایک ذرّہ کا محل جو ایک کروی سطح پر حرکت پذیر ہو اس کے عرض بلد اور طول بلد سے مقرر ہو سکتا ہے، شکل ۶۴ (دفعہ ۶۸) میں دوہرے رقاص کی تشکیل زاویوں طہ، اور فہ سے مشخص ہوتی ہے ایک استوار جسم کا محل جو دو ابعاد میں حرکت پذیر ہو اس کے مرکز کمیت کے دو محددوں اور اس زاویہ سے حسب دفعہ ۶۳ معین ہو سکتا ہے جس میں سے وہ کسی معیاری محل سے گھوم چکا ہے، اور علیٰ ہذا۔

ایک ایسے تحفظی نظام کا نظریہ جس کو آزادی کا ایک درجہ حاصل ہو دفعہ ۶۵ میں ایک عام طریقہ پر زیر بحث آ چکا ہے۔ چونکہ اس صورت میں صرف ایک محدد ہوتا ہے اس لیے توانائی کی مساوات مع ابتدائی شرطوں کے حرکت کو پوری طرح متعین کرتی ہے۔

جب ہم آزادی کے ایک سے زیادہ درجے رکھنے والے نظاموں پر غور کرتے ہیں تو صرف توانائی کی مساوات کافی نہیں ہوتی اور مزید حرکیاتی اصول کی تلاش ضروری ہو جاتی ہے۔ ایسے نظاموں کی صورت میں جن کو آزادی کے دو درجے حاصل ہوں اور خاص کر جب کہ حرکت دو ابعاد میں ہو زاویٔ معیار حرکت کے اصول سے بعض اوقات نامعلوم تعاملوں سے بری شکل میں مطلوبہ زائد معلومات حاصل ہوتے ہیں۔ ہمیں اس کی ایک مثال مرکزی قوتوں کے نظریہ میں ملی تھی (دفعہ ۷۶، ۸۴)۔

دوسری مثال کے طور پر ہم اس ذرہ کی صورت لے سکتے ہیں جو ایک چکنی گردشی سطح پر حرکت کر رہا ہو اور سطح کے تعامل کے سوا کسی اور قوت کے تحت نہ ہو۔ (۳۰۲) چونکہ یہ تعامل کوئی کام نہیں کرتا اس لیے رفتار و مستقل ہوتی ہے۔ نیز چونکہ تعامل کی سمت تشاکل کے محور سے متقاطع ہوتی ہے اس لیے اس محور کے گرد ذرہ کا زاویٔ معیار حرکت مستقل ہوتا ہے۔ نتیجہ کو تحلیلی طور پر بیان کرنے کے لیے فرض کرو کہ محور سے ذرہ کا فاصلہ ر سے تعبیر ہوتا ہے اور فہ وہ زاویہ ہے جو حرکت کی سمت عرض بلد کے دائرے سے بناتی ہے۔ رفتار کو دو اجزاء ترکیبی و جم فہ اور و جب فہ میں تحلیل کیا جا سکتا ہے جن میں سے اول الذکر اس دائرے پر اور دوسرا نصف النہار پر ہو۔ ان میں سے صرف پہلا جزو ترکیبی ہی محور کے گرد معیار رکھتا ہے۔ پس چونکہ و مستقل ہے اس لیے

ر جم فہ = مستقل .... (۱)

یہ راستے کو متعین کرنے کے لیے پہلے رتبہ کی ایک تفرقی مساوات ہے۔

چونکہ جم فہ اکائی سے متجاوز نہیں ہو سکتا اس لیے کسی دی ہوئی صورت میں ر کی قیمت کی ایک نچلی حد ہوتی ہے۔ مثلاً اگر سطح ایک گردشی ناقص نما کے مشابہ ہو اور اگر ذرہ خط استوا کو (جس کا نصف قطر ا ہے) زاویہ عہ پر عبور کریگا تو

ر جم فہ = ا جم عہ .... (۲)

اور اس لیے راستہ نصف قطر ا جم عہ کے دو متوازی دائروں کے درمیان جن کو وہ متبادلاً مس کرتا ہے واقع ہے۔

چونکہ عماد کی سمت میں عمل کرنے والی قوت کے سوا کوئی اور قوت ذرہ پر نہیں ہے اس لیے یہ سمت حاصل اسراع کی سمت ہونی چاہیے ۔ دفعہ ۲۴ میں یہ بیان کیا جا چکا ہے کہ یہ حاصل ہمیشہ راستہ کے لمثی مستوی میں واقع ہوتا ہے ۔ اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ ذرہ اس سطح پر وہ سیدھے سے سیدھا راستہ اختیار کرتا ہے جو اس کے لیے ممکن ہے یعنے ہندسہ مستوی کی زبان میں وہ ایک تقسیم ارضی Geodesic مرتسم کرتا ہے ۔

مثال ۔ ایک ذرہ کی حرکت میں جو ایک گردشی مقعر سطح کے خط استوا پر سے خفیف طور پر خلل ڈالا گیا ہے ۔

اگر استوائی دائرہ کے مستوی سے فاصلہ ی، اس دائرہ کا نصف قطر ا، اور استوا پہ کے نصف النہار کا نصف قطر انحنا، غ ہو تو

$$\text{ا} - \text{ر} = \frac{\text{ی}^{2}}{۲\,\text{غ}} \qquad \text{......................(۳)}$$

اگر ی چھوٹا ہے ۔ اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ ی کے مقابلہ میں ز کو نظر انداز کیا جا سکتا ہے ۔ اگر طہ طول بلد ہو اور اس لیے استوائی مستوی پر ذرہ کے ظِل کے قطبی محدد ر، طہ ہوں تو زاویٔ معیار حرکت کے اصول سے

$$\text{ر}^{2}\,\dot{\text{طہ}} = \text{ھ} \qquad \text{......................(۴)}$$

جہاں ھ ایک مستقل ہے ۔ نیز

$$\text{و}^{2} = \dot{\text{ز}}^{2} + \text{ر}^{2}\,\dot{\text{طہ}}^{2} + \dot{\text{ی}}^{2} = \dot{\text{ی}}^{2} + \frac{\text{ھ}^{2}}{\text{ر}^{2}} \qquad \text{..............(۵)}$$ (۳۰۳)

اگر ز² کو نظر انداز کیا جائے ۔ (۳) سے اندراج کرنے پر

$$\text{و}^{2} = \dot{\text{ی}}^{2} + \frac{\text{ھ}^{2}}{\text{ا}^{2}}\left(۱ - \frac{\text{ی}^{2}}{۲\,\text{غ}\,\text{ا}}\right)^{-۲} = \dot{\text{ی}}^{2} + \frac{\text{ھ}^{2}}{\text{ا}^{2}}\left(۱ + \frac{\text{ی}^{2}}{\text{غ}\,\text{ا}}\right) \qquad \text{.....(۶)}$$

تقریباً ۔ اس لیے

$$\text{ھ} = \text{ا}^{2}\,\text{سہ} \qquad \text{......................(۷)}$$

رکھنے سے

$$\dot{\text{ی}}^{2} + \frac{\text{سہ}^{2}}{\text{غ}}\,\text{ا}\,\text{ی}^{2} = \text{مستقل} \qquad \text{......................(۸)}$$

اس لیے $\ddot{ی} + \frac{س^2 د}{غ}\, ی = 0$ ……………… (9)

اس لیے ی کے تغیر سادہ موسیقی ہیں جن کا دَور

$\frac{2\pi}{س}\sqrt{\frac{غ}{د}}$ ……………… (10)

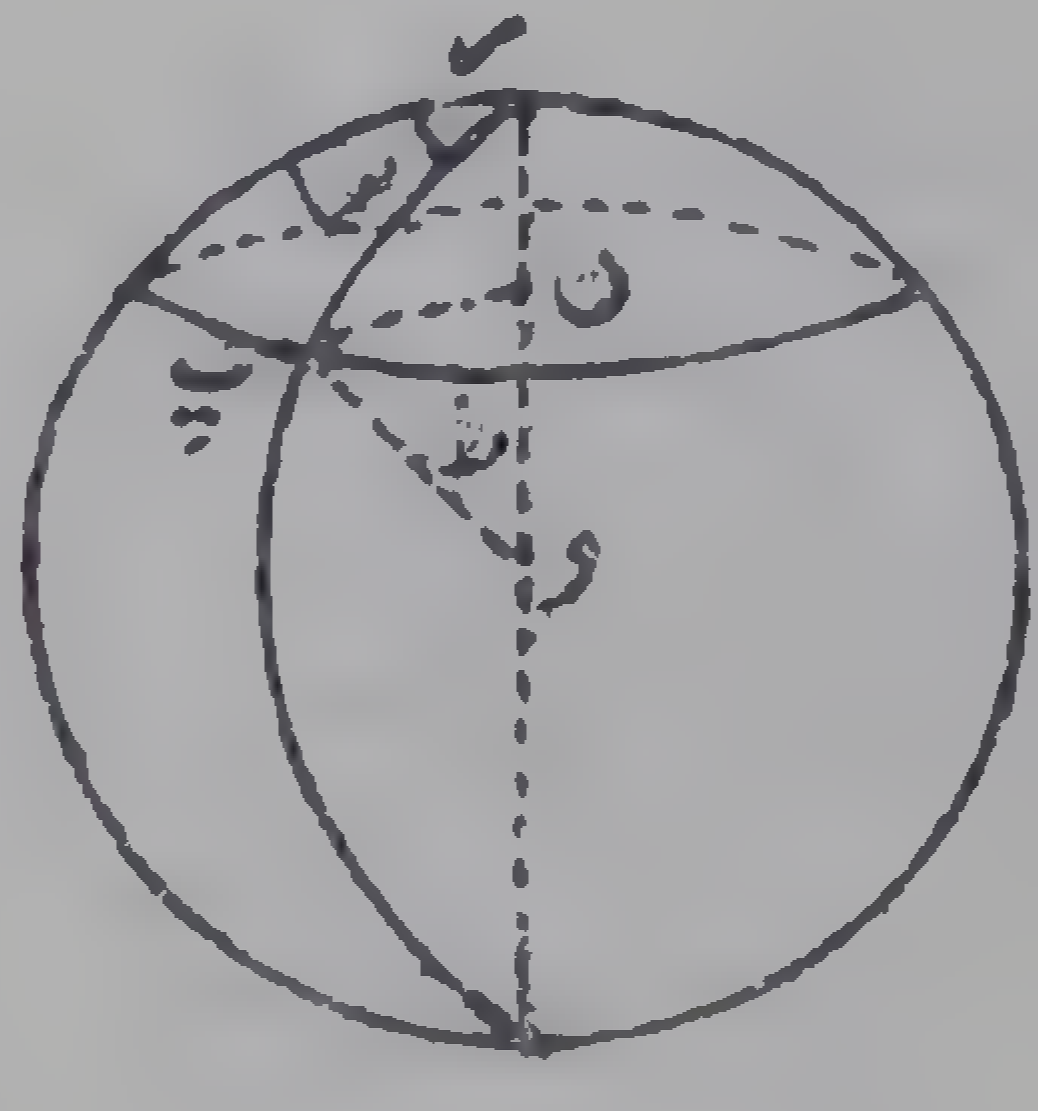
ہے۔ نصف دَور میں ذرہ محور کے گرد تقریباً $\pi\sqrt{\frac{غ}{د}}$ کا زاویہ مرتسم کرتا ہے۔

ناقص نما کی صورت میں اگر تشاکل کے محور کا طول ۲ ب ہو تو $غ = \frac{ب^2}{د}$ اور یہ زاویہ $\frac{\pi ب}{د}$ ہے۔ یعنے راستہ اور خط استوا کے متصلہ تقاطعوں کے درمیان فاصلہ π ب ہے۔

۱۰۲۔ کروی سطح پر حرکت۔

متعدد سوال جن کا تعلق ایک کروی سطح پر کی حرکت سے ہے اسی طریقہ پر حل کیے جا سکتے ہیں۔

ایسی سطح پر کسی نقطہ پ کا محل دو زاوئی محددوں سے جو زمین پر کے قطبی فاصلہ اور طول بلد کے مثل ہوں یا کسی مقام کے کُرہ سماوی پر کے فاصلہ راس اور السمت کے مانند ہوں مشخص ہو سکتا ہے۔



شکل ۹۳

فرض کرو کہ کُرہ کا مرکز و ہے اور اُس پر ایک ثابت نقطہ س ہے تو ہم ط سے وہ زاوئی فاصلہ س و پ تعبیر کرتے ہیں جو ایک بڑے دائرہ پر اس ثابت نقطہ س سے پیمائش کیا گیا ہو اور سا سے وہ زاویہ تعبیر کرتے ہیں جو اِس بڑے دائرہ کا مستوی، و س میں سے گزرنے والے ایک ثابت مستوی کے ساتھ بناتا ہے۔ اگر صرف ط کو

خفیف طور پر متغیر کیا جائے تو نقطہ پ، بڑے دائرہ س پ پر ایک توس ا مف طہ مرتسم کرتا ہے جہاں ا نصف قطر ہے۔ لیکن اگر صرف سا کو متغیر کیا جائے تو پ، (۳۰۴)
نصف قطر ا جب طہ کے ایک چھوٹے دائرہ پر حرکت کرتا ہے اور اس لیے توس ا جب طہ مف سا میں سے ہے۔ اس لیے بڑے دائرہ س پ پر اور اس کے علی القوائم پ کی رفتار کے اجزائے ترکیبی علی الترتیب

$$\text{ا}\,\frac{\text{فر طہ}}{\text{فر ت}} \quad \text{اور} \quad \text{ا جب طہ}\,\frac{\text{فر سا}}{\text{فر ت}} \qquad \cdots\cdots (۱)$$

ہیں۔ اس لیے پ کی رفتار کا مربع

$$\text{ا}^{۲}\left\{\left(\frac{\text{فر طہ}}{\text{فر ت}}\right)^{۲} + \text{جب}^{۲}\,\text{طہ}\left(\frac{\text{فر سا}}{\text{فر ت}}\right)^{۲}\right\} \qquad \cdots\cdots (۲)$$

ہے۔

نیز اجزائے ترکیبی (۱) میں سے صرف دوسرے کا ہی و س کے گرد معیار ہے اور چونکہ اِس محور سے پ کا فاصلہ ا جب طہ ہے اس لیے زیر بحث معیار

$$\text{ا}^{۲}\,\text{جب}^{۲}\,\text{طہ}\,\frac{\text{فر سا}}{\text{فر ت}} \qquad \cdots\cdots (۳)$$

ہے۔

ہم کہہ سکتے ہیں کہ اگر کُرہ کے نصف قطر کو متغیر سمجھا جائے اور اس کو ا کی بجائے ر سے تعبیر کیا جائے تو ہم فضاء کے کسی نقطہ پ کے محل کو تین "کُروی محددوں" ر، طہ، سا سے مشخص کر سکتے ہیں۔ اگر صرف ر کو متغیر کیا جائے تو پ کا ہٹاؤ مف ر سے تعبیر ہوتا ہے اور اس لیے نصف قطری رفتار

$$\frac{\text{فر ر}}{\text{فر ت}} \qquad \cdots\cdots (۴)$$

ہے۔ چونکہ وہ تین اجزائے ترکیبی جن کو اوپر معلوم کیا گیا ہے باہم عمود وار ہیں اس لیے رفتار کا مربع

$$\left(\frac{\text{فر ر}}{\text{فر ت}}\right)^{۲} + \text{ر}^{۲}\left(\frac{\text{فر طہ}}{\text{فر ت}}\right)^{۲} + \text{ر}^{۲}\,\text{جب}^{۲}\,\text{طہ}\left(\frac{\text{فر سا}}{\text{فر ت}}\right)^{۲} \qquad \cdots\cdots (۵)$$

ہے ۔ وسا کے گرد رفتار کا معیار

$$\text{ر}^{2}\,\text{جب}^{2}\,\text{ط}\;\frac{\text{فر یا}}{\text{فرت}} \qquad \ldots\ldots (6)$$

ہے ۔

مثال ۔ ایک ایسے ذرہ کی صورت لو جو زمین کی سطح کے ایک نصف النہار پر حرکت کرنے کے لیے مقید ہے ۔ اگر محور وسا، قطبی محور پر منطبق ہو تو اس محور کے گرد زاوئی معیار حرکت م ا² سہ جب² ط ہے جہاں زمین کی گردش کی زاوئی رفتار سہ ہے ۔ اس لیے اگر مقید کرنے والی قوت، مشرق کی جانب، س ہو تو

$$\frac{\text{فر}}{\text{فرت}}\left(\text{م}\,\text{ا}^{2}\,\text{سہ}\,\text{جب}^{2}\text{ط}\right) = \text{س} \times \text{ا}\,\text{جب}\,\text{ط} \qquad \ldots\ldots (7)$$

اس لیے

$$\text{س} = ۲\,\text{م}\,\text{ا}^{2}\,\text{سہ}\,\text{جم}\,\text{ط}\,\frac{\text{فرط}}{\text{فرت}} \qquad \ldots\ldots (8)$$ (۳۰۵)

یا

$$\text{س} = ۲\,\text{م}\,\text{و}\,\text{سہ}\,\text{جم}\,\text{ط} \qquad \ldots\ldots (9)$$

اگر و نصف النہار پر، قطب سے (اضافی) رفتار ہو ۔ مثلاً ایک ٹرین جو نصف کرۂ شمالی میں جنوب وار سفر کر رہی ہو پٹریوں پر دباؤ ۲م و سہ جم ط مغرب وار ڈالتی ہے کیونکہ وہ قطبی محور کے گرد اپنے زاوئی معیار حرکت کو غیر متغیر رکھنے کا میلان رکھتی ہے ۔ اس جانبی دباؤ کو جو نسبت ٹرین کے وزن سے ہے وہ

$$\frac{\text{س}}{\text{م}\,\text{ج}} = \frac{۲\,\text{سہ}\,\text{ا}}{\text{ج}} \times \frac{\text{و}}{\text{سہ}\,\text{ا}} \times \text{جم}\,\text{ط} = \frac{1}{۱۴۴}\,\frac{\text{و}}{\text{سہ}\,\text{ا}} \times \text{جم}\,\text{ط} \qquad \ldots\ldots (10)$$

ہے جہاں کسر $\frac{\text{و}}{\text{سہ}\,\text{ا}}$، ٹرین کی رفتار اور خط استواء پر زمین کی سطح کی گردشی رفتار کے درمیان نسبت ہے ۔ یہ آخری رفتار فی الحقیقت ۱۰۰۰ بحری میل فی (کوکبی) گھنٹہ ہے ۔

۱۰۴ ۔ کروی رقّاص ۔

پچھلے ضابطوں کا ایک اہم اطلاق کروی رقاص کے نظریہ یا ایک چکنی کروی

سطح پر ایک ذرہ کی (جاذبہ کے تحت) حرکت کے نظریہ پر ہے۔

اگر ڈوری کا طول (یا کُرہ کا نصف قطر) ا ہو اور اگر کروی محددوں کا محور و س، انتصاباً نیچے وار سمت میں ہو تو توانائی کی مساوات

$$\frac{1}{2}\,\text{م}\,\text{ا}^2\left\{\left(\frac{\text{فرطہ}}{\text{فرت}}\right)^2+\text{جب}^2\,\text{طہ}\left(\frac{\text{فرسا}}{\text{فرت}}\right)^2\right\}=\text{م ج ا جم طہ}+\text{مستقل}\qquad\ldots\ldots(1)$$

ہے اور زاویائی معیار حرکت کے اصول سے

$$\text{جب}^2\,\text{طہ}\,\frac{\text{فرسا}}{\text{فرت}}=\text{مستقل}=\text{ھ}\ (\text{فرض کرو})\qquad\ldots\ldots(2)$$

حاصل ہوتا ہے۔

$\frac{\text{فرسا}}{\text{فرت}}$ کو ساقط کرنے پر

$$\left(\frac{\text{فرطہ}}{\text{فرت}}\right)^2+\frac{\text{ھ}^2}{\text{جب}^2\,\text{طہ}}=\frac{2\,\text{ج}}{\text{ا}}\,\text{جم طہ}+\text{مستقل}\qquad\ldots\ldots(3)$$

تفرق کرنے اور $\frac{\text{فرطہ}}{\text{فرت}}$ سے تقسیم کرنے پر

$$\frac{\text{فر}^2\,\text{طہ}}{\text{فرت}^2}-\frac{\text{ھ}^2\,\text{جم طہ}}{\text{جب}^3\,\text{طہ}}=-\frac{\text{ج}}{\text{ا}}\,\text{جب طہ}\qquad\ldots\ldots(4)$$

حاصل ہوتا ہے۔ آئندہ یہ بتایا جائے گا کہ یہ

$$\frac{\text{فر}^2\,\text{طہ}}{\text{فرت}^2}-\text{جب طہ جم طہ}\left(\frac{\text{فرسا}}{\text{فرت}}\right)^2=-\frac{\text{ج}}{\text{ا}}\,\text{جب طہ}\qquad\ldots\ldots(5)$$

کے معادل ہے۔

(۳۰۶) یہ واضح ہے کہ اگر راستہ کُرہ کے زیرترین یا بلندترین نقطہ میں سے گزرے تو اُس کو ایک انتصابی دائرہ ہونا چاہیے۔ اگر ہم اس صورت کو خارج کریں تو طہ کی قیمت کی ایک بالائی اور ایک نچلی حد ہوگی، نیز اسی قسم کے استدلال سے جو

مرکز دار مداروں کے خطوط اوجین کے نظریہ میں (دفعہ ۸۸) استعمال کیا گیا تھا یہ واضح ہے کہ راستہ اس نصف النہاری مستوی کے لحاظ سے متشاکل ہے جو کسی نقطہ میں سے جہاں حرکت کی سمت اُفقی ہے گزرتا ہے۔ اس لیے راستہ دو افقی دائروں کے درمیان واقع ہے جن کو وہ متبادلاً السمت کے مساوی وقفوں پر مس کرتا ہے۔

اگر یہ دو انتہائی دائرے منطبق ہو جائیں تو مخروطی رقاص کی صورت حاصل ہوتی ہے۔ تب چونکہ طہ مستقل ہوتا ہے اس لیے (۵) سے

$$\left(\frac{\text{فر سا}}{\text{فر ت}}\right)^{2} = \frac{\text{ج}}{\text{ا جم طہ}} \quad \text{..........(٦)}$$

دفعہ ۳۵ (۵) کے مطابق حاصل ہوتا ہے۔

اگر افقی دائرہ میں یکساں حرکت کی اِس حالت میں خفیف طور پر خلل ڈالا جائے تو انتہائی دائرے خفیف طور پر جدا ہوں گے اور راستہ ان کے درمیان لہردار ہوگا۔ اگر

$$\text{طہ} = \text{عہ} + \text{ضا} \quad \text{..........(٧)}$$

لکھا جائے جہاں ضا کو چھوٹا فرض کیا گیا ہے تو (۴) میں اندراج کرنے اور ضا کی صرف پہلی قوت رکھنے سے

$$\frac{\text{فر}^{2}\,\text{ضا}}{\text{فر ت}^{2}} + \left(\frac{\text{ھ}^{2}}{\text{جب}^{2}\,\text{عہ}} + \frac{3\,\text{ھ}^{2}\,\text{جم}^{2}\,\text{عہ}}{\text{جب}^{4}\,\text{عہ}}\right)\text{ضا} = -\frac{\text{ج}}{\text{ا}}\,\text{جم عہ} \times \text{ضا} \quad \text{....(٨)}$$

بشرطیکہ

$$\frac{\text{ھ}^{2}\,\text{جم عہ}}{\text{جب}^{3}\,\text{عہ}} = \frac{\text{ج}}{\text{ا}}\,\text{جب عہ} \quad \text{..........(٩)}$$

یہ (۴) کی رو سے زاویٔ نصف قطر عہ کے ایک افقی دائرہ میں یکساں حرکت کی شرط ہے۔ مفروضہ کی رو سے یہ شرط خلل شدہ حالت میں قریب قریب پوری ہوتی ہے اور عہ کی قیمت کو ذرا ٹھیک کر دینے سے وہ ٹھیک طور پر پوری ہو سکتی ہے (دفعہ ۸۷)۔ اگر

$$\text{سہ}^{2} = \frac{\text{ج}}{\text{ا جم عہ}} \quad \text{..........(10)}$$

رکھا جائے تو

$$\text{ھ}^{2} = \text{سہ}^{2}\,\text{جب}^{4}\,\text{عہ} \quad \text{..........(11)}$$

اور مساوات (۸)

$$\frac{\text{فر}^2\text{ضا}}{\text{فرت}^2} + (1 + 3\,\text{جم}^2\text{عہ})\,\text{سہ}^2\,\text{ضا} = 0 \qquad (12)$$

(۳۰۸) میں تحویل ہوتی ہے۔ اس لیے طہ کی قیمت میں ایک چھوٹے اہتزاز کا دور

$$\frac{2\pi}{\text{سہ}} \times \frac{1}{\sqrt{1 + 3\,\text{جم}^2\text{عہ}}} \qquad (13)$$

ہے۔ چونکہ (۶) اور (۱۰) سے

$$\frac{\text{فرسا}}{\text{فرت}} = \text{سہ}' \text{ تقریباً} \qquad (14)$$

اس لیے طہ کی ایک اعظم قیمت اور متصلہ اقل قیمت کے درمیان السمت کا وقفہ

$$\frac{\pi}{\sqrt{1 + 3\,\text{جم}^2\text{عہ}}} \qquad (15)$$

ہے۔ اس کو ذاتی زاویہ کہہ سکتے ہیں۔ اگر میلان عہ چھوٹا ہو تو وہ تقریباً $\frac{1}{2}\pi$ ہے جیسا کہ دفعہ ۲۹ میں معلوم ہو چکا تھا۔

مثال ۔ اس سوال کی ایک متغیر صورت کے طور پر ہم ایک چکنے گردشی ناقص نما پر جس کا محور انتصابی ہو ایک ذرہ کی حرکت پر غور کر سکتے ہیں۔

فرض کرو کہ افقی مستوی پر ذرہ کے ظل کے قطبی محدد ر، طہ اور راس کی ہموار سطح کے اوپر ارتفاع ی ہے۔ تب

$$\text{ر}^2 = 4\text{ا}\,\text{ی}\,' \quad \text{ی} = \frac{\text{ر}\dot{\text{ر}}}{2\text{ا}} \qquad (16)$$

اگر مکونِ مکافی کا وتر خاص ۴ا ہو۔ اس لیے توانائی بالحرکت

$$\frac{1}{2}\text{م}(\dot{\text{ی}}^2 + \dot{\text{ر}}^2 + \text{ر}^2\dot{\text{طہ}}^2) = \frac{1}{2}\text{م}\left\{\left(1 + \frac{\text{ر}^2}{4\text{ا}^2}\right)\dot{\text{ر}}^2 + \text{ر}^2\dot{\text{طہ}}^2\right\} \qquad (17)$$

اور مخفی توانائی بالقوہ

$$\text{م ج ی} = \frac{\text{م ج ر}^{۲}}{\text{۴ ل}} \qquad \text{(۱۸)}$$

ہے۔ اب

$$\left(۱ + \frac{\text{ر}^{۲}}{\text{۴ ل}^{۲}}\right)\dot{\text{ر}}^{۲} + \text{ر}^{۲}\,\dot{\text{ط}}^{۲} + \frac{\text{ج ر}^{۲}}{\text{۲ ل}} = \text{مستقل} \qquad \text{(۱۹)}$$

اور

$$\text{ر}^{۲}\,\dot{\text{ط}} = \text{ھ} \qquad \text{(۲۰)}$$

جہاں آخری مساوات زاویئی معیار حرکت کی مساوات ہے۔

$\dot{\text{ط}}$ کو ساقط کرنے سے

$$\left(۱ + \frac{\text{ر}^{۲}}{\text{۴ ل}^{۲}}\right)\dot{\text{ر}}^{۲} + \frac{\text{ھ}^{۲}}{\text{ر}^{۲}} + \frac{\text{ج ر}^{۲}}{\text{۲ ل}} = \text{مستقل} \qquad \text{(۲۱)}$$

اس لیے تفرق کرنے پر

$$\left(۱ + \frac{\text{ر}^{۲}}{\text{۴ ل}^{۲}}\right)\ddot{\text{ر}} + \frac{\text{ر}\,\dot{\text{ر}}^{۲}}{\text{۴ ل}^{۲}} - \frac{\text{ھ}^{۲}}{\text{ر}^{۳}} + \frac{\text{ج ر}}{\text{۲ ل}} = ۰ \qquad \text{(۲۲)}$$

وہ شرط کہ ذرہ ایک افقی دائرہ مرتسم کرے یہ ہے کہ یہ مساوات، ر = مستقل سے پوری ہونی چاہیے۔ اس لیے

$$\text{ھ}^{۲} = \frac{\text{ج ر}^{۴}}{\text{۲ ل}} \qquad \text{(۲۳)}$$

(۳۰۸) اگر اس دائرہ میں زاویئی رفتار س ہو تو $\text{ھ} = \text{ر}^{۲}\,\text{س}$ اور اس لیے

$$\text{س}^{۲} = \frac{\text{ج}}{\text{۲ ل}} \qquad \text{(۲۴)}$$

یہ دائرہ کے قطر کے غیر تابع ہے۔

افقی دائرہ میں ذرہ کی حرکت میں خفیف خلل ڈالا جائے تو اس کے اثر کو دریافت کرنے کے لیے (۲۲) میں

$$\text{ر} = \text{ر} + \text{لا} \qquad \text{(۲۵)}$$

رکھو اور لا میں جس کو چھوٹا فرض کیا گیا ہے صرف پہلے رتبہ کی رقمیں باقی رکھو تو

$$\left(1+\frac{\text{ر}^2}{4\,\text{ع}^2}\right)\ddot{\text{لا}}+\frac{3\,\text{ص}^2}{\text{ر}^4}\,\text{لا}+\frac{\text{ج}}{2\,\text{ع}}\,\text{لا}=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (26)$$

یا $\text{ص}^2=\frac{\text{ج}\,\text{ر}^2}{2\,\text{ع}}$ رکھنے سے جیساکہ (۲۳) سے معلوم ہوتا ہے

$$\left(1+\frac{\text{ر}^2}{4\,\text{ع}^2}\right)\ddot{\text{لا}}+\frac{2\,\text{ج}}{\text{ع}}\,\text{لا}=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (27)$$

اگر ہم

$$\text{ر}^2=4\,\text{ا}\,\text{ی} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (28)$$

لکھیں تو مساوات (۲۷)

$$\ddot{\text{لا}}+\frac{2\,\text{ج}}{\text{ع}+\text{ی}}\,\text{لا}=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (29)$$

ہو جاتی ہے۔ اس لیے افقی دائرہ کے گرد ایک چھوٹے اہتزاز کا دَور اس سادہ رقاص کے دَور کے مساوی ہے جس کا طول $\frac{1}{2}$ (ی + ا) ہے یا مکانی کے ماسکہ سے دائرہ کے محیط کے فاصلہ کا نصف۔

۱۰۴ - ذرّہ کی عام حرکت - لگرانج کی مساواتیں -

پچھلی مثالوں میں نامعلوم مستقلوں کا اسقاط آسان تھا کیونکہ زیرِ بحث مسئلوں کی خاص خصوصیات سے استفادہ کیا جا سکتا تھا۔ دوسری صورتوں میں اور بالخصوص جبکہ آزادی کے درجوں کی تعداد زیادہ ہو بنیادی اصولوں پر راست توجہ کرنے سے کچھ پیچیدہ[1] مساواتیں حاصل ہو سکتی ہیں اور اسقاط تکلیف دہ بن سکتا ہے۔

لگرانج[2] نے کسی ترکیب کے تحفظی نظاموں کے لیے اس اسقاط کو عمل میں لانے کے مسئلے پر توجہ کی اور اس کو ہمیشہ کے لیے حل کر دیا۔ اس نے ثابت کیا کہ کسی تحفظی نظام کے حرکیاتی خواص ان جملوں سے پوری طرح متعین ہوتے ہیں جو نظام کے ن تعیینی محددوں اور وقت کے لحاظ سے ان کے تفرقی سروں کی رقوم میں توانائی بالحرکت

---

[1] اس کی کچھ تمثیل دفعہ ۶۸ کی تحقیق میں ملیگی۔

[2] Mechanique analitique Paris. 1788

اور توانائی بالقوہ کے لیے حاصل ہوتے ہیں اور جب یہ جملے معلوم ہو جاتے ہیں تو حرکات کی ن مساواتیں جو نامعلوم تفاعلوں سے بری ہوتی ہیں فوراً لکھ لی جا سکتی ہیں اور اس کے لیے نظام کی مخصوص ترکیب کے کسی مزید حوالہ کی ضرورت نہیں ہوتی ۔

لگرانج کی مساواتوں کو حاصل کرنے میں ہم اپنی توجہ آزادی کے دو درجوں کی (۳۰۹)
صورت تک محدود رکھیں گے ۔ یہ متعدد دلچسپ سوالوں کو حل کرنے کے لیے کافی ہے اور اس میں ترقیم کے ایک بہت بڑے نظام کو استعمال کرنے کی ضرورت نہیں پڑتی ۔ لیکن اس کے ساتھ ہی وہ طریقہ جس سے ان نتیجوں کو عام صورت تک وسیع کیا جا سکتا ہے آسانی سے واضح ہو گا ۔

نیز اول ہم صرف ایک واحد ذرہ کی صورت پر غور کریں گے ۔ ہم طہ، فہ سے وہ غیر تابع متغیر یا محدد تعبیر کریں گے جو ذرہ کے محل کو مشخص کرتے ہیں ۔ یہ ایک مستوی میں کارٹیزی محدد (قائم یا مائل)، یا دفعہ ۱۰۲ کے کروی محدد، یا کوئی دو مقداریں جو کسی مخصوص مسئلے میں ذرہ کے محل کو مشخص کرنے کے لیے سہولت بخش ہوں ہو سکتے ہیں ۔ وقت کے لحاظ سے ان محددوں کے تفرقی سروں $\dot{\text{طہ}}$، $\dot{\text{فہ}}$ کو ذرہ کی (تعمیمی) رفتاریں کہا جا سکتا ہے ۔

اگر کسی محل میں محدد طہ میں خفیف تغیر کیا جائے لیکن فہ مستقل ہو تو ذرہ میں کسی معین سمت میں ہٹاؤ

$$\text{مف}\,\text{س}_1 = \text{عہ}\,\text{مف}\,\text{طہ} \qquad \ldots\ldots (۱)$$

جہاں سر عہ بالعموم اس محل پر ہوگا جس سے ہٹاؤ پیدا کیا گیا ہے اور اس لیے وہ طہ، فہ کی قیمتوں پر منحصر ہوگا ۔ اسی طرح اگر صرف فہ کو متغیر کیا جائے تو ہٹاؤ دوسری معین سمت میں

$$\text{مف}\,\text{س}_2 = \text{بہ}\,\text{مف}\,\text{فہ} \qquad \ldots\ldots (۲)$$

ہوگا ۔ اگر دونوں تغیر ایک ساتھ موجود ہوں تو حاصل ہٹاؤ مف س مقدار میں

$$\text{مف}\,\text{س}^2 = \text{مف}\,\text{س}_1^2 + ۲\,\text{مف}\,\text{س}_1\,\text{مف}\,\text{س}_2\,\text{جم}\,\text{صہ} + \text{مف}\,\text{س}_2^2$$

$$= \text{عہ}^2\,\text{مف}\,\text{طہ}^2 + ۲\,\text{عہ}\,\text{بہ}\,\text{جم}\,\text{صہ}\,\text{مف}\,\text{طہ}\,\text{مف}\,\text{فہ} + \text{بہ}^2\,\text{مف}\,\text{فہ}^2$$

$$\ldots\ldots (۳)$$

سے حاصل ہوگا جہاں مف س۱ اور مف س۲ کی سمتوں کے درمیان زاویہ صہ ہے۔
اس لیے رفتار و کا مربع

$$ و^۲ = عہ^۲ طہ'^۲ + ۲ عہ بہ جم صہ × طہ' فہ' + بہ^۲ فہ'^۲ \quad \text{.........(۴)} $$

ہے۔

پس اگر متعررہ استعمال کے مطابق توانائی بالحرکت کو مت سے تعبیر کیا جائے اور کمیت م ہو تو

$$ مت = \frac{۱}{۲} م و^۲ = \frac{۱}{۲} (ا طہ'^۲ + ۲ ھ طہ' فہ' + ب فہ'^۲) \quad \text{.....(۵)} $$

$$ \text{جہاں} \quad ا = م عہ^۲ ، \; ھ = م عہ بہ جم صہ ، \; ب = م بہ^۲ \quad \text{..............(۶)} $$

سر ا، ھ، اور ب بالعموم طہ، فہ کے تفاعل ہوتے ہیں۔ ان کو ذرہ کے "جمود کے سر" کہا جا سکتا ہے۔

(۲۱۰) م کے کارٹیزی محدد لا، ما، ی جن کو ثابت قائم محوروں کے کسی نظام کے حوالے سے لیا گیا ہو بموجب فرض طہ اور فہ کے تفاعل ہیں۔ اس لیے

$$ \left. \begin{aligned} لا' &= \frac{جف\, لا}{جف\, طہ} طہ' + \frac{جف\, لا}{جف\, فہ} فہ' ، \\ ما' &= \frac{جف\, ما}{جف\, طہ} طہ' + \frac{جف\, ما}{جف\, فہ} فہ' ، \\ ی' &= \frac{جف\, ی}{جف\, طہ} طہ' + \frac{جف\, ی}{جف\, فہ} فہ' \end{aligned} \right\} \quad \text{.........(۷)} $$

$$ \text{پس} \quad مت = \frac{۱}{۲} م (لا'^۲ + ما'^۲ + ی'^۲) $$

$$ = \frac{۱}{۲} (ا طہ'^۲ + ۲ ھ طہ' فہ' + ب فہ'^۲) $$

(۸).......

$$\text{جہاں}\quad \text{ا} = \text{م}\left\{\left(\frac{\text{جف لا}}{\text{جف طہ}}\right)^{2} + \left(\frac{\text{جف ما}}{\text{جف طہ}}\right)^{2} + \left(\frac{\text{جف ی}}{\text{جف طہ}}\right)^{2}\right\},$$

$$\text{ھ} = \text{م}\left\{\frac{\text{جف لا}}{\text{جف طہ}}\frac{\text{جف لا}}{\text{جف فہ}} + \frac{\text{جف ما}}{\text{جف طہ}}\frac{\text{جف ما}}{\text{جف فہ}} + \frac{\text{جف ی}}{\text{جف طہ}}\frac{\text{جف ی}}{\text{جف فہ}}\right\}, \qquad (۹)$$

$$\text{ب} = \text{م}\left\{\left(\frac{\text{جف لا}}{\text{جف فہ}}\right)^{2} + \left(\frac{\text{جف ما}}{\text{جف فہ}}\right)^{2} + \left(\frac{\text{جف ی}}{\text{جف فہ}}\right)^{2}\right\}$$

یہ آسانی سے معلوم ہوگا کہ سروں کی یہ شکلیں (۶) میں مندرجہ سروں کے مماثل ہیں۔
اگر ذرہ پر عمل کرنے والی قوت (**لا**، **ما**، **ہے**) ہو تو حرکت کی کارٹیزی مساواتیں

$$\text{م}\,\ddot{\text{لا}} = \textbf{لا}،\quad \text{م}\,\ddot{\text{تا}} = \textbf{ما}،\quad \text{م}\,\ddot{\text{ئی}} = \textbf{ہے} \quad\text{..........}\quad (۱۰)$$

ہیں۔ اِن کو علی الترتیب جزئی تفرقی سروں $\frac{\text{جف لا}}{\text{جف طہ}}$، $\frac{\text{جف ما}}{\text{جف طہ}}$، $\frac{\text{جف ی}}{\text{جف طہ}}$ سے ضرب دینے اور جمع کرنے سے

$$\text{م}\left(\ddot{\text{لا}}\frac{\text{جف لا}}{\text{جف طہ}} + \ddot{\text{تا}}\frac{\text{جف ما}}{\text{جف طہ}} + \ddot{\text{ئی}}\frac{\text{جف ی}}{\text{جف طہ}}\right)$$

$$= \textbf{لا}\frac{\text{جف لا}}{\text{جف طہ}} + \textbf{ما}\frac{\text{جف ما}}{\text{جف طہ}} + \textbf{ہے}\frac{\text{جف ی}}{\text{جف طہ}} \quad\text{......}\quad (۱۱)$$

یہ مشاہدہ طلب ہے کہ یہ عمل ہٹاؤ مف س کی سمت میں تحلیل کرنے کے مماثل ہے۔
مساوات (۱۱) کو تحویل کرنے میں ہم دیکھتے ہیں کہ

$$\ddot{\text{لا}}\frac{\text{جف لا}}{\text{جف طہ}} = \frac{\text{فر}}{\text{فرت}}\left(\dot{\text{لا}}\frac{\text{جف لا}}{\text{جف طہ}}\right) - \dot{\text{لا}}\frac{\text{فر}}{\text{فرت}}\frac{\text{جف لا}}{\text{جف طہ}} \quad\text{......}\quad (۱۲)$$

جہاں ت کے لحاظ سے تفرق کُلی ہیں۔ اب (۷) سے

$$\frac{\text{جف}\,\dot{\text{لا}}}{\text{جف}\,\dot{\text{طہ}}} = \frac{\text{جف لا}}{\text{جف طہ}} \quad\text{..........}\quad (۱۳)$$

اور
$$\frac{\text{فر}}{\text{فرت}}\,\frac{\text{جف لا}}{\text{جف ط}} = \frac{\text{جف}^{2}\,\text{لا}}{\text{جف ط}^{2}}\,\dot{\text{ط}} + \frac{\text{جف}^{2}\,\text{لا}}{\text{جف ط جف فہ}}\,\dot{\text{فہ}} = \frac{\text{جف}\,\dot{\text{لا}}}{\text{جف ط}} \quad \ldots\ldots (۱۴)$$

اس لیے (۱۲) کو (۳۱۱)

$$\ddot{\text{لا}}\,\frac{\text{جف لا}}{\text{جف ط}} = \frac{\text{فر}}{\text{فرت}}\left(\dot{\text{لا}}\,\frac{\text{جف}\,\dot{\text{لا}}}{\text{جف}\,\dot{\text{ط}}}\right) - \dot{\text{لا}}\,\frac{\text{جف}\,\dot{\text{لا}}}{\text{جف ط}} \quad \ldots\ldots\ldots (۱۵)$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اسی طرح دوسرے مشابہ ضابطے حاصل کیے جاسکتے ہیں اور اس لیے

$$\text{م}\left(\ddot{\text{لا}}\,\frac{\text{جف لا}}{\text{جف ط}} + \ddot{\text{ما}}\,\frac{\text{جف ما}}{\text{جف ط}} + \ddot{\text{ی}}\,\frac{\text{جف ی}}{\text{جف ط}}\right)$$

$$= \frac{\text{فر}}{\text{فرت}}\,\text{م}\left(\dot{\text{لا}}\,\frac{\text{جف}\,\dot{\text{لا}}}{\text{جف}\,\dot{\text{ط}}} + \dot{\text{ما}}\,\frac{\text{جف}\,\dot{\text{ما}}}{\text{جف}\,\dot{\text{ط}}} + \dot{\text{ی}}\,\frac{\text{جف}\,\dot{\text{ی}}}{\text{جف}\,\dot{\text{ط}}}\right)$$

$$-\,\text{م}\left(\dot{\text{لا}}\,\frac{\text{جف}\,\dot{\text{لا}}}{\text{جف ط}} + \dot{\text{ما}}\,\frac{\text{جف}\,\dot{\text{ما}}}{\text{جف ط}} + \dot{\text{ی}}\,\frac{\text{جف}\,\dot{\text{ی}}}{\text{جف ط}}\right)$$

$$= \frac{\text{فر}}{\text{فرت}}\,\frac{\text{جف ت}}{\text{جف}\,\dot{\text{ط}}} - \frac{\text{جف ت}}{\text{جف ط}} \quad \text{(۸) سے} \quad \ldots\ldots (۱۶)$$

اگر وہ کام جو قوتیں ایک چھوٹے ہٹاؤ میں کرتی ہیں شکل

$$\text{طا مف ط} + \text{فا مف فہ} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۱۷)$$

میں بیان کیا جائے تو مقداروں طا، فا کو قوت کے "تعمیمی اجزائے ترکیبی" کہا جاتا ہے۔ یہ واضح ہے کہ ان کو محسوب کرنے میں ہم اُن تمام قوتوں کو نظر انداز کرسکتے ہیں (مثلاً چکنی ثابت سطحوں کے تعامل وغیرہ) جو کوئی کام نہیں کرتیں۔ پچھلی ترقیم میں

$$\text{لا مف لا} + \text{ما مف ما} + \text{ے مف ی}$$

$$= \left(\text{لا}\,\frac{\text{جف لا}}{\text{جف ط}} + \text{ما}\,\frac{\text{جف ما}}{\text{جف ط}} + \text{ے}\,\frac{\text{جف ی}}{\text{جف ط}}\right)\text{مف ط}$$

$$+ \left(\text{لا}\,\frac{\text{جف لا}}{\text{جف فہ}} + \text{ما}\,\frac{\text{جف ما}}{\text{جف فہ}} + \text{ے}\,\frac{\text{جف ی}}{\text{جف فہ}}\right)\text{مف فہ} \quad (۱۸)\ldots\ldots$$

اس لیے

$$\left.\begin{array}{l} \text{طا} = \text{لا}\,\dfrac{\text{جف لا}}{\text{جف طہ}} + \text{ما}\,\dfrac{\text{جف ما}}{\text{جف طہ}} + \text{ے}\,\dfrac{\text{جف ی}}{\text{جف طہ}}\text{،} \\ \text{فا} = \text{لا}\,\dfrac{\text{جف لا}}{\text{جف فہ}} + \text{ما}\,\dfrac{\text{جف ما}}{\text{جف فہ}} + \text{ے}\,\dfrac{\text{جف ی}}{\text{جف فہ}} \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots (19)$$

اِس طرح نظام کی حرکت کی مساواتیں لگرانجی شکلوں[1]

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\text{فر}}{\text{فرت}}\,\dfrac{\text{جف ت}}{\text{جف طہ}} - \dfrac{\text{جف ت}}{\text{جف طہ}} = \text{طا}\text{،} \\ \dfrac{\text{فر}}{\text{فرت}}\,\dfrac{\text{جف ت}}{\text{جف فہ}} - \dfrac{\text{جف ت}}{\text{جف فہ}} = \text{فا} \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots (20)$$

میں تحویل ہوتی ہیں۔

(۳۱۲) اب تک قوتیں لا، ما، ے اور اس لیے طا، فا کسی قیود کے تحت نہیں ہیں۔ وہ محل کے، رفتار کے، اور تصریحی طور پر وقت کے بھی تفاعل ہو سکتی ہیں لیکن ایک ایسے ذرہ کی صورت میں جو ایک تحفظی میدان میں حرکت کر رہا ہو اور کسی بیرونی قوت کے تحت نہ ہو وہ کام جو ایک چھوٹے ہٹاؤ میں اس پر انجام پاتا ہے توانائی بالقوہ کی تخفیف کے مساوی ہوتا ہے اور اس لیے

$$\text{طا مف طہ} + \text{فا مف فہ} = -\text{مف قہ}$$

$$= -\frac{\text{جف قہ}}{\text{جف طہ}}\text{مف طہ} - \frac{\text{جف قہ}}{\text{جف فہ}}\text{مف فہ} \quad \ldots\ldots (21)$$

چونکہ تغیر مف طہ، مف فہ غیر تابع ہیں اس لیے

---

[1] راست استحالہ کے ذریعہ ثبوت کا یہ طریقہ سر۔ ڈبلیو۔ آر ہیملٹن (۱۸۳۵ء) سے منسوب ہے۔ تعمیمی "محددوں" "رفتاروں" "قوتوں" اور "معیاروں" کی اصطلاحیں تھامس اور ٹیٹ نے جاری کیں (Natural Philosophy Ist ed. Oxford, 1867)

$$\text{طا} = -\frac{\text{جف قہ}}{\text{جف طہ}}\text{،}\quad \text{فا} = -\frac{\text{جف قہ}}{\text{جف فہ}} \qquad \text{(۲۲)}$$

اس طرح مساواتیں قدیم شکلیں

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{\text{فر}}{\text{فرت}}\frac{\text{جف ت}}{\text{جف طہ}} - \frac{\text{جف ت}}{\text{جف طہ}} = -\frac{\text{جف قہ}}{\text{جف طہ}}\text{،} \\ \frac{\text{فر}}{\text{فرت}}\frac{\text{جف ت}}{\text{جف فہ}} - \frac{\text{جف ت}}{\text{جف فہ}} = -\frac{\text{جف قہ}}{\text{جف فہ}} \end{array}\right. \qquad \text{(۲۳)}$$

اختیار کرتی ہیں۔

جملوں

$$\frac{\text{جف ت}}{\text{جف طہ}}\text{،}\quad \frac{\text{جف ت}}{\text{جف فہ}}$$

کی تعبیر حسب ذیل طریقہ پر حاصل کی جا سکتی ہے۔ دھکہ (لاَ، ماَ، ےَ) جو ذرہ کو سکون سے فوری طور پر اصلی حرکت میں لانے کے لیے ضروری ہے

$$\text{م لا} = \text{لاَ}\text{،}\quad \text{م نا} = \text{ماَ}\text{،}\quad \text{م ی} = \text{ےَ} \qquad \text{(۲۴)}$$

سے حاصل ہوتا ہے۔ اگر ہم ان مساواتوں کو علی الترتیب $\frac{\text{جف لا}}{\text{جف طہ}}$، $\frac{\text{جف ما}}{\text{جف طہ}}$، $\frac{\text{جف ی}}{\text{جف طہ}}$ سے ضرب دیں اور جمع کریں تو (۱۳) کی رو سے

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{\text{جف ت}}{\text{جف طہ}} = \text{لاَ}\frac{\text{جف لا}}{\text{جف طہ}} + \text{ماَ}\frac{\text{جف ما}}{\text{جف طہ}} + \text{ےَ}\frac{\text{جف ی}}{\text{جف طہ}}\text{،} \\ \frac{\text{جف ت}}{\text{جف فہ}} = \text{لاَ}\frac{\text{جف لا}}{\text{جف فہ}} + \text{ماَ}\frac{\text{جف ما}}{\text{جف فہ}} + \text{ےَ}\frac{\text{جف ی}}{\text{جف فہ}} \end{array}\right. \qquad \text{(۲۵)}$$

اِن باتوں کے جملوں کو "دھکے کے تعمیمی اجزائے ترکیبی" کہا جا سکتا ہے جو ذرہ پر لگائے جا[illegible] کے مماثل جملوں کو ایک صریحاً حرکیاتی تمثیل کی رو سے "معیارِ حرکت کے اجزائے ترکیبی"

(۳۱۲)

کہا جا سکتا ہے۔ ان کو لہ، مہ سے تعبیر کیا جائے یعنے

$$لہ = \frac{جف\ ت}{جف\ طہ}،\quad مہ = \frac{جف\ ت}{جف\ فہ} \quad\quad (۲۶)$$

تو حرکت کی مساواتوں کو

$$\frac{فر\ لہ}{فر\ ت} = طا + \frac{جف\ ت}{جف\ لہ}،\quad \frac{فر\ مہ}{فر\ ت} = فا + \frac{جف\ ت}{جف\ فہ} \quad\quad (۲۷)$$

یا، تحفظی میدان کی صورت میں،

$$\frac{فر\ لہ}{فر\ ت} = -\frac{جف}{جف\ لہ}(قہ - ت)،\quad \frac{فر\ مہ}{فر\ ت} = -\frac{جف}{جف\ فہ}(قہ - ت) \quad\quad (۲۸)$$

لکھا جا سکتا ہے۔

۱۰۵۔ اطلاقات

مستعملہ اصطلاحوں کی اہمیت چند مثالوں کے مطالعہ سے بہترین طریقہ پر واضح ہوگی۔

ایک ذرہ کی حرکت میں جس کا حوالہ مستوی قطبی محددوں کے ذریعہ دیا گیا ہو دفعہ ۸۶ (۱)، (۲) کی رو سے

$$ت = \frac{۱}{۲}م\,(ز^۲ + ز^۲\,طہ^۲) \quad\quad (۱)$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس لیے معیار حرکت کے تعمیمی اجزائے ترکیبی

$$\frac{جف\ ت}{جف\ ز} = م\,ز،\quad \frac{جف\ ت}{جف\ طہ} = م\,ز^۲\,طہ \quad\quad (۲)$$

ہیں۔ ان میں سے پہلا سمتی قطر کی سمت میں ذرہ کا خطی معیار حرکت ہے اور دوسرا مبداء کے گرد معیار حرکت کا معیار (معمولی مفہوم میں) ہے۔

اگر قوت کا نصف قطری جزو ترکیبی س سے اور عرضی جزو ترکیبی ص سے تعبیر ہو تو وہ کام جو ایک چھوٹے ہٹاؤ میں ہوتا ہے

س مف ر + ص ر مف طہ .... (۳)

ہے اور اس لیے قوت کے تعمیمی اجزائے ترکیبی

س، ص ر

ہیں، دوسرا جزو ترکیبی مبدا کے گرد قوت کا معیار ہے۔
اس لیے حرکت کی مساواتیں

فر/فرت (جف ت/جف زَ) - جف ت/جف ر = س،
فر/فرت (جف ت/جف طہَ) - جف ت/جف طہ = ر ص .... (۴)

ہیں۔ چونکہ

جف ت/جف ر = م ر طہَ^۲، جف ت/جف طہ = ۰، .... (۵)

اس لیے یہ مساواتیں

م (زَ - ر طہَ^۲) = س، م/ر فر/فرت (ر^۲ طہَ) = ص ...... (۶)

میں تحویل ہوتی ہیں اور وہ دفعہ ۸۶ (۷)، (۸) کے مطابق ہیں۔
نیز ایک کُروی سطح پر حرکت کی صورت میں

ت = ۱/۲ م ا^۲ (طہَ^۲ + جب^۲ طہ سَا^۲) .... (۷) (۳۱۴)

اس لیے جف ت/جف طہَ = م ا^۲ طہَ، جف ت/جف سَا = م ا^۲ جب^۲ طہ سَا .... (۸)

اِن میں سے پہلا جملہ، ایک محور کے گِرد جو مرکز و میں سے گزرتا ہے اور نصف النہار کے مستوی پر عمود ہے زاوئی معیار حرکت ہے اور دوسرا، محور و سا کے گِرد زاوئی معیار حرکت ہے (شکل ۹۴)۔

اگر قوت کے اجزائے ترکیبی، نصف النہار پر اور عرض بلد کے توازی پر، ر اور س ہوں جو علی الترتیب طہ اور سا کو بڑھانے کا میلان رکھتے ہیں تو ایک چھوٹے ہٹاؤ میں کیا ہوا کام

$$\text{ر ا مف طہ} + \text{س ا جب طہ مف سا} \quad \ldots\ldots (۹)$$

ہے اور اس لیے قوت کے تعمیمی اجزائے ترکیبی علی الترتیب

$$\text{ر ا اور س ا جب طہ} \quad \ldots\ldots (۱۰)$$

ہیں۔ اس لیے حرکت کی مساواتیں

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\text{فر}}{\text{فرت}} \frac{\text{جف ت}}{\text{جف طہ}'} - \frac{\text{جف ت}}{\text{جف طہ}} = \text{ر ا}، \\ \frac{\text{فر}}{\text{فرت}} \frac{\text{جف ت}}{\text{جف سا}'} - \frac{\text{جف ت}}{\text{جف سا}} = \text{س ا جب طہ} \end{array}\right\} \ldots\ldots (۱۱)$$

یا

$$\left.\begin{array}{l} \text{م ا} (\text{طہ}'' - \text{جب طہ جم طہ سا}'^{2}) = \text{ر}، \\ \frac{1}{\text{جب طہ}} \frac{\text{فر}}{\text{فرت}} (\text{م ا جب}^{2}\text{ طہ سا}') = \text{س} \end{array}\right\} \ldots\ldots (۱۲)$$

ہیں۔

کُروی رقاص کی صورت میں، اگر و سا نیچے وار انتصابی پر منطبق ہو، تو

$$\text{ر} = - \text{م ج جب طہ}، \quad \text{س} = ۰$$

اور مساواتیں

$$\text{طہ}'' - \text{جب طہ جم طہ سا}'^{2} = - \frac{\text{ج}}{\text{ا}} \text{جب طہ}، \quad \text{جب}^{2}\text{ طہ سا}' = \text{ثا} \quad \ldots\ldots (۱۳)$$

میں تحویل ہوتی ہیں جیسا کہ دفعہ ۱۰۳ میں۔

مثال — ایک ذرہ ایک چکنی دائری نلی میں ہے جو ایک انتصابی قطر کے گرد مستقل زاویائی رفتار سہ سے گردش کرنے کے لیے مجبور ہے۔

(۱۲) میں س = ـ م ج جب ط، سا = سہ رکھنے سے

$$\ddot{\text{ط}} - \text{سہ}^2 \,\text{جب ط جم ط} = -\frac{\text{ج}}{\text{ا}}\,\text{جب ط} \qquad \text{(۱۴)}$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ ذرہ محل ط = عہ میں اضافی توازن کی حالت میں ہو سکتا ہے بشرطیکہ

$$\text{جب عہ}\left(\text{سہ}^2\,\text{جم عہ} - \frac{\text{ج}}{\text{ا}}\right) = ۰ \qquad \text{(۱۵)}$$

(۳۱۵) اس کا صریح حل

$$\text{جب عہ} = ۰ \qquad \text{(۱۶)}$$

ہے۔ لیکن اگر $\text{سہ}^2\,\text{ا} > \text{ج}$ تو ایک دوسرا حل

$$\text{جم عہ} = \frac{\text{ج}}{\text{سہ}^2\,\text{ا}} \qquad \text{(۱۷)}$$

ہے۔

اضافی توازن کی قائمیت کا امتحان کرنے کے لیے ہم

$$\text{ط} = \text{عہ} + \text{ضا} \qquad \text{(۱۸)}$$

رکھتے ہیں جہاں عہ، (۱۵) کا حل ہے اور ضا کو چھوٹا فرض کیا گیا ہے۔ (۱۴) میں درج کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ

$$\ddot{\text{ضا}} + \left(\frac{\text{ج}}{\text{ا}}\,\text{جم عہ} - \text{سہ}^2\,\text{جم ۲ عہ}\right)\text{ضا} = ۰ \qquad \text{(۱۹)}$$

اس لیے حل عہ = ۰ صرف اس وقت قائم ہے جب کہ $\text{سہ}^2\,\text{ا} < \text{ج}$ اور حل عہ = π ہمیشہ غیر قائم ہے جیسا کہ توقع تھی۔ جب، $\text{سہ}^2\,\text{ا} > \text{ج}$ تو درمیانی حل کی

اُس صورت میں جو (۱۷) سے حاصل ہوتی ہے

$$\ddot{\text{ضا}} + \text{سہ}^{2}\,\text{جب}^{2}\,\text{عہ} \times \text{ضا} = 0 \qquad (۲۰)$$

اس لیے یہ محل جب موجود ہوتا ہے تو قائم ہوتا ہے اور اس کے گرد ایک چھوٹے اہتزاز کا دَور

$$\frac{۲\pi}{\text{سہ جب عہ}} \qquad (۲۱)$$

ہے۔ جانبی دباؤ س جو نلی ذرہ پر ڈالتی ہے مساواتوں (۱۲) میں سے دوسری سے حاصل ہوتا ہے۔

۱۰۶۔ دوہری آزادی کے حیلی نظام۔ لگرانج کی مساواتیں

اب ہم آزادی کے دو درجہ رکھنے والے حیلی نظام کی عام ترین صورت لیتے ہیں۔

بموجب فرض، نظام کے کسی ذرہ م کے قائم محدد لا، ما، ی دو غیر تابع متغیروں کے محدود تفاعل ہیں۔ اِن متغیروں کو ہم حسب سابق طہ، فہ سے تعبیر کریں گے لیکن تفاعلوں کی شکلیں بالعموم ذرہ بہ ذرہ متغیر ہوں گی۔ فرض کرو کہ ذرہ م پر عمل کرنے والی قوت کو (لا، ما، ے) سے تعبیر کیا گیا ہے تو ہم مساوات

$$\text{م}\left(\ddot{\text{لا}}\,\frac{\text{جف لا}}{\text{جف طہ}} + \ddot{\text{ما}}\,\frac{\text{جف ما}}{\text{جف طہ}} + \ddot{\text{ی}}\,\frac{\text{جف ی}}{\text{جف طہ}}\right)$$

$$= \text{لا}\,\frac{\text{جف لا}}{\text{جف طہ}} + \text{ما}\,\frac{\text{جف ما}}{\text{جف طہ}} + \text{ے}\,\frac{\text{جف ی}}{\text{جف طہ}} \qquad (۱)$$

بناتے ہیں جیسا کہ دفعہ ۱۰۴ میں۔ ہر ذرہ کے لیے اِس نمونہ کی ایک مساوات ملیگی اور

جمع کرنے سے مساوات

$$\Sigma\, \text{م} \left(\dot{\text{لا}} \frac{\text{جف لا}}{\text{جف طہ}} + \dot{\text{ما}} \frac{\text{جف ما}}{\text{جف طہ}} + \dot{\text{ی}} \frac{\text{جف ی}}{\text{جف طہ}} \right)$$

$$= \Sigma \left(\text{لا} \frac{\text{جف لا}}{\text{جف طہ}} + \text{ما} \frac{\text{جف ما}}{\text{جف طہ}} + \text{ے} \frac{\text{جف ی}}{\text{جف طہ}} \right) \cdots\cdots (۲)$$

حاصل ہوگی جہاں حاصل جمع Σ ' نظام کے تمام ذرّوں پر حاوی ہے۔

چونکہ نظام کی توانائی بالحرکت اس کے مختلف ذرّوں کی توانائیوں کا مجموعہ ہے (۳۱۶)
اس لیے دفعہ ۴۔۱ کی تحقیق سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ دائیں جانبی رکن

$$\frac{\text{فر}}{\text{فرت}} \frac{\text{جف ت}}{\text{جف طہَ}} - \frac{\text{جف ت}}{\text{جف طہ}} \cdots\cdots\cdots\cdots (۳)$$

کے مماثل ہے جہاں ت اب نظام کی کُل توانائی بالحرکت کو تعبیر کرتا ہے یعنے

$$\text{ت} = \frac{1}{2} \Sigma\, \text{م} \left(\dot{\text{لا}}^2 + \dot{\text{ما}}^2 + \dot{\text{ی}}^2 \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\text{ا}\, \dot{\text{طہ}}^2 + 2\, \text{ھ}\, \dot{\text{طہ}}\, \dot{\text{فہ}} + \text{ب}\, \dot{\text{فہ}}^2 \right) \cdots\cdots\cdots\cdots (۴)$$

جہاں

$$\text{ا} = \Sigma\, \text{م} \left\{ \left(\frac{\text{جف لا}}{\text{جف طہ}}\right)^2 + \left(\frac{\text{جف ما}}{\text{جف طہ}}\right)^2 + \left(\frac{\text{جف ی}}{\text{جف طہ}}\right)^2 \right\},$$

$$\text{ھ} = \Sigma\, \text{م} \left\{ \frac{\text{جف لا}}{\text{جف طہ}} \frac{\text{جف لا}}{\text{جف فہ}} + \frac{\text{جف ما}}{\text{جف طہ}} \frac{\text{جف ما}}{\text{جف فہ}} + \frac{\text{جف ی}}{\text{جف طہ}} \frac{\text{جف ی}}{\text{جف فہ}} \right\},$$

$$\text{ب} = \Sigma\, \text{م} \left\{ \left(\frac{\text{جف لا}}{\text{جف فہ}}\right)^2 + \left(\frac{\text{جف ما}}{\text{جف فہ}}\right)^2 + \left(\frac{\text{جف ی}}{\text{جف فہ}}\right)^2 \right\}.$$

$$\cdots\cdots (۵)$$

پس ت ' تعمیمی رفتاروں طہَ ' فہَ کا ایک متجانس دو درجی تفاعل ہے جس کے سر کسی دی ہوئی صورت میں طہ ' فہ کے معلومہ تفاعل ہیں۔

اب (۲) کا دوسرا رکن لو۔ اگر

$$\left.\begin{aligned} \text{طا} &= \Sigma\left(\text{لا}\,\frac{\text{جف لا}}{\text{جف طہ}} + \text{ما}\,\frac{\text{جف ما}}{\text{جف طہ}} + \text{ہے}\,\frac{\text{جف ی}}{\text{جف طہ}}\right) \\ \text{فا} &= \Sigma\left(\text{لا}\,\frac{\text{جف لا}}{\text{جف فہ}} + \text{ما}\,\frac{\text{جف ما}}{\text{جف فہ}} + \text{ہے}\,\frac{\text{جف ی}}{\text{جف فہ}}\right) \end{aligned}\right\} \cdots (6)$$

رکھا جائے تو جملہ

$$\text{طا مف طہ} + \text{فا مف فہ} \quad \cdots\cdots (7)$$

سے وہ کام تعبیر ہوگا جو نظام پر عمل کرنے والی تمام قوتیں ایک صغیر ہٹاؤ میں کرتی ہیں۔ یہ مقداریں طا اور فا قوت کے تعمیمی اجزائے ترکیبی ہیں، اِن کو محسوب کرنے میں ہم اُن تمام قوتوں کو نظر انداز کر سکتے ہیں جو کوئی کام نہیں کرتیں مثلاً نا امتداد پذیر ڈوریوں یا ڈنڈوں کے تناؤ یا ایک استوار جسم کے مختلف حصوں کے باہمی تعامل، وغیرہ۔

حرکت کی مساواتیں اب وہی شکلیں

$$\left.\begin{aligned} \frac{\text{فر}}{\text{فرت}}\,\frac{\text{جف ت}}{\text{جف طہ}} - \frac{\text{جف ت}}{\text{جف طہ}} &= \text{طا}، \\ \frac{\text{فر}}{\text{فرت}}\,\frac{\text{جف ت}}{\text{جف فہ}} - \frac{\text{جف ت}}{\text{جف فہ}} &= \text{فا} \end{aligned}\right\} \cdots\cdots (8)$$

اختیار کرتی ہیں جیسا کہ دفعہ ۱۰۴ میں۔

(۳۱۷) اگر نظام تحفظی ہو اور اگر کوئی بیرونی قوتیں نہ ہوں تو

$$\text{طا مف طہ} + \text{فا مف فہ} = -\,\text{مف قہ} \quad \cdots\cdots (9)$$

جہاں قہ، توانائی بالقوہ ہے۔ چونکہ یہ نظام کی تشکیل کا ایک محدود تفاعل ہے یعنے متغیروں طہ، فہ کا، اس لیے

$$\text{طا} = -\frac{\text{جف قہ}}{\text{جف طہ}}،\quad \text{فا} = -\frac{\text{جف قہ}}{\text{جف فہ}} \quad \cdots\cdots (10)$$

اور مساواتیں (۸)،

$$\left.\begin{aligned} \frac{\text{فر}}{\text{فرت}}\,\frac{\text{جف تا}}{\text{جف }\dot{\text{طہ}}} - \frac{\text{جف تا}}{\text{جف طہ}} &= -\frac{\text{جف قہ}}{\text{جف طہ}}، \\ \frac{\text{فر}}{\text{فرت}}\,\frac{\text{جف تا}}{\text{جف }\dot{\text{فہ}}} - \frac{\text{جف تا}}{\text{جف فہ}} &= -\frac{\text{جف قہ}}{\text{جف فہ}} \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots (11)$$

ہو جاتی ہیں۔

مثال ۱۔ شکل ۳۹ (صفحہ ۱۹۴) کے دُہرے رقاص کی حرکت کی صحیح مساواتیں بنانا۔

یہ فرض کیا گیا تھا کہ ایک کمیت م ایک ثابت نقطہ و سے لٹکتی ہے اور دوسری کمیت مَ طول لَ کی ایک ڈوری کے ذریعہ کمیت م سے لٹکتی ہے۔ زیادہ عمومیت کے مدنظر ہم یہ خیال کر سکتے ہیں کہ ڈوریوں کے بجائے ہلکے ڈنڈے ہیں جو تناؤ کے علاوہ دباؤ بھی عائد کر سکتے ہیں۔

فرض کرو کہ طہ، فہ وہ زاویے ہیں جو ڈنڈے علی الترتیب انتصابی کے ساتھ بناتے ہیں۔ م کی رفتار ل $\dot{\text{طہ}}$ ہے۔ مَ کی رفتار دو رفتاروں کا مرکب ہے ایک م کے لحاظ سے اس کی رفتار اور دوسری خود م کی رفتار۔ یہ دو اجزائے ترکیبی علی الترتیب لَ، ل کے علی القوائم ہیں اور ان کی مقداریں لَ $\dot{\text{فہ}}$، ل $\dot{\text{طہ}}$ ہیں اور ان کی سمتیں زاویہ فہ - طہ پر مائل ہیں۔ اس لیے نظام کی توانائی بالحرکت کے لیے

$$\text{۲ تا} = \text{م ل}^2\,\dot{\text{طہ}}^2 + \text{مَ}\left\{\text{ل}^2\,\dot{\text{طہ}}^2 + \text{۲ ل لَ}\,\dot{\text{طہ}}\,\dot{\text{فہ}}\ \text{جم (فہ - طہ)} + \text{لَ}^2\,\dot{\text{فہ}}^2\right\} \quad \cdots\cdots (12)$$

حاصل ہوتا ہے اور توانائی بالقوہ

$$\text{قہ} = -\text{ م ج ل جم طہ} - \text{مَ ج (ل جم طہ + لَ جم فہ)} \quad \cdots\cdots (13)$$

ہے۔ اس لیے حرکت کی مساواتیں

$$\frac{\text{فر}}{\text{فرت}}\left\{\text{(م + مَ) ل}^2\,\dot{\text{طہ}} + \text{مَ ل لَ}\,\dot{\text{فہ}}\ \text{جم (فہ - طہ)}\right\} - \text{مَ ل لَ}\,\dot{\text{طہ}}\,\dot{\text{فہ}}\ \text{جب (فہ - طہ)} = -\text{(م + مَ) ج ل جب طہ} \quad \cdots\cdots (14)$$

فر/فرت { م لَ لَ طہ جم (فہ - طہ) + م لَ² فہ } + م لَ لَ طہ فہ جب (فہ - طہ)

= - م ج لَ جب فہ .... (۱۵)

ہیں۔

اگر ہم اِن مساواتوں کو باہم جمع کریں تو نتیجہ سے یہ معلوم ہوگا کہ و کے گرد کُل زاوئی معیار حرکت ایک ایسی شرح سے بڑھ رہا ہے جو و کے گرد جاذبہ کے معیار کے مساوی ہے۔

مثال ۲۔ شکل ۹۴ (صفحہ ۲۹۷) کے دُہرے رقاص کی صورت اب زیادہ مشکل نہیں رہی۔ دفعہ ۶۸ میں استعمال شدہ ترقیم کے مطابق اوپر کے جسم کی توانائی بالحرکت (۳۱۸)
½ مر کہ² طہ² ہے اور نچلے جسم کی توانائی بالحرکت اس کے مرکز کمیت کے لحاظ سے ½ م کہ² فہ² ہے۔ گ پر کے ایک ذرّہ م کی توانائی بالحرکت

½ م { ا² طہ² + ۲ اب طہ فہ جم (فہ - طہ) + ب² فہ² }

ہے۔ پس کُل نظام کے لیے

۲ ت = (مر کہ² + م ا²) طہ² + ۲ م اب طہ فہ جم (فہ - طہ)

+ م (ب² + کہ²) فہ² .... (۱۶)

اور قہ = - مر ج ہ جم طہ - م ج (ا جم طہ + ب جم فہ) .... (۱۷)

حرکت کی مساواتیں فی الحقیقت اُس نمونہ کی ہیں جیسی کہ (۱۴) اور (۱۵)۔ ان میں فرق صرف متنقل رقموں کی شکلوں کا ہے۔

مثال ۳۔ اگر وہ دو محور جو شکل ۹۴ میں و، وَ سے تعبیر ہوئے ہیں افقی ہونے کی بجائے انتصابی ہوں تو حرکت پر جاذبہ کا کوئی اثر نہیں ہوگا۔ اس سے ایک دلچسپ لیکن مقابلۃً آسان، یکساں حرکت کا مسئلہ خود بخود پیش ہوتا ہے لیکن اس کے لیے متغیروں میں تفریق سا تغیر کرنے سے سہولت ہوگی چنانچہ لکھو

فہ = طہ + ϕ .... (۱۸)

اِس طرح

$$\text{۲ فت} = \left\{ \text{مرک}^{2} + \text{م}\left(\text{ا}^{2} + \text{۲ اب جم خہ} + \text{ب}^{2} + \text{ک}^{2}\right)\right\} \dot{\text{طہ}}^{2} + \text{۲م}\left(\text{اب جم خہ} + \text{ب}^{2} + \text{ک}^{2}\right) \dot{\text{طہ}}\,\dot{\text{خہ}} + \text{م}\left(\text{ب}^{2} + \text{ک}^{2}\right) \dot{\text{خہ}}^{2} \quad \text{.........(۱۹)}$$

اس لیے حرکت کی مساواتیں

$$\frac{\text{فر}}{\text{فرت}}\left[\left\{\text{مرک}^{2} + \text{م}\left(\text{ا}^{2} + \text{۲ اب جم خہ} + \text{ب}^{2} + \text{ک}^{2}\right)\right\}\dot{\text{طہ}} + \text{م}\left(\text{اب جم خہ} + \text{ب}^{2} + \text{ک}^{2}\right)\dot{\text{خہ}}\right] = \text{۰} \quad \text{......(۲۰)}$$

$$\frac{\text{فر}}{\text{فرت}}\left\{\left(\text{اب جم خہ} + \text{ب}^{2} + \text{ک}^{2}\right)\dot{\text{طہ}} + \left(\text{ب}^{2} + \text{ک}^{2}\right)\dot{\text{خہ}}\right\} + \text{اب}\,\dot{\text{طہ}}\left(\dot{\text{طہ}} + \dot{\text{خہ}}\right)\text{جب خہ} = \text{۰} \quad \text{.........(۲۱)}$$

ہیں۔ مساوات (۲۰) سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ ثابت انتصابی محورِ و کے گرد زاوئی معیارِ حرکت مستقل ہے۔

کس شرط کے تحت زاویہ خہ (شکل ۶۴) یعنی و وَ، وَگ کا میلان مستقل اور اس لیے خہ̇ صفر ہوگا۔ مساواتوں (۲۰) اور (۲۱) سے بڑی آسانی کے ساتھ یہ معلوم ہوتا ہے کہ مطلوبہ شرط یہ ہے کہ

$$\text{جب خہ} = \text{۰} \quad \text{..................(۲۲)}$$

یعنے زاویہ صفر ہو یا π، اس لیے پورے نظام کا مرکز کمیت ثابت محور و سے زیادہ سے زیادہ یا کم سے کم فاصلہ پر ہونا چاہیے۔ یہ بھی ظاہر ہے کہ طہ̇ مستقل ہونا چاہیے۔

یکساں حرکت کی قائمیت کی تحقیق میں ہم اول خہ کو چھوٹا فرض کرینگے۔ لکھو

$$\dot{\text{طہ}} = \text{سہ} + \dot{\text{ضا}} \quad \text{.....................(۲۳)}$$

جہاں ضا̇ کو بھی چھوٹا فرض کیا گیا ہے تو خہ، خہ̇، ضا̇، ضا̈ میں دوسرے رتبہ کی

رقموں کو نظر انداز کرنے سے مساواتیں

$$\left\{\text{مک}^2+\text{م}\left(\text{ا}^2+2\,\text{اب}+\text{ب}^2+\text{کہ}^2\right)\right\}\text{ضاً}+\text{م}\left(\text{اب}+\text{ب}^2+\text{کہ}^2\right)\text{ختً}=0 \quad \ldots\ldots(۲۴)$$

$$\left(\text{اب}+\text{ب}^2+\text{کہ}^2\right)\text{ضاً}+\left(\text{ب}^2+\text{کہ}^2\right)\text{ختً}+\text{اب}\,\text{سہ}^2\,\text{خہ}=0 \quad \ldots\ldots(۲۵)$$

(۳۱۹) حاصل ہوتی ہیں۔ اگر ضاً کو ساقط کیا جائے اور کچھ اختصار کیا جائے تو

$$\left\{\text{مک}^2\left(\text{کہ}^2+\text{ب}^2\right)+\text{م}\,\text{کہ}^2\,\text{ا}^2\right\}\text{ختً}+\left[\text{مک}^2+\text{م}\left\{\left(\text{ا}+\text{ب}\right)^2+\text{کہ}^2\right\}\right]\text{سہ}^2\,\text{اب}\,\text{خہ}=0 \quad \ldots\ldots(۲۶)$$

اس لیے یکساں حرکت کا وہ نمونہ جس میں مرکز کمیت محور ہ سے زیادہ سے زیادہ فاصلہ پر ہوتا ہے قائم ہے اور اس کے گرد ایک چھوٹے اہتزاز کا دور

$$\frac{2\pi}{\text{سہ}}\times\left\{\frac{\text{مک}^2\left(\text{ب}^2+\text{کہ}^2\right)+\text{م}\,\text{کہ}^2\,\text{ا}^2}{\text{مک}^2\,\text{اب}+\text{م}\,\text{اب}\left\{\left(\text{ا}+\text{ب}\right)^2+\text{کہ}^2\right\}}\right\}^{\frac{1}{2}} \quad \ldots\ldots(۲۷)$$

ہے۔

وہ مخصوص صورت جس میں نظام دو ذرّوں میں تحویل ہوتا ہے ک = ۰، کہ = ۰ رکھنے سے حاصل ہوتی ہے؛ اس صورت میں دور

$$\frac{2\pi}{\text{سہ}}\times\left\{\frac{\text{م}\,\text{اب}}{\text{م}\,\text{ا}^2+\text{م}\left(\text{ا}+\text{ب}\right)^2}\right\}^{\frac{1}{2}} \quad \ldots\ldots(۲۸)$$

ہے۔

اس صورت میں یکساں حرکت کی نوعیت معلوم کرنے کے لیے جس میں مرکز کمیت محور سے قریب ترین ہوتا ہے ہمیں خہ = π + خہَ لکھنا چاہیے اور خہَ کو چھوٹا فرض کرنا چاہیے۔ اس مساوات میں جو (۲۶) کے متناظر ہے آخری رقم کی علامت الٹ جائیگی اور اس لیے یکساں حرکت اب غیر قائم ہو گی۔

مثال ۴۔ اگر دفعہ ۳۴ مثال ۳ کے مسئلہ میں بیرونی اسطوانہ (شکل ۴۲) گردش کرنے میں آزاد ہو

اور اگر اس کا زاوی محدد فہ ہو تو اس کے لحاظ سے اندرونی اسطوانہ کی زاوی رفتار

$$\text{س}\,\text{ا} = (\text{ب} - \text{ا})(\dot{\text{ط}} - \dot{\text{فہ}}) \quad \ldots\ldots (۲۹)$$

سے حاصل ہوگی اور اس لیے اس کی اصلی زاوی رفتار

$$\text{س} - \dot{\text{فہ}} = \frac{\text{ب} - \text{ا}}{\text{ا}}\,\dot{\text{ط}} - \frac{\text{ب}}{\text{ا}}\,\dot{\text{فہ}} \quad \ldots\ldots (۳۰)$$

پس اگر بیرونی اسطوانہ کا جمود کا معیار اس کے محور کے گرد ع ہو تو

$$۲\,\text{ت} = \text{ع}\,\dot{\text{فہ}}^۲ + \text{م}(\text{ب} - \text{ا})^۲\,\dot{\text{ط}}^۲ + \text{م}\,\text{ک}^۲\left(\frac{\text{ب} - \text{ا}}{\text{ا}}\,\dot{\text{ط}} - \frac{\text{ب}}{\text{ا}}\,\dot{\text{فہ}}\right)^۲ \quad \ldots\ldots (۳۱)$$

اگر بیرونی اسطوانہ کا مرکز کمیت اس کے محور پر ہو تو حسب سابق

$$\text{ق} = -\,\text{م}\,\text{ج}\,(\text{ب} - \text{ا})\,\text{جم}\,\text{ط} \quad \ldots\ldots (۳۲)$$

لگرانج کی مساواتوں سے اختصار کے بعد مساواتیں

$$\left(\text{ع} + \frac{\text{م}\,\text{ک}^۲\,\text{ب}^۲}{\text{ا}^۲}\right)\ddot{\text{فہ}} - \frac{\text{م}\,\text{ک}^۲\,\text{ب}\,(\text{ب} - \text{ا})}{\text{ا}^۲}\,\ddot{\text{ط}} = ۰ \quad \ldots\ldots (۳۳)$$

$$(\text{ب} - \text{ا})\left(۱ + \frac{\text{ک}^۲}{\text{ا}^۲}\right)\ddot{\text{ط}} - \frac{\text{ک}^۲\,\text{ب}}{\text{ا}^۲}\,\ddot{\text{فہ}} = -\,\text{ج}\,\text{جب}\,\text{ط} \quad \ldots\ldots (۳۴)$$

حاصل ہوتی ہیں جن سے فہ کو ساقط کیا جائے تو

$$(\text{ب} - \text{ا})\left(۱ + \frac{\text{ع}\,\text{ک}^۲}{\text{ع}\,\text{ا}^۲ + \text{م}\,\text{ک}^۲\,\text{ب}^۲}\right)\ddot{\text{ط}} + \text{ج}\,\text{جب}\,\text{ط} = ۰ \quad \ldots\ldots (۳۵)$$

اس لیے اہتزاز کا دور، طول

$$\text{ل} = (\text{ب} - \text{ا})\left(۱ + \frac{\text{ع}\,\text{ک}^۲}{\text{ع}\,\text{ا}^۲ + \text{م}\,\text{ک}^۲\,\text{ب}^۲}\right) \quad \ldots\ldots (۳۶)$$

کے ایک سادہ رقاص کے دور کے مساوی ہے اور اس لیے بیرونی اسطوانہ کے جمود سے طویل ہوتا ہے۔ اگر ہم $\text{ع} = \infty$ رکھیں تو دفعہ ۶۳ (۱۵) کا نتیجہ حاصل ہوگا۔

۱۰۷۔ توانائی۔ معیار حرکت۔ دھکہ —

توانائی کی مساوات کو لگرانج کی مساواتوں سے حسب ذیل طریقہ پر ماخوذ کیا جاسکتا ہے۔

$$\left(\frac{\text{فر}}{\text{فرت}}\frac{\text{جف ت}}{\text{جف طہ}} - \frac{\text{جف ت}}{\text{جف طہ}}\right)\text{طہ} + \left(\frac{\text{فر}}{\text{فرت}}\frac{\text{جف ت}}{\text{جف فہ}} - \frac{\text{جف ت}}{\text{جف فہ}}\right)\text{فہ}$$

$$= \frac{\text{فر}}{\text{فرت}}\left(\text{طہ}\frac{\text{جف ت}}{\text{جف طہ}} + \text{فہ}\frac{\text{جف ت}}{\text{جف فہ}}\right) - \left(\frac{\text{جف ت}}{\text{جف طہ}}\text{طہ} + \frac{\text{جف ت}}{\text{جف فہ}}\text{فہ}\right)$$

$$+ \left(\frac{\text{جف ت}}{\text{جف طہ}}\text{طہ} + \frac{\text{جف ت}}{\text{جف فہ}}\text{فہ}\right) \quad \ldots\ldots (۱)$$

چونکہ ت، طہ اور فہ کا ایک متجانس دو درجی تفاعل ہے اس لیے

$$\text{طہ}\frac{\text{جف ت}}{\text{جف طہ}} + \text{فہ}\frac{\text{جف ت}}{\text{جف فہ}} = ۲\,\text{ت} \quad \ldots\ldots (۲)$$

اور اس لیے (۱) کا بائیں جانبی رکن

$$۲\frac{\text{فرت}}{\text{فرت}} - \frac{\text{فرت}}{\text{فرت}} \;\text{یا}\; \frac{\text{فرت}}{\text{فرت}}$$

میں تحویل ہوتا ہے۔ اس لیے دفعہ ۱۰۶ کی مساواتوں (۸) سے

$$\frac{\text{فرت}}{\text{فرت}} = \text{طا طہ} + \text{فا فہ} \quad \ldots\ldots (۳)$$

حاصل ہوتا ہے جس سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ کسی لمحہ پر توانائی بالحرکت ایسی شرح سے بڑھ رہی ہے جو اس شرح کے مساوی ہے جس پر کام نظام کے مختلف حصوں پر ہو رہا ہے۔

اگر نظام تحفظی ہو اور کوئی بیرونی قوتیں نہ ہوں تو (۳) کا بائیں جانبی رکن دفعہ ۱۰۶ (۱۰) کی رو سے $-\frac{\text{فرقہ}}{\text{فرت}}$ کے مساوی ہے۔ تب مساوات کا تکملہ

$$\text{ت} + \text{قہ} = \text{مستقل} \quad \ldots\ldots (۴)$$

اگر $\text{لہ} = \frac{\text{جف ت}}{\text{جف طہ}}$ ، $\text{مہ} = \frac{\text{جف ت}}{\text{جف فہ}}$ ....(۵)

لکھا جائے تو مقداروں لہ، مہ کو "معیار حرکت کے تعمیمی اجزائے ترکیبی" کہا جاتا ہے۔ اِس نام کا سبب دفعہ ۱۰۴ میں بیان کردہ سبب کے مشابہ ہے یا ہم اس کو دفعہ ۱۰۶ کی مساواتوں (۸) کے اطلاق سے درست ثابت کر سکتے ہیں۔ اگر ہم یہ خیال کریں کہ کسی لمحہ پر حقیقی حرکت، سکون سے ایک لا انتہا صغیر وقت تہ میں پیدا ہوئی ہے تو (۳)
محولہ بالا مساواتوں کے تکمل سے

$$\frac{\text{جف ت}}{\text{جف طہ}} = \int_{\text{ب}}^{\text{تَ}} \text{طا فرت} ، \quad \frac{\text{جف ت}}{\text{جف فہ}} = \int_{\text{ب}}^{\text{تَ}} \text{فا فرت} \quad ....(۶)$$

حاصل ہوتے ہیں۔ کیونکہ رقمیں $\frac{\text{جف ت}}{\text{جف طہ}}$ ، $\frac{\text{جف ت}}{\text{جف فہ}}$ صرف رفتاروں اور محددوں پر منحصر ہونے کی وجہ سے لازماً محدود ہیں اور اس لیے معدوم ہوتی ہیں جب کہ چھوٹے وقفے تہ پر تکمل کیا جاتا ہے، لیکن $\frac{\text{جف ت}}{\text{جف طہ}}$ ، $\frac{\text{جف ت}}{\text{جف فہ}}$ رفتاروں طہ، فہ کے خطی تفاعل ہیں اور ان کی ابتدائی قیمتیں اس خیالی عمل میں صفر ہیں۔ ضابطوں (۶) سے معلوم ہوتا ہے کہ تعمیمی معیار حرکت جن کی تعریف اوپر کی گئی ہے اُس دھکہ کے تعمیمی اجزائے ترکیبی کے مساوی ہیں جو نظام کو سکون سے اُس کی حقیقی حالت میں لانے کے لیے مطلوب ہیں۔

مثال ۱۔ دفعہ ۹۸ کا دُہرا رقاص اپنے قائم محل میں ساکن ہے، اس حالت میں اُس پر ایک افقی دھکہ ضا پڑتا ہے جو نچلے جسم پر ایک ایسے خط میں عمل کرتا ہے جس کا فاصلہ محور وَ کے نیچے لا ہے۔

چونکہ وہ کام جو ایک محدود قوت لا اس خط میں ایک چھوٹے ہٹاؤ میں کرتی ہے

$$\text{لا} \left(\text{ا مف طہ} + \text{لا مف فہ} \right)$$

ہے، ہم دیکھتے ہیں کہ دھکہ کے تعمیمی اجزاء ترکیبی ضا ا، ضا لا ہیں۔ اس لیے دھکہ کے عین بعد

طہ، فہ کی قیمتیں

$$\frac{جف\ ڡت}{جف\ طہ} = ضا ا، \frac{جف\ ڡت}{جف\ فہ} = ضا لا \quad ......(۷)$$

ہیں جہاں ڡت کی قیمت دفعہ ۱۰۲ (۱۲) سے طہ = ۰، فہ = ۰ کے ساتھ حاصل ہوتی ہے
اس طرح

$$\left.\begin{aligned} (مر کا^۲ + مر ا^۲)\ طہ + م ا ب\ فہ &= ضا ا \\ م ا ب\ طہ + م (ب^۲ + کہ^۲)\ فہ &= ضا لا \end{aligned}\right\} \quad ......(۸)$$

پس طہ = ۰ یعنے اوپر کا جسم (ابتداءً) ساکن رہیگا اگر

$$لا = ب + \frac{کہ^۲}{ب} \quad ......(۹)$$

جیساکہ دفعہ ۱۷ میں معلوم ہوا تھا۔
اگر یہ دو جسم طول ۲ب کے دو مساوی یکساں ڈنڈے ہوں تو

$$مر = م،\ ا = ۲ب،\ کا^۲ = \frac{۴}{۳} ب^۲،\ کہ^۲ = \frac{۱}{۳} ب^۲$$

اور اس لیے

$$\left.\begin{aligned} ا\ طہ &= \frac{۹\ ضا}{۷ م ب} \left(\frac{۴}{۳} ب - لا\right) \\ ب\ فہ &= \frac{۱۲\ ضا}{۷ م ب} \left(لا - \frac{۳}{۴} ب\right) \end{aligned}\right\} \quad ......(۱۰)$$

(۳۲۲) مضروب نقطہ کی رفتار

$$ا\ طہ + لا\ فہ = \frac{۶\ ضا}{۷ م ب^۲} \left(۲ ب^۲ - ۳ ب لا + ۲ لا^۲\right) \quad ......(۱۱)$$

ہے۔

مثال ۲۔ چار مساوی ڈنڈوں کو جوڑ کر ایک معین ا ب ج د بنایا گیا ہے۔
اس کے نقطہ ا پر دھکہ ضا سمت اج میں پڑتا ہے۔
فرض کرو کہ معین کے مرکز گ کا محدد لا ہے جس کو اج کے کسی ثابت نقطہ سے

پیمائش کیا گیا ہے ۔ ہم فرض کرینگے کہ ہر ڈنڈے کا مرکز کمیت اُس کے وسطی نقطہ پر ہے ۔ فرض کرو کہ ہر ڈنڈے کا طول ۲ ا ، اس کے مرکز کے گرد اس کا گردش کا نصف قطر ک ، اور زاویہ ا ب ج ، ۲ ط ہے ۔ توانائی بالحرکت کے لیے ضابطہ ایک آسان عمل حساب سے

۲ ت = م لاَ^۲ + م (ک^۲ + ا^۲) طَ^۲ .... (۱۲)

معلوم ہوتا ہے جہاں م کل کمیت ہے ۔ چونکہ ا کا محدد لا ۔ ۲ ا جب ط ہے اس لیے ا پر ایک محدود قوت لا جو کام ایک چھوٹے ہٹاؤ میں کریگی وہ

لا (مف لا ۔ ۲ ا جم ط مف ط)

ہوگا ۔ اس لیے دھکہ کے تعمیمی اجزائے ترکیبی ضا اور ۔ ۲ ا ضا جم ط ہیں ۔ اس لیے

م لاَ = ضا ، م (ک^۲ + ا^۲) طَ = ۔ ۲ ا ضا جم ط .... (۱۳)

اس لیے ا کی ابتدائی رفتار

لاَ ۔ ۲ ا جم ط × طَ = (۱ + ۴ ا^۲ جم^۲ ط / (ک^۲ + ا^۲)) ضا / م .... (۱۴)

ہے اور پیدا شدہ توانائی

۱/۲ (۱ + ۴ ا^۲ جم^۲ ط / (ک^۲ + ا^۲)) ضا^۲ / م .... (۱۵)

ہے ۔ یہ اُس سے بڑی ہے اگر فریم استوار ہوتا اور یہ زیادتی اس نسبت میں ہے جو دوسرے جزو ضربی سے حاصل ہوتی ہے (دیکھو دفعہ ۱۰۸) ۔

۱۰۸ ۔ عام مسئلے —

ت = ۱/۲ (ا طَ^۲ + ۲ ھ طَ فَہ + ب فَہ^۲) .... (۱)

لکھنے سے

ل = ا طہ + ھ فہ ، مہ = ھ طہ + ب فہ ....(۲)

حاصل ہوتے ہیں۔
اگر اسی تشکیل میں سے حرکت کی دوسری حالت میں رفتاروں کو طہَ ، فہَ سے اور معیاروں کو لَ ، مہَ سے تعبیر کیا جائے تو

لہ طہَ + مہ فہَ = لَ طہ + مہَ فہ ....(۳)

کیونکہ ان میں سے ہر جملہ

ا طہ طہَ + ھ (طہ فہَ + طہَ فہ) + ب فہ فہَ ....(۴)

کے مساوی ہے۔
اس سے مکافات کا ایک اہم مسئلہ حاصل ہوتا ہے۔ اگر
لَ = ۰ ، مہ = ۰
رکھا جائے تو ضابطہ (۳) سے

فہ / ل = طہَ / مہَ ....(۵)

حاصل ہوتا ہے۔ اس کی تعبیر سادہ ترین ہے جب کہ دو محدد طہ اور فہ دونوں ہندسی (۳۲۳)
نوعیت کے ہوں یعنے جب کہ دونوں خطی مقداریں ہوں یا دونوں زاویے۔ مثلاً اگر دونوں خطی ہوں تو دو معیار حرکت معمولی دھکہ کی قوتیں ہونگی اور ہم ل = مہَ رکھ سکینگے اور اس لیے طہَ = فہ ۔ پس ایک نمونہ کی رفتار جو دوسرے نمونہ کے دھکہ کی وجہ سے پیدا ہوتی ہے دوسرے نمونہ کی رفتار کے مساوی ہوتی ہے جو پہلے نمونہ کے دھکہ سے پیدا ہوتی ہے۔
مثلاً فرض کرو کہ دو ڈنڈے اب اور ب ج ہیں جو ب پر آزادانہ جوڑے گئے ہیں اور ان میں سے پہلا ا کے گرد جو ثابت ہے گھومنے میں آزاد ہے۔ آسانی کے مدنظر ہم اِن ڈنڈوں کو ایک ہی خط مستقیم میں فرض کرینگے۔ نظام کے کسی دو نقطوں ف ، ق کے ہٹاؤں کو جو طولوں کے علی التوائم ہوں دو محدد

لیا جا سکتا ہے۔ تب مسئلہ سے یہ بیان ہوتا ہے کہ ق کی رفتار جو پ پر کے ایک دھکہ سے پیدا ہوتی ہے پ کی اُس رفتار کے مساوی ہوتی ہے جو ق پر کے ایک مساوی دھکہ سے پیدا ہوتی ہے۔ پھر اگر ہم زاوئی محدد استعمال کریں تو مسئلہ سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ ب ج کی زاوئی رفتار جو ا ب پر عائد کردہ ایک دھکہ دار جفت سے پیدا ہوتی ہے ا ب کی اُس زاوئی رفتار کے مساوی ہوتی ہے جو ب ج پر عائد کردہ ایک مساوی جفت سے پیدا ہوتی ہے۔ بالآخر اگر محدد مختلف قسموں کے ہوں تو ہم یہ نتیجہ اخذ کرتے ہیں کہ اگر دھکہ ضا جو ا ب کے کسی نقطہ ف پر عائد کیا گیا ہے ب ج میں زاوئی رفتار سہ پیدا کرے تو ایک دھکہ دار جفت ضا ا جو ب ج پر عائد کیا گیا ہو ف پر رفتار سہ ا پیدا کریگا۔

دوسرا اہم مسئلہ پیدا شدہ توانائی کی مقدار پر قیود کے اثر سے متعلق ہے جب کہ حیلی نظام کو مختلف طریقوں سے چلایا جائے۔

اگر (۱) میں ہم فہ کی وہ قیمت جو (۲) سے طہ اور مہ کی رقوم میں حاصل ہوتی ہے درج کریں تو

$$2\,\text{ت} = \frac{\text{اب} - \text{ھ}^2}{\text{ب}}\,\text{طہ}^2 + \frac{\text{مہ}^2}{\text{ب}} \quad \cdots\cdots\cdots (6)$$

جہاں طہ² کا سر بالضرور مثبت ہے۔

اس لیے توانائی دھکہ مہ کی وجہ سے اُس سے بڑی ہے اگر طہ = ۰ یعنے اُس سے بڑی ہے اگر محدد طہ کو متغیر ہونے سے روکنے کے لیے ایک قید عائد کی جاتی (دیکھو دفعہ ۷۳، مثال ۲ اور دفعہ ۱۰۷ مثال ۲)۔

نیز اگر نظام کو ایک مقررہ رفتار طہ سے جو صرف نمونہ طہ کے ایک دھکہ سے
۲۲ پیدا ہو چلایا جائے تو توانائی اُس سے کم ہوگی اگر دوسرے نمونہ کا ایک قید کرنے والا دھکہ روبہ عمل ہو۔

محددوں کے مناسب انتخاب سے اِس دفعہ کے نتیجوں کو اُن نظاموں پر اطلاق پذیر کیا جا سکتا ہے جن کو آزادی کے متعدد درجے حاصل ہوں۔ لیکن ہم صرف اُن دو مسئلوں کو جو ابھی ثابت کیے گئے ہیں عام شکل میں بیان کرنے پر اکتفا کریںگے۔

(۱) (ڈیلیمبی کا مسئلہ[1]) ۔ ایک نظام جس کو سکون سے دیے ہوئے دھکوں کے ذریعہ متحرک کیا گیا ہو زیادہ تر توانائی حاصل کرتا ہے بہ نسبت اس کے کہ وہ کسی طریقہ پر مقید ہوتا۔

(۲) (تھامسن کا مسئلہ[2]) ۔ ایک نظام جس کو دی ہوئی سرقتاروں سے متحرک کیا گیا ہو کمتر توانائی رکھتا ہے بہ نسبت اس کے کہ وہ کسی طریقہ پر مقید ہوتا۔

ایک ایسے نظام میں جس کو آزادی کا صرف ایک درجہ حاصل ہو توانائی بالحرکت کو شکلوں

$$\text{ت} = \frac{1}{2}\,\text{ع}\,\text{طہ}^2 = \frac{1}{2}\,\frac{\text{لہ}^2}{\text{ع}} \qquad \text{.............. (۷)}$$

میں سے کسی میں بیان کیا جا سکتا ہے جہاں جمود کا سرعہ ہے ۔ اس لیے پچھلے مسئلوں کا خلاصہ یہ ہے کہ کسی قید کا اثر نظام کے ظاہری جمود میں اضافہ کرنیکا ہوتا ہے[3]

۱۰۹۔ توازن کے گرد اہتزاز

دفعہ ۱۰۶ کی مساواتیں (۱۱) طہ = ۰، فہ = ۰ سے پوری ہونگی بشرطیکہ

$$\frac{\text{جف قہ}}{\text{جف ط}} = \text{۰}\,،\quad \frac{\text{جف قہ}}{\text{جف فہ}} = \text{۰} \qquad (\text{۱})$$

---

[1] یہ مسئلہ یولر، لگرانج، ڈیلیمبی (۱۸۴۲ء) اور برٹرانڈ (۱۸۵۲ء) کے ناموں سے منسوب ہے۔ اعظم خاصیت کو ڈیلیمبی نے پوری طرح ثابت کیا تھا۔

[2] سر ڈبلیو۔ تھامسن، بعد میں لارڈ کیلون (۱۸۶۳ء)۔

[3] لارڈ ریالے (۱۸۸۶ء)۔

جیسا کہ دوسری طرح معلوم ہے ۔ ان کو وہ مساواتیں سمجھا جا سکتا ہے جن سے توازن کی مختلف ممکن تشکیلوں کے متناظر طہ، فہ کی قیمتیں متعین ہوتی ہیں ۔ ان سے یہ بیان ہوتا ہے کہ توانائی بالقوہ چھوٹے ہٹاؤں کے لیے مقیم ہے (سکونیات دفعہ ۵۰)۔

توازن کی نوعیت معلوم کرنے کے لیے ہم فرض کر سکتے ہیں کہ مستقلوں کے اضافہ سے محددوں میں اس طرح ترمیم کی گئی ہے کہ وہ زیر بحث تشکیل میں معدوم ہوتے ہیں ۔ پس ایک چھوٹے خلل کا اثر دریافت کرنے میں طہ، فہ اور نیز $\dot{\text{طہ}}$، $\dot{\text{فہ}}$ کی قیمتوں کو چھوٹی مقداریں سمجھا جا سکتا ہے ۔

حرکیاتی مساواتوں میں رقمیں $\frac{\text{جف ت}}{\text{جف طہ}}$ ، $\frac{\text{جف ت}}{\text{جف فہ}}$ چونکہ $\dot{\text{طہ}}$، $\dot{\text{فہ}}$ میں (۳
دوسرے رتبہ کی ہیں اس لیے ترک کی جاتی ہیں اور مساواتیں

$$\left.\begin{aligned} \frac{\text{ف}}{\text{فت}}\,\frac{\text{جف ت}}{\text{جف }\dot{\text{طہ}}} + \frac{\text{جف قہ}}{\text{جف طہ}} &= 0, \\ \frac{\text{ف}}{\text{فت}}\,\frac{\text{جف ت}}{\text{جف }\dot{\text{فہ}}} + \frac{\text{جف قہ}}{\text{جف فہ}} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

میں تحویل ہوتی ہیں ۔ نیز ت کے جملہ یعنے

$$\text{ت} = \tfrac{1}{2}\left(\text{ا}\,\dot{\text{طہ}}^2 + 2\,\text{ھ}\,\dot{\text{طہ}}\,\dot{\text{فہ}} + \text{ب}\,\dot{\text{فہ}}^2\right) \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

میں سروں ا، ھ، ب کو مستقل اور اُن قیمتوں کے مساوی سمجھا جا سکتا ہے جو توازن کی تشکیل میں ان کی ہیں کیونکہ اس سے (۲) میں جو خطائیں داخل ہونگی وہ دوسرے رتبہ کی ہیں ۔

نیز قہ کی قیمت کو طہ، فہ کی چھوٹی قیمتوں کے لیے شکل

$$\text{قہ} = \text{قہ}_0 + \tfrac{1}{2}\left(\text{ا}\,\text{طہ}^2 + 2\,\text{ھ}\,\text{طہ}\,\text{فہ} + \text{ب}\,\text{فہ}^2\right) + \ldots\ldots\ldots (4)$$

میں پھیلا ہوا فرض کیا جا سکتا ہے جس میں پہلے رتبہ کی رقمیں غائب ہیں کیونکہ مساواتیں (۱)، طہ = ۰ اور فہ = ۰ سے پوری ہونی چاہئیں ۔ سروں ا، ھ، ب کو نظام کے

"قائمیت کے سر" کہا جا سکتا ہے۔
پس اگر ہم صرف پہلے رتبہ کی رقموں کو رکھیں تو مساواتیں (۲)

ا طہ + ھ فہ + ا طہ + ھ فہ = ۰،
ھ طہ + ب فہ + ھ طہ + ب فہ = ۰ .... (۵)

ہو جاتی ہیں۔
انہیں حل کرنے کے لیے فرض کرو کہ

طہ = ج جم (ن ت + صہ)، فہ = ک ج جم (ن ت + صہ) ...... (۶)

جہاں ج، ک، صہ مستقل ہیں۔ مساواتیں پوری ہوتی ہیں بشرطیکہ

(ن^{۲} ا - ا) + (ن^{۲} ھ - ھ) ک = ۰،
(ن^{۲} ھ - ھ) + (ن^{۲} ب - ب) ک = ۰ .... (۷)

ک کو ساقط کرنے سے

| ن^{۲} ا - ا ، ن^{۲} ھ - ھ |
| ن^{۲} ھ - ھ ، ن^{۲} ب - ب | = ۰ .... (۸)

جو ن^{۲} میں ایک دو درجی مساوات ہے۔ اس لیے ضابطہ (۶) مساواتوں (۵) کا ایک حل ہیں بشرطیکہ ن، (۸) کو پورا کرے اور بشرطیکہ سر ک کو مساواتوں (۷) میں سے کسی ایک کے مطابق متعین کیا گیا ہو۔
(۳۲۶) چونکہ ت کے لیے جملہ (۳) لازماً مثبت ہے قہ طہ، فہ کی قیمتیں کچھ ہی ہوں اس لیے جمود کے سر، رشتوں

ا > ۰، ب > ۰، ا ب - ھ^{۲} > ۰ ...... (۹)

کے تحت ہیں۔ پس اگر ہم اوپر کے مقطعہ میں ن^{۲} = ± ∞ رکھیں تو اس کی علامت

+ ہے، اگر ن۲ = ا/ا یا ب/ب رکھیں تو اس کی علامت ـ ہے، لیکن اگر ن۲ = ۰ رکھیں تو اس کی علامت وہی ہے جو اب ـ ھ۲ کی ہے ۔ اس لیے (۸) کی دو اصلیں جب کہ اُس کو ن۲ میں ایک دو درجی مساوات سمجھا جائے ہمیشہ حقیقی ہوتی ہیں ۔

نیز یہ واضح ہے کہ اصلیں نامساوی ہیں اِلّا آنکہ ا/ا = ب/ب، اس کے علاوہ اصلوں کے مساوی ہونے کے لیے یہ ضروری ہے کہ ن۲ اِن کسروں کی مشترک قیمت کے مساوی ہو اور (۸) سے یہ مستنبط ہوتا ہے کہ اس وقت ن۲ کو ھ/ھ کے بھی مساوی ہونا چاہیے ۔ اس لیے مساوی اصلوں کے لیے شرطیں

ا/ا = ب/ب = ھ/ھ ....(۱۰)

ہیں اور (۷) سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ ایسی صورت میں ک کی قیمتیں غیر متعین ہوتی ہیں ۔

نیز (۴) میں اگر قہ ۔ قہ لازماً مثبت ہو یعنے اگر توازن کی تشکیل میں قہ اقل ہو تو

ا > ۰، ب > ۰، اب ـ ھ۲ > ۰ ....(۱۱)

اس لیے ن۲ کی دونوں قیمتیں مثبت ہیں جن میں سے ایک، مقداروں ا/ا اور ب/ب میں سے جو بڑی ہے اُس سے بڑی ہے اور دوسری ان میں سے جو چھوٹی ہے اُس سے چھوٹی ہے ۔

لیکن اگر توازن کی تشکیل میں قہ اعظم ہو تو

ا < ۰، ب < ۰، اب ـ ھ۲ > ۰ ....(۱۲)

اور اس لیے ن۲ کی دونوں قیمتیں منفی ہیں ۔ تب شکل (۶) خیالی ہے اور اس کی بجائے

وہ شکل رکھنی چاہیے جس میں حقیقی قوت نما شامل ہوں (دفعہ ۳۲)۔

اگر $ا ب - ھ^2 > 0$

تو $ن^2$ کی ایک قیمت منفی اور دوسری مثبت ہوگی۔

فرض کرو کہ ہم اپنی توجہ صرف قائم توازن کی صورت تک محدود رکھتے ہیں تو $ن^2$ کی دو قیمتوں کے متناظر طول کو جمع کرنے سے

$$\left.\begin{array}{l} ط = ج_1 \text{ جم } (ن_1 ت + ص_1) + ج_2 \text{ جم } (ن_2 ت + ص_2) \\ ف = ک_1 ج_1 \text{ جم } (ن_1 ت + ص_1) + ک_2 ج_2 \text{ جم } (ن_2 ت + ص_2) \end{array}\right\} \quad (13)$$

(۳۲۷) جہاں $ج_1$، $ج_2$، $ص_1$، $ص_2$ کی قیمتیں اختیاری ہیں اور $ک_1$، $ک_2$ کی قیمتیں رشتوں (۷) میں سے کسی ایک سے معلوم ہوتی ہیں جب کہ $ن^2$ کی متعلقہ قیمتیں درج کر دی گئی ہوں۔ چونکہ چار اختیاری مستقل ہیں اس لیے یہ حل عام ہے۔ وہی بنیادی مساوات (۸) ذرا مختلف سلسلہ میں حاصل ہوتی ہے۔ فرض کرو کہ بے رگڑ قید کے اوخال سے محدد ف، محدد ط کے ساتھ ایک دی ہوئی مستقل نسبت رکھتا ہے چنانچہ فرض کرو کہ

$$ف = ک ط \quad (14)$$

نظام اب آزادی کے صرف ایک درجہ میں تحویل ہوتا ہے اور توانائی بالحرکت اور توانائی بالقوہ کے لیے جملے

$$ت = \frac{1}{2} (ا + 2 ھ ک + ب ک^2) \dot{ط}^2 \quad (15)$$

$$ق - ق_0 = \frac{1}{2} (ا + 2 ھ ک + ب ک^2) ط^2 \quad (16)$$

ہیں۔ اس لیے اس مقید اسلوب میں ایک چھوٹے اہتزاز کا دور $\left(\frac{2\pi}{ن}\right)$ حسب دفعہ ۶۵

$$ن^2 = \frac{ا + 2 ھ ک + ب ک^2}{ا + 2 ھ ک + ب ک^2} \quad (17)$$

سے حاصل ہوتا ہے۔ اس کسر کی منفی قیمت سے بلا شبہ یہ ظاہر ہوتا ہے کہ حل میں

حقیقی قوت نما شامل ہے اور اس لیے یہ مقید غیر قائم ہے۔

چونکہ (۱۵) میں ت کی قیمت لازماً مثبت ہے اس لیے (۱۷) میں نسب نما معدوم نہیں ہو سکتا۔ اس لیے یہ کسر ک کی تمام قیمتوں کے لیے محدود ہے اور اس کی ایک اعظم اور ایک اقل قیمت ہونی چاہیے۔ ان کو معلوم کرنے کے لیے ہم مساوات کو شکل

ن^{2} (ا + ۲ ھ ک + ب ک^{2}) = ا + ۲ ھ ک + ب ک^{2} .... (۱۸)

میں لکھتے ہیں اور اس مفروضہ پر تفرق کرتے ہیں کہ فر(ن^{2}) / فر ک = ۰۔ چنانچہ

ن^{2} (ھ + ب ک) = ھ + ب ک .... (۱۹)

حاصل ہوتا ہے۔ اس کو (۱۸) کے ساتھ ملانے سے

ن^{2} (ا + ھ ک) = ا + ھ ک .... (۲۰)

بھی حاصل ہوتا ہے۔ یہ مساواتیں (۷) کے مماثل ہیں اور اگر ہم ک کو ساقط کریں تو معلوم
ہوتا ہے کہ ن^{2} کی مقیم قیمتیں، دو درجی (۸) کی اصلیں ہیں جو موجودہ استدلال کی رو سے
حقیقی ہیں۔ نیز اگر قھ ـ قھ لازماً مثبت ہو تو ن^{2} کی دونوں قیمتیں (۱۷) کی رو سے مثبت
ہیں۔ لیکن اگر قھ ـ قھ لازماً منفی ہو تو ن^{2} کی دونوں قیمتیں منفی ہیں۔ اگر قھ ـ قھ (۳۲)
دونوں علامتیں اختیار کر سکے تو ن^{2} کی اعظم قیمت مثبت اور اقل قیمت منفی ہے۔

۱۱۰۔ ارتعاش کے طبعی اسلوب۔

دفعہ ۱۰۹ کے پہلے حصے میں جو عمل اختیار کیا گیا اس میں یہ معلوم کرنا مقصود تھا کہ آیا نظام کی حرکت کا اسلوب ممکن ہے جس میں غیر تابع محددوں طہ، فہ میں سے ہر ایک وقت کا ایک سادہ موسیقی تفاعل ہو جن کا دور اور ہیئت وہی ہو چنانچہ ہمیں معلوم ہوا کہ (قائمیت کی صورت میں) ایسے دو اسلوب ہیں۔ ان میں سے ہر ایک کو نظام کے ارتعاش کا اسلوب، کہتے ہیں۔ اس کا دور بالکل نظام کی ترکیب سے متعین ہوتا ہے اور

اس کا نمونہ بھی معین ہوتا ہے کیونکہ ط اور فہ کے اضافی حیطے ثابت ہوتے ہیں اگرچہ مطلق حیطہ اور ہیئت اختیاری ہے۔

ان دو اسلوبوں سے متعلق ضابطے

$$\text{ط} = \text{ج}_1\,\text{جم}(\text{ن}_1\text{ت} + \text{صہ}_1)،\quad \text{فہ} = \text{ک}_1\,\text{ج}_1\,\text{جم}(\text{ن}_1\text{ت} + \text{صہ}_1) \quad \ldots\ldots (1)$$

اور

$$\text{ط} = \text{ج}_2\,\text{جم}(\text{ن}_2\text{ت} + \text{صہ}_2)،\quad \text{فہ} = \text{ک}_2\,\text{ج}_2\,\text{جم}(\text{ن}_2\text{ت} + \text{صہ}_2) \quad \ldots\ldots (2)$$

ہم دیکھ چکے ہیں کہ انھیں جمع کرنے سے نظام کی عام ترین حرکت جو ایک چھوٹے خلل سے پیدا ہوتی ہے تعبیر ہو سکتی ہے جہاں ج_1 اور ج_2 اختیاری حیطے اور صہ_1، صہ_2 اختیاری ہیئتیں۔

جب نظام صرف ان میں سے ایک اسلوب میں اہتزاز کرتا ہے تو ہر ذرہ ایک خط مستقیم میں سادہ موسیقی ارتعاش کرتا ہے اور مختلف ذرے ایک دوسرے کے ساتھ قدم ملاتے ہیں اور اپنے متعلقہ توازن کے محلوں میں سے ایک ساتھ گزرتے ہیں۔ اضافی حیطے بھی متعین ہوتے ہیں۔ ان بیانوں کی تصدیق کے لیے ہمیں صرف اُن جملوں کو لکھنے کی ضرورت ہے جو ایک ذرہ کے ہٹاؤ کے اجزا ترکیبی کے لیے ہیں جب کہ ذرہ کا اوسط محل (لا، ما، ی) ہو۔ چونکہ ط اور فہ کو چھوٹا فرض کیا گیا ہے اس لیے پہلے اسلوب میں

$$\left.\begin{aligned}
\text{مف لا} &= \frac{\text{جف لا}}{\text{جف ط}}\,\text{ط} + \frac{\text{جف لا}}{\text{جف فہ}}\,\text{فہ} = \left(\frac{\text{جف لا}}{\text{جف ط}} + \text{ک}_1\frac{\text{جف لا}}{\text{جف فہ}}\right)\text{ج}_1\,\text{جم}(\text{ن}_1\text{ت} + \text{صہ}_1)\\
\text{مف ما} &= \frac{\text{جف ما}}{\text{جف ط}}\,\text{ط} + \frac{\text{جف ما}}{\text{جف فہ}}\,\text{فہ} = \left(\frac{\text{جف ما}}{\text{جف ط}} + \text{ک}_1\frac{\text{جف ما}}{\text{جف فہ}}\right)\text{ج}_1\,\text{جم}(\text{ن}_1\text{ت} + \text{صہ}_1)\\
\text{مف ی} &= \frac{\text{جف ی}}{\text{جف ط}}\,\text{ط} + \frac{\text{جف ی}}{\text{جف فہ}}\,\text{فہ} = \left(\frac{\text{جف ی}}{\text{جف ط}} + \text{ک}_1\frac{\text{جف ی}}{\text{جف فہ}}\right)\text{ج}_1\,\text{جم}(\text{ن}_1\text{ت} + \text{صہ}_1)
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (3)$$

حاصل ہوتے ہیں ۔ ہم دیکھتے ہیں کہ ہر ذرہ کے لیے نسبتیں مف لا : مف ما : مف ی (۳)
مستقل ہیں اور وقت کے اور مطلق حیطہ ج کے تابع نہیں ہیں ۔

ہم دفعہ ۱۰۹ میں یہ دیکھ چکے ہیں کہ طبعی اسلوبوں میں یہ خاصیت ہوتی ہے کہ ہر ارتعاش کے نمونہ میں خفیف تغیر سے دَور نہیں بدلتا بلکہ مقیم ہوتا ہے یعنے اگر نظام ایک ایسے اسلوب میں ارتعاش کرنے کے لیے مجبور ہو جو طبعی سے قدرے مختلف ہے تو دَور پہلے رتبہ تک نہیں بدلتا ۔ مثلاً ہم ایک چکنے پیالے میں حرکت کی صورت کو لے سکتے ہیں (دفعہ ۲۹) ۔ اگر ذرہ زیر ترین نقطہ میں سے گزرتی ہوئی انتصابی تراش میں اہتزاز کرنے کے لیے مجبور ہو تو دَور $۲\pi \sqrt{\frac{\text{سا}}{\text{ج}}}$ ہے جہاں سا تراش کا نصف قطر انحناء ہے ۔ یہ اعظم یا اقل ہوتا ہے جب کہ تراش زیر ترین نقطہ پر کے انحناء کے صدر مستویوں میں سے ایک پر منطبق ہوتی ہے ۔

محددوں ط، ذ کو جن سے نظام کی تشکیل متعین ہوتی ہے لا انتہا مختلف طریقوں سے منتخب کیا جا سکتا ہے ۔ لیکن ایک انتخاب ایسا ہے جو خاص طور پر نظری لحاظ سے دلچسپ ہے کیونکہ ہر طبعی اسلوب میں صرف ایک محدد کا تغیر شامل ہوتا ہے ۔

ہم دیکھ چکے ہیں کہ

$$\left.\begin{aligned} \text{ن}_۱^۲ (\text{ا} + \text{ھ}\,\text{ک}_۱) &= \text{ا} + \text{ھ}\,\text{ک}_۱ ، \\ \text{ن}_۱^۲ (\text{ھ} + \text{ب}\,\text{ک}_۱) &= \text{ھ} + \text{ب}\,\text{ک}_۱ \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (۴)$$

اور $\text{ن}_۲^۲$ پر مشتمل مشابہ جملے ۔ اگر ان میں سے دوسری مساوات کو $\text{ک}_۲$ سے ضرب دیا جائے اور پہلی میں جمع کیا جائے تو

$$\begin{aligned} &\text{ن}_۱^۲ \left\{ \text{ا} + \text{ھ} (\text{ک}_۱ + \text{ک}_۲) + \text{ب}\,\text{ک}_۱\text{ک}_۲ \right\} \\ &= \text{ا} + \text{ھ} (\text{ک}_۱ + \text{ک}_۲) + \text{ب}\,\text{ک}_۱\text{ک}_۲ \quad \ldots\ldots (۵) \end{aligned}$$

اسی طرح

$$ن_1^2 \left\{ ا + ھ\,(ک_1 + ک_2) + ب\,ک_1 ک_2 \right\}$$

$$= ا + ھ\,(ک_1 + ک_2) + ب\,ک_1 ک_2 \qquad \ldots\ldots (۶)$$

تفریق کرنے سے یہ نتیجہ حاصل ہوتا ہے کہ اگر $ن_1^2 \neq ن_2^2$ تو

$$ا + ھ\,(ک_1 + ک_2) + ب\,ک_1 ک_2 = ۰ \qquad \ldots\ldots (۷)$$

اور

$$ا + ھ\,(ک_1 + ک_2) + ب\,ک_1 ک_2 = ۰ \qquad \ldots\ldots (۸)$$

پس اگر

$$ط = ق_1 + ق_2 ، \quad ف = ک_1 ق_1 + ک_2 ق_2 \qquad \ldots\ldots (۹)$$

رکھا جائے تو توانائی بالحرکت اور توانائی بالقوہ کے جملے مختصر شکلیں

$$ت = \tfrac{1}{2}\left(ا_1 \dot{ق}_1^2 + ا_2 \dot{ق}_2^2 \right) \qquad \ldots\ldots (۱۰)$$

$$ق - ق_۰ = \tfrac{1}{2}\left(ا_1 ق_1^2 + ا_2 ق_2^2 \right) \qquad \ldots\ldots (۱۱)$$

(۳۳۰) اختیار کرتے ہیں جہاں

$$ا_1 = ا + ۲ ھ ک_1 + ب ک_1^2 ، \quad ا_2 = ا + ۲ ھ ک_2 + ب ک_2^2 ، \qquad \ldots\ldots (۱۲)$$

اور

$$ا_1 = ا + ۲ ھ ک_1 + ب ک_1^2 ، \quad ا_2 = ا + ۲ ھ ک_2 + ب ک_2^2 \qquad \ldots\ldots (۱۳)$$

وہ رقمیں جن میں $\dot{ق}_1 \dot{ق}_2$ اور $ق_1 ق_2$ شامل ہوتے ہیں رشتوں (۷) اور (۸) کی وجہ سے معدوم ہوتی ہیں۔

نئے محددوں $ق_1$ ، $ق_2$ کو نظام کے "طبعی محدد" کہتے ہیں[۱]۔ ان کی رقوم میں چھوٹی حرکت کی مساواتیں

---

[۱] تحلیلی طور پر طبعی اسلوبوں اور طبعی محددوں کی تحقیق قطروں کے اُس زوج کو معلوم کرنے کے مماثل ہے
(بقیہ برصفحہ ۴۹۸)

$$\text{ا}_1\ddot{\text{ق}}_2+\text{ا}_2\text{ق}_2=0\text{ ، }\text{ا}_1\ddot{\text{ق}}_1+\text{ا}_1\text{ق}_1=0 \quad\text{......(۱۴)}$$

ہیں جو ایک دوسرے کے تابع نہیں ہیں۔ ہر طبعی اسلوب میں صرف ایک محدد متغیر ہوتا ہے اور دو دَور

$$\text{ن}_1^2=\frac{\text{ا}_1}{\text{ا}_1}\text{ ، }\text{ن}_2^2=\frac{\text{ا}_2}{\text{ا}_2} \quad\text{......(۱۵)}$$

سے متعین ہوتے ہیں۔

ہم دیکھ چکے ہیں کہ جب، ن^2 کے دو درجی کی اصلیں منطبق ہوتی ہیں تو مقداریں ک، اور اس لیے طبعی اسلوبوں کی نوعیت، غیر متعین ہوتی ہیں۔ اب دفعہ ۱۰۹ کی تفرقی مساوات کا حل

$$\text{ط}=\text{ج جم}\,(\text{ن ت}+\text{صہ})\text{ ، }\text{فہ}=\text{جَ جم}_1\,(\text{ن ت}+\text{صہَ}) \quad\text{......(۱۶)}$$

ہے جہاں ج، جَ، صہ، صہَ اختیاری ہیں اور

$$\text{ن}^2=\frac{\text{ا}}{\text{ا}}=\frac{\text{ب}}{\text{ب}}=\frac{\text{ھ}}{\text{ھ}} \quad\text{......(۱۷)}$$

اس کی ایک مثال کُروی رقاص سے حاصل ہوتی ہے (دفعہ ۲۹)۔

مثال ۱۔ اگر دو مساوی ذرّے ایک خوب تنی ہوئی ڈوری سے تشاکلاً بندھے ہوئے

(بقیہ حاشیہ صفحہ ۴۹۷) جو مخروطیوں

$$\text{ا لاَ}^2+2\,\text{ھ لا ما}+\text{ب ما}^2=\text{مستقل،}$$

$$\text{ا لاَ}^2+2\,\text{ھ لا ما}+\text{ب ما}^2=\text{مستقل}$$

میں سے ہر ایک کے لحاظ سے مزدوج ہیں اور نیز اُن شکلوں کو حاصل کرنے کے مماثل ہے جو یہ مساواتیں اختیار کرتی ہیں جب کہ اِن کا حوالہ اِن قطروں سے دیا جائے۔ چونکہ ان میں سے پہلا مخروطی ایک ناقص ہے اس لیے مشترکہ مزدوج قطر حقیقی ہیں چنانچہ قائم ظل لینے سے تاکہ ناقص دائرہ ہو جائے یہ امر ظاہر ہے۔

ہوں جیسا کہ شکل ۴۰ صفحہ میں تو وہ کام جو ڈوری کے تین قطعوں کو تناؤ ف کے خلاف اس محل میں جو شکل میں دکھایا گیا ہے وسیع کرنے کے لیے مطلوب ہے تقریباً

$$\text{ق} = \text{ف}\left\{\sqrt{\text{ل}^2+\text{لا}^2}-\text{ل}+\sqrt{4\text{ب}^2+(\text{ما}-\text{لا})^2}-2\text{ب}+\sqrt{\text{ل}^2+\text{ما}^2}-\text{ل}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\text{ف}\left\{\frac{\text{لا}^2}{\text{ل}}+\frac{(\text{لا}-\text{ما})^2}{2\text{ب}}+\frac{\text{ما}^2}{\text{ل}}\right\} \quad \text{(۱۸)} \qquad ۲۳۱(۱$$

ہے۔ چونکہ توانائی بالحرکت

$$\text{ت} = \frac{1}{2}\text{م}\left(\dot{\text{لا}}^2+\dot{\text{ما}}^2\right) \quad \text{(۱۹)}$$

ہے اس لیے دفعہ ۱۰۹ کی مساواتوں (۲) سے مساواتیں

$$\left.\begin{aligned} \text{م}\,\ddot{\text{لا}}+\text{ف}\left(\frac{\text{لا}}{\text{ل}}+\frac{\text{لا}-\text{ما}}{2\text{ب}}\right)&=0، \\ \text{م}\,\ddot{\text{ما}}+\text{ف}\left(\frac{\text{ما}-\text{لا}}{2\text{ب}}+\frac{\text{ما}}{\text{ل}}\right)&=0 \end{aligned}\right\} \quad \text{(۲۰)}$$

حاصل ہوتی ہیں جو دفعہ ۴۴ (۱۳) کے مطابق ہیں۔

محولہ بالا دفعہ کے نتیجوں سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ اس صورت میں طبعی محدد علی الترتیب لا + ما اور لا ۔ ما کے متناسب ہیں۔ پس

$$\text{لا} = \text{ع}+\text{و}،\quad \text{ما} = \text{ع}-\text{و} \quad \text{(۲۱)}$$

لکھنے سے

$$\text{ت} = \text{م}\left(\dot{\text{ع}}^2+\dot{\text{و}}^2\right) \quad \text{(۲۲)}$$

اور

$$\text{ق} = \text{ف}\left\{\frac{\text{ع}^2}{\text{ل}}+\left(\frac{1}{\text{ل}}+\frac{1}{\text{ب}}\right)\text{و}^2\right\} \quad \text{(۲۳)}$$

اِن متغیروں کی رقوم میں لگرانجی مساواتیں

$$\text{م}\,\ddot{\text{ع}}+\frac{\text{ف}}{\text{ل}}\text{ع}=0،\quad \text{م}\,\ddot{\text{و}}+\text{ف}\left(\frac{1}{\text{ل}}+\frac{1}{\text{ب}}\right)\text{و}=0، \quad \text{(۲۴)}$$

ہیں۔ ایک طبعی اسلوب میں ع = ۰ اور دوسرے میں و = ۰۔ اور تعدد ارتعاش وہی ہیں جو

جو دفعہ ۴۴ (۱۷) میں معلوم ہوئے تھے۔

مثال ۲۔ شکل ۳۹ (صفحہ ۱۹۴) کے دُہرے رقاص کی صورت میں جب کہ معرجہ بالا تقریبوں کا لحاظ رکھا جائے حاصل ہوتا ہے۔

$$ تـا = \frac{1}{2}\left\{ (م+مَ) لَ^2 طہ^2 + 2 مَ ل لَ طہ فہ + مَ لَ^2 فہ^2 \right\} \quad \text{.......(۲۵)} $$

$$ ق - قہ = \frac{1}{2}\left\{ (م+مَ) ج ل طہ^2 + مَ ج لَ فہ^2 \right\} \quad \text{.......(۲۶)} $$

تب دفعہ ۱۰۹ کے ضابطوں (۲) سے جب کہ غیر ضروری اجزاءِ ضربی کو خارج کر دیا جائے حاصل ہوتا ہے

$$ \left. \begin{array}{l} (م+مَ) ل \ddot{طہ} + مَ لَ \ddot{فہ} + (م+مَ) ج طہ = ۰، \\ ل \ddot{طہ} + لَ \ddot{فہ} + ج فہ = ۰ \end{array} \right\} \quad \text{.......(۲۷)} $$

اور حل کی تکمیل اسی طرح کی جا سکتی ہے جیسے کہ دفعہ ۴۴ میں۔ یہ مساواتیں فی الحقیقت بحولہ بالا دفعہ کی مساواتوں (۱) کے مماثل ہیں اگر ہم

$$ لا = ل طہ، \quad ما = ل طہ + لَ فہ \quad \text{.......(۲۸)} $$

لکھیں۔

دفعہ ۴۶ کے دُہرے رقاص پر ٹھیک اسی طریقہ سے بحث کی جا سکتی ہے اور نتیجوں کا مقابلہ دفعہ ۶۸ میں حاصل شدہ نتیجوں کے ساتھ کیا جا سکتا ہے۔

۱۱۱۔ قسری اہتزاز

اگر پچھلی ترقیم میں ذرا سی تبدیلی کر کے ہم اُس **بیرونی قوت** کے اجزائے ترکیبی کو طا، فا سے تعبیر کریں جو ایک تحفظی نظام پر عمل کرتی ہے تو لگرانج کی مساواتیں

فر/فرت (جف ت/جف طہ) - جف ت/جف طہ = - جف قہ/جف طہ + طا،
(۱)........
(۳۳۲) فر/فرت (جف ت/جف فہ) - جف ت/جف فہ = - جف قہ/جف فہ + فا

ہو جاتی ہیں۔ توازن کے گرد چھوٹے اہتزازوں کی صورت میں یہ مساواتیں

ا طہ + ھ فہ + ا طہ + ھ فہ = طا،
(۲)........
ھ طہ + ب فہ + ھ طہ + ب فہ = فا

میں تحویل ہوتی ہیں۔ حسب دفعہ ۱۳ اور دفعہ ۶۷ سب سے اہم صورت وہ ہے جس میں خلل انداز قوتیں طا، فا نوعیت میں دَوری ہوں۔ پس یہ فرض کر کے کہ طا اور فا دونوں جم پ ت کے متناسب ہیں ہم یہ معلوم کرتے ہیں کہ مساواتیں (۲) اِس مفروضہ سے پوری ہوتی ہیں کہ طہ، فہ بھی جم پ ت کے متناسب ہیں بشرطیکہ

(پ۲ ا - ا) طہ + (پ۲ ھ - ھ) فہ = - طا،
(۳)........
(پ۲ ھ - ھ) طہ + (پ۲ ب - ب) فہ = - فا

اِن سے طا اور فا کی رقوم میں طہ اور فہ معلوم ہوتے ہیں، چنانچہ

طہ = [(پ۲ ھ - ھ) فا - (پ۲ ب - ب) طا] / Δ (پ۲)
(۴)........
فہ = [(پ۲ ھ - ھ) طا - (پ۲ ا - ا) فا] / Δ (پ۲)

جہاں Δ (پ۲) = | پ۲ ا - ا ، پ۲ ھ - ھ ؛ پ۲ ھ - ھ ، پ۲ ب - ب | ....(۵)

چونکہ بموجب فرض طہ اور فہ دونوں جم پ ت کے متناسب ہیں اس لیے نظام کے

ہر ذرہ کی حرکت دوری ہے اور خلل انداز قوتوں کا دور $\frac{\text{۲}\pi}{\text{پ}}$ ہے، نیز مختلف ذرے ایک دوسرے کے ساتھ قدم ملاتے ہیں ۔ لیکن ان مختلف ذروں کے حیطے خواہ وہ اضافی ہوں یا مطلق دور پر منحصر ہونگے ۔ بالخصوص حیطے بہت بڑے ہو جاتے ہیں جبکہ پ^۲،

$$\Delta(\text{پ}^{\text{۲}}) = \text{۰} \quad \text{......................} \quad (\text{۶})$$

کی ایک اصل کے قریب آتا ہے یعنے جب کہ قسری اہتزاز کا دور تقریباً اُن آزاد دوروں میں سے ایک پر منطبق ہوتا ہے جن کو دفعہ ۱۰۹ (۸) میں معلوم کیا گیا تھا ۔ ایسی صورتوں میں اور نیز ٹھیک انطباق کی صورت میں زیادہ عملی نتیجے حاصل کرنے کے لیے ضایع کرنیوالی قوتوں کا لحاظ رکھنا ہوگا جیسا کہ دفعہ ۹۵ میں ۔

اوپر حاصل شدہ قسری اہتزاز میں دفعہ ۱۰۹ کے آزاد اہتزاز مع اختیاری حیطوں اور ہیئتوں کے جمع کئے جا سکتے ہیں ۔

قسری ارتعاش کی ایک اور اہم قسم ہے جس میں ایک محدد پر اسی نمونہ کی ایک مناسب قوت کے ذریعہ مقررہ تغیر عائد کیا جاتا ہے اور دوسرے نمونہ کی بیرونی قوت غائب ہوتی ہے ۔ چنانچہ حسب ذیل مساواتیں حاصل ہو سکتی ہیں !

$$\text{ا}\ddot{\text{ط}} + \text{ھ}\ddot{\text{فہ}} + \text{ا}\text{ط} + \text{ھ}\text{فہ} = \text{۰}، \quad \text{............} \quad (\text{۷})$$

$$\text{ھ}\ddot{\text{ط}} + \text{ب}\ddot{\text{فہ}} + \text{ھ}\text{ط} + \text{ب}\text{فہ} = \text{۰} \quad \text{............} \quad (\text{۸})$$

جہاں فہ، ت کے ایک تفاعل کے طور پر دیا گیا ہے اور دوسری مساوات سے صرف قوت فا معلوم ہوتی ہے جو فہ کے دیئے ہوئے تغیر کو برقرار رکھنے کے لیے ضروری ہے اس کی مثال ایک مرکب رقاص کے قسری اہتزازوں یا ایک زلزلہ پیما کے قسری اہتزازوں سے (دفعہ ۶۷) جو محور کی ایک مقررہ حرکت کی وجہ سے ہوتے ہیں ملتی ہے ۔

مثلاً اگر

$$\text{فہ} \propto \text{جم پ ت} \quad \text{..................} \quad (\text{۹})$$

تواس مفروضہ پر کہ ط بھی ایسے بدلتا ہے جیسے جم پ ت حاصل ہوتا ہے

$$(پ^2 ا - ا)\,ط + (پ^2 ھ - ھ)\,ف = ۰ \quad \ldots\ldots (10)$$

یا

$$ط = -\frac{پ^2 ھ - ھ}{پ^2 ا - ا}\,ف \quad \ldots\ldots (11)$$

جس سے قسری اہتزاز محدد ط میں حاصل ہوتا ہے۔ یہ مشاہدہ طلب ہے کہ جمود کا سہ ب اس میں داخل نہیں ہوتا۔

مثال ۔ فرض کرو کہ ایک زلزلہ پیما کے محور کا ہٹاؤ اُس کے اوسط محل سے (دفعہ ۶۷) ضا ہے۔ مرکز کمیت کی رفتار کافی تقریب تک $\dot{ضا} + ھ\,\dot{ط}$ ہے جہاں ط زاویٔی محدد ہے۔ اس لیے توانائی بالحرکت کے لیے جملہ جس حد تک مطلوب ہے۔

$$۲\,ت = م\,(ھ^2 + ک^2)\,\dot{ط}^2 + ۲\,م\,ھ\,\dot{ط}\,\dot{ضا} + م\,\dot{ضا}^2 \quad \ldots\ldots (12)$$

ہے۔ توانائی بالقوہ

$$قہ = \frac{1}{2}\,ک\,ط^2 \quad \ldots\ldots (13)$$

ہے جہاں ک کوئی مستقل ہے۔ اس لیے (۷) کے تناظر مساوات

$$م\,(ھ^2 + ک^2)\,\ddot{ط} + م\,ھ\,\ddot{ضا} + ک\,ط = ۰ \quad \ldots\ldots (14)$$

یا

$$\ddot{ط} + ن^2\,ط = -\frac{\ddot{ضا}}{ل} \quad \ldots\ldots (15)$$

اگر

$$ن^2 = \frac{ک}{م\,(ھ^2 + ک^2)}\ ،\quad ل = \frac{ک^2}{ھ} + ھ \quad \ldots\ldots (16)$$

افقی رقاص کی صورت میں (دفعہ ۶۷)

$$ک = م\,ج\,ھ\,جب\,بہ\ ،\quad ن^2 = \frac{ج\,جب\,بہ}{ل} \quad \ldots\ldots (17)$$

مثالیں (۲۲) (۲۲

۱ - طول ۲ا کی ایک چکنی کھلی نلی میں ایک ڈنڈا ہے جو اس میں ٹھیک بیٹھتا ہے اور نلی اور ڈنڈے کی کمیتیں علی الترتیب مر، م ہیں۔ اگر نلی کو اس کے مرکز کے گرد جو ثابت ہے ایک افقی مستوی میں زاویئی رفتار سہ سے گھمایا جائے تو وہ زاویئی رفتار معلوم کرو جبکہ ڈنڈا نلی کو چھوڑ دیتا ہے۔ یہ فرض کیا گیا ہے کہ نلی اور ڈنڈے کے مرکز منطبق ہونے کے سوا سب ہیں۔ نیز ڈنڈے کی مرکز کی رفتار معلوم کرو۔

$$\left[\frac{\text{مر}+\text{م}}{\text{مر}+۱۳\text{م}}\,\text{سہ}\,,\quad \text{سہ}\,\text{ا}\,\frac{\sqrt{۸(\text{مر}+\text{م})(\text{مر}+۷\text{م})}}{\text{مر}+۱۳\text{م}}\right]$$

۲ - دو کمیتیں ایک مرغولی پیچ کے ذریعہ مربوط ہیں۔ جب وہ آزادانہ ایک خط مستقیم میں ارتعاش کرتے ہیں تو دور $\frac{۲\pi}{\text{پ}}$ ہے۔ اگر وہ ایک دوسرے کے گرد مستقل زاویئی رفتار سہ کے ساتھ گردش میں لائے جائیں تو ثابت کرو کہ ایک چھوٹے اہتزاز کا دور

$$\frac{۲\pi}{(\text{پ}^۲+۳\,\text{سہ}^۲)^{\frac{۱}{۲}}}$$

ہے۔

۳ - ایک ذرہ جو نصف قطر ا کی ایک چکنی کروی سطح پر حرکت کر سکتا ہے افقی بڑے دائرہ پر رفتار و سے پھینکا گیا ہے جو $(۲\,\text{ج}\,\text{ا})^{\frac{۱}{۲}}$ کے مقابلہ میں بڑی ہے۔ ثابت کرو کہ اس کا راستہ اس بڑے دائرے اور ایک ایسے متوازی دائرے کے درمیان واقع ہے جس کا مستوی مرکز کے نیچے تقریباً گہرائی $\frac{۲\,\text{ج}\,\text{ا}^۲}{\text{و}^۲}$ پر ہے۔

۴ - ایک ذرہ نیم زاویہ عہ کے ایک چکنے مخروط کی سطح پر حرکت کرتا ہے، مخروط کا محور انتصابی اور راس نیچے وار ہے۔ ثابت کرو کہ وہ نصف قطر ا کا ایک افقی دائرہ زاویئی رفتار سہ کے ساتھ مرتسم کر سکتا ہے بشرطیکہ

$$\text{سہ}^{۲}\,\text{ا} = \text{ج م ع}$$

اگر اس حرکت میں خفیف طور پر خلل ڈالا جائے تو ثابت کرو کہ ایک چھوٹے اہتزاز کا دور

$$\frac{\pi\,۲}{\text{سہ}\;۳^{\frac{1}{۲}}\;\text{جب ع}}$$

ہے۔

۵ - ایک گردشی مکافی نما پر محور سے فاصلہ (ر) اور السمت (ط) کی رقوم میں ایک ذرہ کی حرکت کی کی مساواتیں لگرانج کے طریقہ سے معلوم کرو (دیکھو دفعہ ۱۰۳)۔

۶ - ایک ذرہ ایک چکنی مکافی نلی میں ہے اور نلی محور کے گرد جو انتصابی ہے مستقل زاویٔ رفتار سہ کے ساتھ گردش کرنے کے لیے مجبور ہے، تقعر اوپر وار ہے۔ ثابت کرو کہ اگر $\text{سہ}^{۲} = \frac{\text{ج}}{\text{ل}}$ جہاں ل نیم وتر خاص ہے تو ذرہ کسی محل میں اضافی توازن میں ہوسکتا ہے اور یہ کہ اگر اس کی اِس حالت میں خلل ڈالا جائے تو محور سے فاصلہ ر بالآخر لاانتہا بڑھیگا۔

۷ - کروی قطبی محددوں میں اسراع کے اجزا ترکیبی کے لیے حسب ذیل جملے ثابت کرو:

$$\text{ت} - \text{ر}\dot{\text{ط}}^{۲} - \text{رجب}^{۲}\,\text{ط}\,\text{سا}^{۲}\;،\quad \frac{۱}{\text{ر}}\,\frac{\text{فر}}{\text{فرت}}\left(\text{ر}^{۲}\,\dot{\text{ط}}\right) - \text{رجب ط جم ط سا}^{۲}\;،$$

$$\frac{۱}{\text{رجب ط}}\,\frac{\text{فر}}{\text{فرت}}\left(\text{ر}^{۲}\,\text{جب}^{۲}\,\text{ط سا}\right)$$

(۲۳۵) ۸ - ایک ذرہ نصف قطر ا کی ایک چکنی دائری نلی میں ہے جو ایک انتصابی قطر کے گرد گردش کرنے میں آزاد ہے۔ جب نلی زاویٔ رفتار سہ سے گردش کر رہی ہو تو ذرہ زیر ترین نقطہ سے زاویٔ فاصلہ ع پر اضافی توازن میں ہوتا ہے۔ ثابت کرو کہ اگر اس حالت میں خفیف طور پر خلل ڈالا جائے تو ایک چھوٹے اہتزاز کا دور $\frac{\pi\,۲}{\text{ن}}$ ہے جہاں ن،

$$\frac{\text{ن}^{۲}}{\text{سہ}^{۲}} = \frac{\left\{\text{ع} + \text{م}\,\text{ا}^{۲}\left(۱ + ۲\,\text{جم}^{۲}\,\text{ع}\right)\right\}\text{جب}^{۲}\,\text{ع}}{\text{ع} + \text{م}\,\text{ا}^{۲}\,\text{جب}^{۲}\,\text{ع}}$$

سے حاصل ہوتا ہے جس میں ع' قطر کے گرد نلی کے جمود کے معیار کو تعبیر کرتا ہے۔

$ع = ۰$ اور $ع = \infty$ کی صورتوں کا علی الترتیب امتحان کرو۔

۹۔ ایک ذرّہ ایک چکنی سطح پر حرکت کرتا ہے جو نصف قطر ب کے ایک دائرہ کو ایک انتصابی محور کے گرد جو اس کے مرکز سے فاصلہ ا پر ہے گردش دینے سے حاصل کی گئی ہے۔ ثابت کرو کہ ذرّہ نصف قطر ا + ب جب عہ کا ایک افقی دائرہ متقل زاوئی رفتار سہ کے ساتھ مرتسم کر سکتا ہے بشرطیکہ

$$سہ^2 \, جم \, عہ \left(ا + ب \, جب \, عہ \right) = ج \, ب \, جب \, عہ$$

ثابت کرو کہ اگر اس حرکت میں خفیف طور پر خلل ڈالا جائے تو اُس کے گرد ایک چھوٹے اہتزاز کا دَور $\frac{۲\pi}{ن}$ ہوگا اگر

$$ن^2 = سہ^2 \left(۱ + ۳ \, جم^2 \, عہ + \frac{ا}{ب \, جب \, عہ} \right)$$

۱۰۔ ایک ذرّہ نصف قطر ب کی ایک چکنی دائری نلی میں حرکت کرنے کے لئے آزاد ہے اور نلی ایک انتصابی محور کے گرد جو خود اُس کے مستوی میں اُس کے مرکز سے فاصلہ ا (> ب) پر ہے متقل زاوئی رفتار سہ کے ساتھ گردش کرنے کے لیے مقید ہے۔

ثابت کرو کہ اضافی توازن کے محل کے گرد چھوٹے اہتزاز کا دَور $\frac{۲\pi}{ن}$ ہے اگر

$$ن^2 = سہ^2 \left(جب^2 \, عہ + \frac{ا}{ب \, جب \, عہ} \right)$$

۱۱۔ ثابت کرو کہ آزادی کے دو درجوں والے ایک نظام کی حرکت کی مساواتیں

$$ا \, \ddot{ط} + ھ \, \ddot{ف} + \frac{۱}{۲} \frac{جف \, ا}{جف \, ط} \dot{ط}^2 + \frac{جف \, ا}{جف \, ف} \dot{ط} \dot{ف} + \left(\frac{جف \, ھ}{جف \, ف} - \frac{۱}{۲} \frac{جف \, ب}{جف \, ط} \right) \dot{ف}^2 = طا$$

$$ھ \, \ddot{ط} + ب \, \ddot{ف} + \left(\frac{جف \, ھ}{جف \, ط} - \frac{۱}{۲} \frac{جف \, ا}{جف \, ف} \right) \dot{ط}^2 + \frac{جف \, ب}{جف \, ط} \dot{ط} \dot{ف} + \frac{۱}{۲} \frac{جف \, ب}{جف \, ف} \dot{ف}^2 = فا$$

لکھی جا سکتی ہیں۔

۱۲۔ ثابت کرو کہ دفعہ ۱۰۸ کی ترقیم میں آزادی کے دو درجوں والے ایک نظام کی توانائی بالحرکت، معیار حرکت کے اجزا ترکیبی کی رقوم میں، حسب ذیل مساوات سے حاصل ہوتی ہے

$$۲\,ت = \frac{ب\,لہ^۲ - ۲\,ھ\,لہ\,مہ + ا\,مہ^۲}{ا\,ب - ھ^۲}$$

ثابت کرو کہ اگر ت کو اس شکل میں بیان کیا جائے تو

$$ط^{.} = \frac{جف\,ت}{جف\,لہ}،\quad فہ = \frac{جف\,ت}{جف\,مہ}$$

(۳۳۶) ۱۳۔ ایک یکساں ڈنڈا اب دو ڈوریوں وا، وب کے ذریعہ ایک ثابت نقطہ و سے لٹکتا ہے اور مثلث واب متساوی الاضلاع ہے۔ ثابت کرو کہ اگر ایک ڈوری کو کاٹ دیا جائے تو دوسری ڈوری کا تناؤ فوراً نسبت $\frac{۷}{۱۳}$ میں گھٹ جاتا ہے۔

۱۴۔ چار مساوی ذرّوں کو ڈوریوں سے مربوط کیا گیا ہے جو ایک معین ا ب ج د کے ضلعے بناتی ہیں۔ ثابت کرو کہ یہ نظام خود اپنے مستوی میں مرکز و کے گرد کسی دی ہوئی زاویئی رفتار کے ساتھ شکل کی تبدیلی کے بغیر گردش کر سکتا ہے۔ نیز ثابت کرو کہ اگر حرکت کی اس حالت میں خلل ڈالا جائے تو وتر اج، ب د پھر بھی مستقل زاویئی رفتار سے گردش کرینگے اور معین کے زاویے ایک مستقل شرح سے بدلینگے۔

۱۵۔ اگر پچھلے سوال میں ا اور ج پر کے ذرّوں کی کمیتیں (مر) ب اور د پر کی کمیتوں (م) سے مختلف ہوں تو حرکت کی لگرانج کی مساواتیں، زاویہ ط اور زاویہ فہ کی رقوم میں، حاصل کرو جہاں ط وہ زاویہ ہے جو وا ایک ثابت سمت کے ساتھ بناتا ہے اور فہ وہ زاویہ ہے جو اب، او کے ساتھ بناتا ہے۔ اس امر کی تصدیق کرو کہ ان مساواتوں کے پہلے تکملے

$$(مر\,جم^۲\,فہ + مر\,جب^۲\,فہ)\,ط^{.} = مستقل،$$

$$(مر\,جم^۲\,فہ + م\,جب^۲\,فہ)\,ط^{.۲} + (مر\,جب^۲\,فہ + م\,جم^۲\,فہ)\,فہ^{.۲} = مستقل$$

ہیں۔

۱۶ - چار مساوی ڈنڈے جو چکنے قبضوں سے باہم جُڑے ہوئے ہیں ایک معین ا ب ج د بناتے ہیں جس کو ایک انتصابی مستوی میں ا ب کے وسطی نقطہ پر سہارا گیا ہے - ہر ڈنڈے کا مرکز کمیت اس کے وسطی نقطہ پر ہے' اور اس نقطہ کے گرد گردش کا نصف قطر کہ ہے اور ہر ڈنڈے کا طول ۲ ا ہے - اگر طہ وہ زاویہ ہو جو ا ب یا د ج' افقی کے ساتھ بناتا ہے اور فہ وہ زاویہ ہو جو ا د یا ب ج' انتصابی کے ساتھ بناتا ہے تو ثابت کرو کہ اس نظام کی توانائی بالحرکت جب کہ وہ ایک انتصابی مستوی میں جھول رہا ہو

$$\text{م}\,(\text{ا}^2+\text{کہ}^2)\,\dot{\text{طہ}}^2+\text{م}\,(\text{کہ}^2+۳\,\text{ا}^2)\,\dot{\text{فہ}}^2$$

ہے جہاں م ایک ڈنڈے کی کمیت ہے -

حرکت کی مساواتیں بناؤ اور نتیجوں کی تعبیر بیان کرو -

۱۷ - ایک افقی ڈنڈا ا ب' طول ل کی دو مساوی انتصابی ڈوریوں کے ذریعہ جو اس کے سروں سے بندھی ہوئی ہیں لٹکتا ہے اور ایک مشابہ ڈنڈا ج د' ا ب سے طول لَ کی دو مساوی ڈوریوں اج' ب د کے ذریعہ لٹکتا ہے - اگر یہ نظام اُس انتصابی کے گرد جو مراکزِ ثقل (جو وسطی نقطے ہیں) میں سے گزرتا ہے چھوٹے زاویائی اہتزاز کرے تو ثابت کرو کہ دو طبعی اسلوبوں کے دَور $\frac{۲\pi}{\text{ن}}$ مساوات

$$\text{ن}^4-\frac{۲\,\text{ج}\,\text{ا}^2}{\text{کہ}^2}\left(\frac{1}{\text{ل}}+\frac{1}{\text{لَ}}\right)\text{ن}^2+\frac{۲\,\text{ج}^2\,\text{ا}^4}{\text{کہ}^4\,\text{ل}\,\text{لَ}}=۰$$

سے حاصل ہوتے ہیں جہاں ایک ڈنڈے کا نصف طول ا اور مرکز کے گرد اس کے گردش کا نصف قطر کہ ہے -

۱۸ - ایک مرکب رقاص ایک کھوکھلے متدیر اسطوانہ کے محور سے لٹکتا ہے اور اسطوانہ ایک افقی مستوی پر لڑھکنے میں آزاد ہے - اگر اسطوانہ کا زاویائی محدد فہ اور انتصابی کے ساتھ رقاص کا میلان طہ ہو تو ثابت کرو کہ

$$۲\,\text{ت}=(\text{ع}+\text{م}\,\text{ا}^2)\,\dot{\text{فہ}}^2-۲\,\text{م}\,\text{ا}\,\text{ھ}\,\dot{\text{طہ}}\,\dot{\text{فہ}}\,\text{جم}\,\text{طہ}+\text{م}\,\text{کہ}^2\,\dot{\text{طہ}}^2$$

جہاں اسطوانہ کا نصف قطر ا اور اُس خط کے گرد اُس کا جمود کا معیار ع ہے جس پر

اسطوانہ مستوی کو مس کرتا ہے اور حرفوں مر، ھ، ک کے وہی معمولی معنے ہیں جو مرکب رقاص کے لحاظ سے لیے جاتے ہیں۔

ثابت کرو کہ چھوٹے اہتزازوں کی صورت میں معادل سادہ رقاص کا طول نسبت

$$1 - \frac{\text{مر}\,\text{اَ}^2\,\text{ھ}^2}{(\text{ع} + \text{مر}\,\text{ا}^2)\,\text{ک}^2}$$

میں اُس سے کم ہے اگر اسطوانہ ثابت ہوتا۔

۱۹۔ ایک ذرہ ق بہ طول ل کی ایک ڈوری ف ق سے بندھا ہے۔ نقطہ ف ایک ثابت نقطہ و کے گرد مستقل زاویئی رفتار س کے ساتھ نصف قطر ا کا ایک دائرہ مرتسم کرتا ہے اور پوری حرکت ایک مستوی میں ہے اور جاذبہ کو نظر انداز کیا گیا ہے۔ اگر خ وہ زاویہ ہو جو ف ق، و ف محدودہ سے بناتا ہے تو ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{ف}^2\text{خ}}{\text{فت}^2} + \frac{\text{س}^2\,\text{ا}}{\text{ل}}\ \text{جب خ} = 0$$

۲۰۔ کمیت مر کا ایک ڈنڈا طول ل کی دو مساوی انتصابی ڈوریوں کے ذریعہ افقی محل میں لٹکتا ہے۔ اِس سے مساوی کمیت م کے دو ذرے مختلف نقطوں پر طول لَ کی دو ڈوریوں کے ذریعہ لٹکائے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ ڈنڈے کے توازن کے محل میں سے گزرنے والے انتصابی مستوی میں اہتزاز کے تین طبعی اسلوبوں کے دور $\frac{2\pi}{\text{ن}}$

$$\text{ن}^2 = \frac{\text{ج}}{\text{لَ}}$$

اور

$$\text{ن}^4 - \text{ج}\left(\frac{1}{\text{ل}} + \frac{1}{\text{لَ}}\right)\left(1 + \frac{2\text{م}}{\text{مر}}\right)\text{ن}^2 + \frac{\text{ج}^2}{\text{ل}\,\text{لَ}}\left(1 + \frac{2\text{م}}{\text{مر}}\right) = 0$$

سے حاصل ہوتے ہیں۔

۲۱۔ ایک ترازو کی ڈنڈی کی تین دھاریں ا، و، ب ایک مستوی میں ہیں اور خط و گ جو مرکزی دھار کو مرکز کمیت گ سے ملاتا ہے ا ب پر عمود ہے۔ دو مساوی کمیتوں م کو ا اور ب سے سختی ک کے دو مشابہ مرغولی پیچوں کے ذریعہ لٹکایا گیا ہے۔ یہ دیا گیا ہے کہ و ا = و ب = اُ، و گ = ھ اور ڈنڈی کی کمیت

م ہو اور و کے گرد اس کی گردش کا نصف قطر ک ہو تو ثابت کرو کہ توازن کے گرد
چھوٹے اہتزازوں کی صورت میں

$$2\,\text{ت} = \left(\text{م}\text{ک}^2 + 2\,\text{م}\,\text{و}^2\right)\dot{\text{ط}}^2 + 2\,\text{م}\,\text{و}\left(\dot{\text{لا}} - \dot{\text{ما}}\right)\dot{\text{ط}} + \text{م}\left(\dot{\text{لا}}^2 + \dot{\text{ما}}^2\right)$$

$$2\,\text{قا} = \text{م}\,\text{ج}\,\text{ھ}\,\text{ط}^2 + \text{ک}\left(\text{لا}^2 + \text{ما}^2\right)$$

جہاں افقی کے ساتھ اب کا میلان ط ہے اور اِن دو ڈوریوں کے طول کے اضافے
ان کی توازن کی قیمتوں پر لا، ما ہیں۔

۲۲۔ ثابت کرو کہ پچھلے سوال میں ارتعاش کے تین طبعی اسلوبوں کے دَور $\frac{2\pi}{\text{ن}}$ مساواتوں

$$\text{ن}^2 = \frac{\text{ک}}{\text{م}}$$

اور

$$\text{ن}^4 - \left\{\left(1 + \frac{2\,\text{م}\,\text{و}^2}{\text{م}\text{ک}^2}\right)\frac{\text{ک}}{\text{م}} + \frac{\text{ج}\,\text{ھ}}{\text{ک}^2}\right\}\text{ن}^2 + \frac{\text{ک}}{\text{م}} \times \frac{\text{ج}\,\text{ھ}}{\text{ک}^2} = 0$$

سے حاصل ہوتے ہیں۔

مثالیں (۲۳)

(متفرق)

۱۔ ایک ہوائی جہاز سیدھے افقی راستہ پر حرکت کر رہا ہے۔ اس کے انجنوں کو بند کر دیا گیا اور بعد میں مختلف لمحوں پر رفتار کے مشاہدے کیے گیے رفتار کے متکافی کو معین اور وقت کو فصلہ قرار دے کر مشاہدوں کی ترسیم معلوم کی گئی تو معلوم ہوا کہ متناظر نقطے ایک خط مستقیم پر واقع ہیں۔ مزاحمت کا قانون معلوم کرو۔

ترسیم کی شکل کیا ہوتی اگر مزاحمت رفتار کے مکعب کے متناسب ہوتی۔

۲۔ ایک ہوائی جہاز جس کی چال ۸۰ میل فی گھنٹہ ہے ایک طیران گاہ تک جو ۸۰ میل دور ہے ایسی سمت میں جو شمال کے مشرق ۶۰° کا زاویہ بناتی ہے اڑتا ہے اور واپس ہوتا ہے۔ ۲۰ میل فی گھنٹہ کی شمالی ہوا ہے۔ ثابت کرو کہ جانے اور آنے کے اوقات علی الترتیب ۵٫۰۷ منٹ اور ۵٫۴۶ منٹ ہیں۔

۳۔ ایک ہوائی جہاز کی چال و میل فی گھنٹہ اور عمل کی سعت (جانے اور واپس ہونے میں) پرسکون موسم میں س میل ہے۔ ثابت کرو کہ ط میل فی گھنٹہ کی شمالی ہوا میں اس کی سعت ایسی سمت میں جس کا اصلی رخشہ (Bearing) ف ہے۔

$$\frac{س\,(و^2 - ط^2)}{و\sqrt{و^2 - ط^2\,جب^2\,ف}}$$

ہے۔

۴۔ ایک ہوائی جہاز کا مرکز ثقل رفتار و سے ایک ایسی سمت میں حرکت کر رہا ہے جو سامنے اور پچھلے حصہ کو ملانے والے خط کے ساتھ زاویہ ط بناتی ہے۔ ثابت کرو کہ مرکز ثقل سے فاصلہ لا پر مقامی انحراف (طَ)

$$\text{مس } طَ = \text{مس } ط + \frac{\text{سہ لا}}{\text{و}} \text{ قط } ط$$

سے حاصل ہوتا ہے۔

۵ - ایک نقطہ ایک مساوی الزاویہ لولب کو قطب کے گرد متقل زاویٔی رفتار سے مرتسم کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ رسم الطریق ایک مشابہ لولب ہے۔

۶ - ایک نقطہ ف متقل زاویٔی رفتار ع سے ایک خط مستقیم مرتسم کرتا ہے اور دوسرا نقطہ ق اس طرح حرکت کرتا ہے کہ اس کی (متقل) رفتار و ہمیشہ ق ف کے علی القوائم رہتی ہے۔ ثابت کرو کہ ف کے لحاظ سے ق کا راستہ خروج المرکز $\frac{ع}{و}$ کا ایک مخروطی ہے۔

۷ - ایک نقطہ کی حرکت، زاویٔی رفتار سہ کے ساتھ گردش کرنے والے محوروں کے لحاظ سے، مبدا و کے گرد ناقصی موسیقی ہے اور دور $\frac{۲\pi}{\text{سہ}}$ ہے۔ ثابت کرو کہ و میں سے گزرنے والے ثابت محوروں کے حوالے سے نقطہ کا راستہ ایک بر تدویری ہے۔

۸ - ایک منحنی ایک خط مستقیم پر زاویٔی رفتار سہ سے لڑھکتا ہے۔ ثابت کرو کہ منحنی کے اُس نقطہ کا اسراع جو خط کے ساتھ تماس میں ہے خط پر عمود ہے اور $\text{سہ}^۲$ عہ کے مساوی ہے۔

اگر ایک منحنی دوسرے ثابت منحنی پر لڑھک رہا ہو تو متناظر نتیجے کیا ہونگے۔

۹ - ایک پترا خود اپنے مستوی میں حرکت کرتا ہے اور اس کی زاویٔی رفتار کسی لمحہ پر سہ ہے۔ ثابت کرو کہ دو قطب منحنیوں (سکونیات دفعہ ۱۶) کے نقطہ تماس ا سے فاصلہ ر پر پترے کے نقطہ ف کے اسراع کے اجزائے ترکیبی، ف کے راستہ کے مماس اور عماد کی سمتوں میں، (۳۳

$$\text{ر} \frac{\text{فر سہ}}{\text{فر ت}} + \frac{\text{سہ}^۲}{\text{ج} + \text{جَ}} \text{ جب } ط \text{، اور } \text{سہ}^۲ \text{ ر} - \frac{\text{سہ}^۲}{\text{ج} + \text{جَ}} \text{ جم } ط$$

ہیں جہاں اِن دو قطب منحنیوں کے انحنا نقطہ ا پر ج اور جَ ہیں اور ط وہ زاویہ ہے جو ا ف، ا پر کے مشترک عماد کے ساتھ بناتا ہے۔ ف کے راستہ کا انحنا اخذ کرو۔

۱۰ ـ متعدد مساوی ذرّے م ایک منتظم کثیر الاضلاع کے راسوں پر ہیں اور کثیر الاضلاع کے ضلع طول ب کی ڈوریوں سے بنے ہوئے ہیں۔ ثابت کرو کہ اگر کثیر الاضلاع مرکز کے گرد خود اپنے مستوی میں گردش کرے تو ہر ڈوری کا تناؤ $\frac{م و^{2}}{ب}$ ہے جہاں ہر ذرّہ کی رفتار و ہے۔ اس سے گردش کرنے والی دائری زنجیر میں تناؤ کے لیے ضابطہ اخذ کرو۔

۱۱ ـ ایک ذرّہ دو قوتوں کے تحت ہے جن میں سے ایک مقدار اور سمت میں مستقل ہے اور دوسری راستہ کے عمودوار ہے اور رفتار کے متناسب ہے۔ ثابت کرو کہ راستہ ایک استداری خط ہے۔

۱۲ ـ طول ل کے ایک رقّاص کے لٹکاؤ کا نقطہ ایک چھوٹے فاصلہ $\frac{ک}{م}$ میں سے اپنی جگہ افقاً چھوڑتا ہے جہاں ک اس پر افقی کھینچ ہے۔ ثابت کرو کہ مماثل سادہ رقّاص کا طول بقدر $\frac{م'ج}{م}$ کے بڑھ جاتا ہے جہاں م' لنگر کی کمیت ہے۔

۱۳ ـ طول ل کے ایک سادہ رقّاص کا لنگر مکمل گردشیں کرتا ہے اور لٹکاؤ کے نقطہ کی ہمواری پر رفتار و ہے جو $\sqrt{ج ل}$ کے مقابلہ میں بڑی ہے۔ ثابت کرو کہ دائرہ کے بالائی اور زیرین نصف حصوں کو مرتسم کرنے کے اوقات تقریباً

$$\frac{\pi ل}{و}\left(1 \pm \frac{2 ج ل}{\pi و^{2}}\right)$$

ہیں۔

۱۴ ـ طول ل کے دو مماثل رقّاص ایک انتصابی مستوی میں جھولتے ہیں اور وہ ایک استوار ڈنڈے کے دو نقطوں سے لٹکے ہوئے ہیں لیکن ڈنڈا استوار طریقہ پر ثابت نہیں ہے بلکہ رقّاصوں کی کھینچ سے بقدر مقدار ب ل (ط + ف) کے افقاً ہٹتا ہے جہاں انتصابی کے ساتھ میلان (ایک ہی جہت میں پیمائش شدہ) ط اور ف ہیں اور ب چھوٹا ہے۔ حرکت کی مساواتیں بناؤ اور ان کو حل کرو اور مستقلوں کو ان شرطوں کے ساتھ معلوم کرو کہ ابتداءً ایک لنگر اپنے اوسط محل میں ساکن ہے اور دوسرا اپنے اوسط محل سے ایک دی ہوئی چھوٹی رفتار سے ہلایا گیا ہے۔

ثابت کرو کہ یہ رقاص اپنے اوسط محلوں میں تقریباً $\frac{۱}{۲\text{ب}}$ کے وقفوں سے متبادلاً تقریباً ساکن ہونگے۔

۱۵ـ دو ذرّے $\text{م}_۱$ اور $\text{م}_۲$ رفتاروں $\text{و}_۱$ اور $\text{و}_۲$ کے ساتھ ایسی سمتوں میں حرکت کر رہے ہیں جو ایک دوسرے سے زاویہ عہ بناتی ہیں۔ یہ ذرّے ٹکرا کر مل جاتے ہیں۔ ثابت کرو کہ ان کی رفتار مابعد

$$\frac{\sqrt{\text{م}_۱^۲\,\text{و}_۱^۲ + ۲\,\text{م}_۱\,\text{م}_۲\,\text{و}_۱\,\text{و}_۲\,\text{جم}\,\text{عہ} + \text{م}_۲^۲\,\text{و}_۲^۲}}{\text{م}_۱ + \text{م}_۲}$$

ہے اور توانائی کا نقصان

$$\frac{\text{م}_۱\,\text{م}_۲}{۲(\text{م}_۱+\text{م}_۲)}\left(\text{و}_۱^۲ - ۲\,\text{و}_۱\,\text{و}_۲\,\text{جم}\,\text{عہ} + \text{و}_۲^۲\right)$$

ہے۔

(۳۴۰) ۱۶ـ ایک استوار جسم ایک افقی محور سے لٹکتا ہے۔ ثابت کرو کہ اس محور کے گرد گردش کا نصف قطر محسوب کیا جا سکتا ہے اگر ہمیں ایک چھوٹے اہتزاز کا دَور اور نیز وہ انحراف معلوم ہو جو ایک ایسی چھوٹی قوت سے پیدا ہوتا ہے جو محور کے نیچے ایک افقی خط میں جو محور کے علی القوائم ہے عمل کرتی ہے۔

نتیجہ کو عددی طور پر محسوب کرو اگر یہ دیا گیا ہو کہ دَور ۱٫۵۶۶ ثانیے اور قوت رقاص کے وزن کا سواں حصہ ہے جو محور سے ۳ فٹ نیچے عمل کر کے نقطہ عمل کو ایک انچ کے ۰٫۰۲ حصہ میں سے ہٹاتی ہے۔ [۵٫۴۸ فٹ]

۱۷ـ ایک اسطوانہ ایک مستوی کے نیچے لڑھکتا ہے جس کا میلان افقی کے ساتھ عہ ہے۔ اسطوانہ کا طول خطوط میلان اعظم کے ساتھ زاویہ عہ بناتا ہے۔ ثابت کرو کہ اس کے مرکز کا اسراع

$$\frac{\text{ا}^۲}{\text{ا}^۲ + \text{ک}^۲}\ \text{ج جب عہ جب ہ}$$

ہے جہاں ا نصف قطر ہے اور محور کے گرد گردش کا نصف قطر ک ہے۔

۱۸۔ ایک استوار جسم جو اپنے مرکز کمیت گ میں سے گزرنے والے ایک مستوی کے لحاظ سے
متشاکل ہے اِس مستوی میں یکساں رفتار انتقال سے حرکت کر رہا ہے۔ اگر اِس مستوی میں ایک
نقطہ ف کو اچانک ثابت کر دیا جائے جہاں گ ف حرکت کی سمت پر عمود ہے تو ثابت
کرو کہ ابتدائی توانائی کا $\frac{ک^2}{ک'^2}$ حصہ ضائع ہو جاتا ہے جہاں ک اور ک' ایسے محوروں کے گرد
گردشی نصف قطر ہیں جو علی الترتیب گ اور ف میں سے گزرتے ہیں اور تشاکل کے
مستوی پر عمود ہیں۔

۱۹۔ دو مساوی ڈنڈے اب، ب ج ایک خط مستقیم میں ہیں اور ب پر قبضے سے
باہم جوڑے گئے ہیں۔ وہ اپنے طول کے علی القوائم حرکت کر رہے ہیں کہ اچانک سرے ا کو
ثابت کر دیا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ ابتدائی زاویٔی رفتاروں میں نسبت ۳ : ۱ ہے۔

۲۰۔ تین مساوی یکساں ڈنڈے اب، ب ج، ج د جن کو ب اور ج
پر قبضوں سے جوڑا گیا ہے ایک خط مستقیم میں ساکن ہیں۔ ثابت کرو کہ اگر ڈنڈے اب
کے کسی نقطہ ف پر ضرب پڑے تو ب پر کا دھکا ج پر کے تعامل کا چار گنا
ہے۔

نیز ثابت کرو کہ اب ابتداءً نہیں گردش کریگا اگر

اف : فب = ۱۱ : ۷

۲۱۔ نصف قطر ا کا ایک کروی ظرف ابتداءً ساکن ہے اور ایک ثابت محور کے گرد گردش
کرنے میں آزاد ہے۔ اس کو مائع سے بھر دیا گیا ہے جو اس قطر کے گرد زاویٔی رفتار سہ (ر) سے
گردش کر رہا ہے جہاں سہ (ر)، مرکز سے فاصلہ کا تفاعل ہے۔ ثابت کرو کہ جب تمام
اضافی حرکت رگڑ سے برباد ہو چکتی ہے تو ظرف کی زاویٔی رفتار

$$\frac{(هر+م)\ ع\ سہ}{(هر+م)\ ع + هرم\ ا^2}$$

جہاں کل کمیت کا مجموعہ کا معیار ع اور سیال کی کثافت ہر ہے۔

۲۲۔ کمیت ھر اور طول ۲ ا کی ایک نلی ایک چکنے میز پر پڑی ہے اور اس میں
ایک ذرہ م، مرکز سے قریب ہے جو خود ذرہ کا مرکز کمیت بھی ہے۔ ابتداءً نلی کو گردش سہ سے

متحرک کیا گیا ہے ۔ ثابت کرو کہ جب ذرہ نلی کو چھوڑتا ہے تو زاوئی رفتار

$$\frac{۸}{۳}\,\frac{\pi\, غہ}{ع}\int_{ب}^{ا}(ر-ب)\,ر^{۳}\,در$$

ہے جہاں نلی کا جمود کا معیار اس کے مرکز کے گرد ع ہے ۔

۲۳ ۔ کمیت م کا ایک شخص ایک افقی پتّرے پر جو ایک ثابت نقطہ و کے گرد گردش کرنے میں آزاد ہے نقطہ ا پر کھڑا ہے ۔ ابتدا دونوں ساکن ہیں ۔ تب آدمی اس دائرہ پر جس کا قطر و ا (= ا) ہے چلتا ہے اور پھر اپنے ابتدائی نقطہ پر واپس آتا ہے ۔ ثابت کرو کہ پترا زاویہ

$$\pi\left\{۱-\left(\frac{ع}{ع+م\,ا^{۲}}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}$$

میں سے گھوم چکا ہوگا جہاں پترے کا جمود کا معیار و کے گرد ع ہے ۔

۲۴ ۔ ایک ٹھوس گولا ایک ثابت قطر کے گرد زاوئی رفتار سہ سے گردش کر رہا ہے ۔ ایک آدمی جس کی کمیت م ہے کسی ایک قطب سے چلتا ہے اور ایک نصف النہار پر مستقل رفتار و سے سفر کرتا ہے ۔ ثابت کرو کہ جب وہ مقابل کے قطب پر پہنچتا ہے گولے کی گردشش میں زاویہ

$$\frac{\pi\, سہ\, ا}{و}\left\{۱-\left(\frac{ع}{ع+م\,ا^{۲}}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}$$

کا ابطاء واقع ہو چکا ہوگا جہاں گولے کا جمود کا معیار ع اور اس کا نصف قطر ا ہے ۔

۲۵ ۔ نصف قطر ا اور کثافت غہ کے دو کرے تماس میں ہیں ۔ ثابت کرو کہ ان کے درمیان دباؤ جو ان کے باہمی تجاذب کی وجہ سے ہے کمیت

$$\frac{۱}{۳}\,\frac{\pi\, غہ^{۲}\, ا^{۴}}{غہ\, ر}$$

پر زمین کی کشش کے مساوی ہے جہاں زمین کا نصف قطر ر اور اس کی اوسط کثافت غہ ہے ۔

غہ = ۸، غبہ = ۶،۵، سا = ۶،۲۸ × ۱۰^۸ فرض کرکے نصف قطر ا معلوم کرو تاکہ دباؤ ایک کلوگرام ہو۔ [۲،۴۸ میٹر]

۲۶۔ ثابت کرو کہ ماسکہ کے گرد ایک مکافی مدار میں اوج سے زاویہ طہ مرتسم کرنے کا وقت

$$\frac{\text{ل}^{\frac{۳}{۲}}}{۲\,\text{مہ}^{\frac{۱}{۲}}}\left(\text{مس}\,\tfrac{۱}{۲}\,\text{طہ} + \tfrac{۱}{۳}\,\text{مس}^{۳}\,\tfrac{۱}{۲}\,\text{طہ}\right)$$

ہے۔

۲۷۔ ایک ذرہ مرکزی اسراع $\frac{\text{مہ}}{\text{ر}^{۲}}$ کے تحت ہے اور اس کو ایک بڑے فاصلہ سے رفتار و کے ساتھ اس طرح پھینکا گیا ہے کہ اگر کوئی کشش نہ ہوتی تو وہ قوت کے مرکز سے فاصلہ ب پر سے گزر جاتا۔ ثابت کرو کہ اس کی حرکت کی سمت بالآخر زاویہ π ـ ۲ عہ میں سے گھومیگی جہاں

$$\text{عہ} = \text{مس}^{-۱}\,\frac{\text{و}^{۲}\,\text{ب}}{\text{مہ}}$$

۲۸۔ تین ذرے $\text{م}_۱$، $\text{م}_۲$، $\text{م}_۳$ ایک متساوی الاضلاع مثلث کے کونوں پر ہیں اور ایک دوسرے کو معکوس مربع کے قانون کی بموجب جذب کرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ وہ اپنے مشترک مرکز کمیت کے گرد زاویئی رفتار

$$\left\{\frac{\text{جہ}\,(\text{م}_۱ + \text{م}_۲ + \text{م}_۳)}{\text{ا}^{۳}}\right\}^{\frac{۱}{۲}}$$

کے ساتھ دائری مدار مرتسم کرسکتے ہیں جہاں اُ مثلث کا ضلع ہے۔ [لاپلاس]

۲۹۔ ایک سیارہ نر اور سورج س اپنے مشترک مرکز کمیت گ کے گرد (۳۴۲)
زاویئی رفتار سہ سے دائرے مرتسم کررہے ہیں اور ف ایک تابع ہے جس کا تعامل س اور نر پر نظرانداز کیا جاسکتا ہے۔ اگر اُن محوروں کے لحاظ سے جہاں مبداء

مس ہے اور محور لا ہمیشہ گ میں سے گزرتا ہے۔ ف کے محدد لا، ا ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\ddot{\text{لا}} - 2\text{ن}\dot{\text{ا}} = \frac{\text{جب طا}}{\text{جب لا}},\quad \ddot{\text{ا}} + 2\text{ن}\dot{\text{لا}} = \frac{\text{جب طا}}{\text{جب ا}}$$

جہاں
$$\text{طا} = \frac{\text{مس}}{\text{ر}} + \frac{\text{نم}}{\text{فہ}} + \frac{1}{2}\text{ن}^2\,\frac{\text{مس ر}^2 + \text{نم فہ}^2}{\text{مس} + \text{نم}}$$

اور
$$\text{ر} = \text{مس ف},\quad \text{فہ} = \text{نم ف}$$

۳۰۔ متعدد ذرّوں کو ایک ہی نقطہ سے مرکزی اسراع مہ × (فاصلہ) کے تحت مختلف سمتوں میں ایک ساتھ پھینکا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ وقت $\frac{1}{2}\pi \backslash \sqrt{\text{مہ}}$ کے بعد ان کی رفتاریں متوازی اور مساوی ہونگی۔

۳۱۔ ثابت کرو کہ دفعہ ۸۶ مثال ۴ میں میز پر ذرہ کا راستہ دو ثابت دائروں کے درمیان واقع ہے اِلّا آنکہ زاویئی معیار حرکت صفر ہو۔

۳۲۔ دو ذرّوں م_1، م_2 کو طول $\text{ل}_1 + \text{ل}_2$ کی ایک ڈوری سے جو ایک چکنے افقی میز پر ایک چکنے حلقے میں سے گزرتی ہے مربوط کیا گیا ہے۔ یہ ذرّے علی الترتیب نصف قطر ل_1، ل_2 کے دائرے زاویئی رفتاروں س_1، س_2 کے ساتھ مرتسم کر رہے ہیں۔ ثابت کرو کہ

$$\text{م}_1\text{س}_1^2\text{ل}_1 = \text{م}_2\text{س}_2^2\text{ل}_2$$

اور یہ کہ اس حالت کے گرد ایک چھوٹے اہتزاز کا وقفہ

$$2\pi\left\{\frac{\text{م}_1 + \text{م}_2}{3(\text{م}_1\text{س}_1^2 + \text{م}_2\text{س}_2^2)}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

ہے۔

۳۳۔ اگر ایک ذرّہ مرکزی اسراع

$$\frac{\text{مہ}}{\text{ر}^2} \text{ و } \frac{\text{کہ}}{\text{ر}^3}$$

کے تحت ہو تو دائری مدار قائم ہوگا صرف اگر اس کا نصف قطر ک سے بڑا ہو۔

۳۴۔ ثابت کرو کہ ایک مرکزی قوت کی صورت میں جو فاصلہ کے مکعب کے بالعکس متناسب ہو

$$\text{ر}^2 = \text{ا}\,\text{ت}^2 + \text{ب}\,\text{ت} + \text{ج}$$

جہاں ا، ب، ج مستقل ہیں۔

۳۵۔ ایک ذرہ کو جو ایک دفاعی قوت کے تحت ہے جو $\frac{1}{\text{ر}^3}$ کے متناسب ہے لاتناہی سے ایک ایسی رفتار کے ساتھ پھینکا گیا ہے جو اس کو قوت کے مرکز سے فاصلہ ا تک لے جاتی اگر اس مرکز کی جانب اُس کی سمت ہوتی۔ لیکن فی الواقع اس کو ایک ایسے خط پر پھینکا گیا ہے جس کا فاصلہ قوت کے مرکز سے ب ہے۔ ثابت کرو کہ اُس کا قوت کے مرکز سے کم سے کم فاصلہ $\sqrt{\text{ا}^2 + \text{ب}^2}$ ہوگا اور یہ کہ اس کے راستہ کے متقاربوں کے درمیان زاویہ $\frac{\pi\,\text{ب}}{\sqrt{\text{ا}^2 + \text{ب}^2}}$ ہوگا۔

۳۶۔ ایک ذرہ کو جو ایک دفاعی قوت کے تحت ہے جو $\frac{1}{\text{ر}^5}$ کے مناسب ہے لاتناہی سے ایک ایسی رفتار و کے ساتھ پھینکا گیا ہے کہ وہ اُس کو قوت کے مرکز سے فاصلہ ا تک لے جاتی اگر اِس مرکز کی جانب اس کی سمت ہوتی۔ فی الواقع اُس کو (۳۴۳)
اس طرح پھینکا گیا ہے کہ وہ قوت کے مرکز سے فاصلہ ب پر سے گزرتا اگر دفاعی قوت نہ ہوتی۔ ثابت کرو کہ ذرہ کی کم سے کم رفتار

$$\text{و}\,\frac{\text{ب}^2}{\text{ا}^2}\left\{\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{4} + \frac{\text{ا}^4}{\text{ب}^4}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

ہے۔

۳۷۔ اگر ایک ٹرین کا ابطاء $\text{ا} + \text{ب}\,\text{و}^2$ ہو تو ثابت کرو کہ اگر انجنوں کو بند کر دیا جائے جب کہ چال و ہے تو ٹرین وقت

$$\frac{1}{\sqrt{\text{ا}\,\text{ب}}}\ \text{مس}^{-1}\left(\sqrt{\frac{\text{ب}}{\text{ا}}} \times \text{و}\right)$$

میں فاصلہ

$$\frac{1}{2\text{ب}}\ \text{لوک}\left(1+\frac{\text{ب}\,\text{و}^2}{\text{ج}}\right)$$

طے کرنے کے بعد ساکن ہو گی ۔

۳۸ ۔ ثابت کرو کہ بطاء ک و² کے تحت ایک ذرہ کے راستہ کی ذاتی مساوات

$$\text{و}^{2\text{ک}\,\text{س}} = 1 + \text{ک}\,\text{غہ}\left\{\text{قط سا مس سا} + \text{لوک}\left(\text{قط سا} + \text{مس سا}\right)\right\}$$

ہے جہاں بلند ترین نقطہ سے آگے پیمائش شدہ قوس س، اس نقطہ پر نصف قطر انحناء غہ، اور افقی کے نیچے راستہ کا میلان سا ہے ۔

ثابت کرو کہ س کی چھوٹی قیمتوں کے لیے

$$\text{سا} = \frac{\text{س} + \text{ک}\,\text{س}^2}{\text{غہ}} \ .$$

۳۹ ۔ ایک دائری نلی محیط پر کے ایک نقطہ و کے گرد زاویٔی رفتار سہ سے خود اپنے مستوی میں گردش کرتی ہے ۔ ثابت کرو کہ اس میں ایک ذرہ کی اضافی حرکت مساوات

$$\frac{\text{فر}^2\text{طہ}}{\text{فرت}^2} + \text{سہ}^2\ \text{جب طہ} = 0$$

کے تحت ہے جہاں طہ، نلی کے اس نقطہ سے زاویٔی فاصلہ ہے جو و کے مقابل ہے ۔

۴۰ ۔ ایک استوار نلی ایک مستوی منحنی کی شکل کی ہے اور اپنے مستوی میں ایک نقطہ و کے گرد مستقل زاویٔی رفتار سہ سے گردش کرتی ہے ۔ ثابت کرو کہ نلی کے ایک نقطہ ف کے گرد جس کا فاصلہ و سے مقیم ہے ایک ذرہ کے چھوٹے (اضافی) اہتزاز مساوات

$$\frac{\text{فر}^2\text{س}}{\text{فرت}^2} + \text{سہ}^2\left(\frac{\text{ر}}{\text{غہ}} - 1\right)\text{س} = 0$$

سے متعین ہوتے ہیں جہاں ر = و ف، اور ف پر نصف قطر انحناء غہ ہے ۔

اس سے ثابت کرو کہ ذرہ کا توازن جب کہ وہ ف پر ہو قایم یا غیر قائم ہوگا بموجب اس کے کہ ف، و سے اعظم یا اقل فاصلہ کا نقطہ ہو۔

۴۱۔ ایک ذرہ نصف قطر ا کی ایک چکنی کُروی سطح پر حرکت کرنے کے لیے مقید ہے۔ ثابت کرو کہ اگر اُس کو افقی بڑے دائرہ پر رفتار و سے پھینکا جائے تو وہ انتصابی ارتفاع ا ہنڈ ۶ میں سے گریگا جہاں ۶، مساوات

$$\text{جبنز}\,\theta = \frac{\text{و}^{2}}{\text{۴ج ا}}$$

سے متعین ہوتا ہے۔

ثابت کرو کہ اگر و^۲، ۴ج ا کے مقابلہ میں بڑا ہو تو نتیجہ تقریباً

$$\frac{\text{۲ج ا}^{2}}{\text{و}^{2}}$$

ہے۔

۴۲۔ ایک افقی ڈنڈا ا ب اپنے وسطی نقطہ و کے گرد مستقل زاوئی رفتار سہ سے گردش کرتا ہے۔ ایک ذرہ ف کو مساوی ڈوریوں ا ف، ب ف کے ذریعہ اُس سے باندھا گیا ہے۔ اگر مستوی ا ف ب کا میلان انتصابی کے ساتھ طہ ہو تو ثابت کرو کہ (۳۴۴)

$$\frac{\text{فر}^{2}\,\text{طہ}}{\text{فرت}^{2}} - \text{سہ}^{2}\,\text{جب طہ جم طہ} = -\frac{\text{ج}}{\text{ل}}\,\text{جب طہ}$$

جہاں ل = و ف۔ وہ شرط معلوم کرو کہ و ف کا انتصابی محل قائم ہو سکے۔

۴۳۔ اگر ذرّوں م۱، م۲، م۳ ...... کا ایک نظام ایسی قوتوں سے ایک دوسرے کو جذب کرے جو فاصلہ کی ن ویں قوت کے متناسب ہیں اور نظام کے مرکز کمیت سے ان کے فاصلے ر۱، ر۲، ر۳ ..... سے تعبیر ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{فر}^{2}}{\text{فرت}^{2}}\left(\sum \text{م ر}^{2}\right) = -(\text{۲ن} + \text{۶})\,\text{قہ} + \text{مستقل}$$

جہاں ق نظام کی توانائی بالقوہ ہے ۔

ثابت کرو کہ اگر ن = -۲ تو قائم تشکیل ناممکن ہے ۔

ضمیمہ

حرکیاتی اصولوں پر نوٹ

اگرچہ وہ دن گزرے ایک زمانہ ہوا جبکہ کسی حرکیاتی سوال کے مخصوص حل کے صحیح یا غلط ہونے کے متعلق سخت اختلاف رائے ہوا کرتا تھا تاہم حرکیات کے اصولوں کو ٹھیک طور پر منضبط کرنے میں بہت کچھ نزاع ہے بالخصوص اس زمانہ میں۔

اس طالب علم کے لیے جس نے اس مضمون کو ابھی شروع کیا ہے سب سے اہم چیز یہ ہے کہ وہ قاعدوں کے ایک سلسلہ کو جلد سے جلد ذہن نشیں کرے تاکہ وہ ان کو کسی حرکیاتی سوال پر جس سے اس کو دلچسپی ہے بلا پس و پیش استعمال کر سکے اور یہاں تک کہ ریاضیاتی قابلیت اس کو اجازت دے کامیابی کے ساتھ استعمال کرے۔ اس نقطہ نظر سے اس مضمون کی تشریح میں یہ جائز ہے کہ ان معلومات سے جو پہلے سے حاصل ہوں اور جو کام میں آسکیں استفادہ کیا جائے لیکن ساتھ ہی ان سے پرہیز کیا جائے جن سے غلط راستہ پر پڑنے کا امکان ہو۔ یہی طریقہ اس کتاب میں اختیار کرنے کی کوشش کی گئی ہے جیسا کہ اس مضمون کی اکثر ابتدائی کتابوں میں کیا جاتا ہے۔

لیکن اگر طالب علم آئندہ چل کر کسی منزل پر اپنے معلومات کا جائزہ لے اور ان بنیادی اصولوں کو زیادہ تفصیل کے ساتھ تحلیل کرنے لگے جو اس کے سامنے پیش کیے گئے تھے تو وہ اس سے آگاہ ہو سکتا ہے کہ باقاعدہ اور نیز منطق کے نقطہ نگاہ سے

ان اصولوں کے متعلق کچھ بے اطمینانی سی ہے۔ مثلاً تجربہ کے نتیجہ کے طور پر یہ دعویٰ کیا گیا ہے کہ کسی جسم کی رفتار جس پر کوئی قوت عمل نہیں کرتی مقدار اور سمت میں مستقل رہتی ہے حالانکہ یہ معلوم کرنے کا کہ کوئی جسم کسی قوت کے تحت ہے یا نہیں، صرف یہ ذریعہ ہے کہ یہ مشاہدہ کیا جائے کہ آیا رفتار مستقل ہے یا نہیں نیز رفتار سے ہماری مراد کسی حوالے کے فریم کے لحاظ سے رفتار ہے لیکن یہ فریم کیا اور کہاں ہے ٹھیک طور پر متعین نہیں کیا گیا۔

(۳۴۹) اگر طالب علم کا ذہنی ارتقاء فطری طریقہ پر ہوا ہے تو وہ ممکن ہے چند ناکام کوششوں کے بعد اس نتیجہ پر پہنچے کہ وہ اصول جن کو وہ فی الواقع استعمال کر رہا ہے اصل میں درست ہونے چاہییں کیونکہ اُن سے بلا استثناء صحیح نتیجے حاصل ہوتے ہیں اگرچہ کہ اُن کو کسی وجہ سے درسی کتابوں میں ٹھیک طور پر منضبط نہیں کیا جا سکا اگر وہ اِس قیاس پر یہ سمجھ کر مطمئن ہو جائے کہ اصولوں کی شکل اور اِن کا اظہار صرف ثانوی اہمیت رکھتے ہیں تو شاید اُس کو اِس تصور سے اطمینان حاصل ہو کہ اُس کی زیادہ تر وہی حالت ہے جو بڑے بڑے علماء سائنس نیوٹن، یولر، ڈلمبرٹ، لگرانج، میاکسویل، تھامسن اور ٹیٹ (یہاں صرف چند نام پیش کیے گئے ہیں) کی تھی جن کے بیانات، اگر وہ ابتدائی امور کو نظر انداز نہ کریں، سب کے سب کم و بیش اُسی تنقید کے تحت آتے ہیں جس کا ذکر اوپر کیا جا چکا ہے۔

لیکن وہ طالب علم جس کی دلچسپی صرف اِن اصولوں کے اطلاقات تک ہی محدود نہیں ہے یہ دریافت کر سکتا ہے کہ کیا ایسے علم کے لیے جس کو ٹھیک ہونے کا دعویٰ ہے اور جس کے مصدقہ نتیجوں کی ایک لمبی فہرست موجود ہے کوئی ایسی نظری اساس مہیا نہیں کی جا سکتی جس پر زیادہ اعتراض نہ ہو سکے۔ اس ضمیمہ کا مقصد اُس جواب کو پیش کرنا ہے جو اس سوال کا دیا جا سکتا ہے۔

وہ نقطہ نظر جو آج کل بالعموم اختیار کیا جاتا ہے خالص تجربی ہے چنانچہ یہ کہا جاتا ہے کہ تمام علوم کا مقصد وہ طریقہ بیان کرنا ہے جس پر امور دنیا میں انجام پاتے ہیں[۱]۔ تجربہ کی رہنمائی سے ہم وہ قاعدے بنا سکتے ہیں جن کی مدد سے

---

[۱] کرکاف نے حرکیات کے متعلق حسب ذیل رائے ظاہر کی ہے:- (بقیہ حاشیہ بر صفحہ ۵۲۵)

ہم کم و بیش صحت کے ساتھ یہ کہہ سکتے ہیں کہ دیے ہوئے حالات کے تحت کیا نتیجے مرتب ہونگے یا پیشتر کیا تھے۔ ان قاعدوں کو بعض اوقات "قوانینِ فطرت" کے نام سے پُرشوکت بنایا جاتا ہے لیکن وہ ہماری موجودہ علمی حالت سے اور اُس درجہ ہُنر سے تعلق رکھتے ہیں جس کے ذریعہ ہم ان کو جامع طور پر بیان کرنے میں کم یا بیش کامیاب ہوئے ہیں۔ اس طرح اُن کی وقت بہ وقت ترمیم ہو سکتی ہے یا ان کو زیادہ سہولت بخش یا زیادہ جامعیت کے ساتھ دوسرے طرز میں بیان کیا جا سکتا ہے۔

نیز یہ یاد رہے کہ ہم کسی ایسی نا اُمید یا فی الحقیقت بیکار شے کی کوشش (۳۴۷)
نہیں کرتے جیسے کہ کسی مظہر کا **مکمل** بیان ہے۔ بعض خصوصیات دوسروں کی بہ نسبت ہمارے لیے زیادہ اہم یا زیادہ دلچسپ ہوتے ہیں، ان کی اضافی سادگی اور واضح استقلال کی بنا پر سب سے پہلے ہمیں ان پر توجہ کرنی چاہیے، برخلاف اس کے وہ جو بظاہر اتفاقی اور موقع بہ موقع متغیر ہوتے ہیں قابلِ نظر انداز ہیں یا بعد میں امتحان کے لیے ملتوی کیے جاتے ہیں۔ پس یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ کسی ایسے بیان کے لیے جو ممکن ہے کچھ نہ کچھ تجربہ کا عمل ناگزیر ہے اگر ہم اپنے بیانوں کو سادہ اور معین شکل میں رکھنا چاہیں۔ مثلاً ہوا میں ایک پتھر کی پرواز پر غور کرتے وقت ہم اپنے خیال میں اس کو ایک ریاضیاتی نقطہ تصور کرتے ہیں۔ اس کی جسامت اور شکل، وہ پیچیدہ گردشی حرکت جو وہ ہوا میں کرتا ہوا نظر آتا ہے، وہ اندرونی فساد اور ارتعاشس جو بلاشبہ وقوع پذیر ہوتے ہیں ان سب کو ذہنی تصویر میں نظر انداز کیا جاتا ہے تاکہ توجہ مظہر کے اُن خصوصیات پر مرکوز ہو جو ہمارے لیے

(بقیہ حاشیہ صفحہ ۵۲۴)

"اُس وضاحت کا خیال کرتے ہوئے جو میکانیت کے نتائج میں دوسری صورتوں میں پائی جاتی ہے، مجھے یہ مناسب معلوم ہوتا ہے کہ اس قسم کے دھندلے تصورات کو اس سے دور رکھا جائے خواہ یہ صرف اس صورت میں ممکن ہو کہ ہم میکانیت کے مقصد ہی کی تحدید کرنے پر مجبور ہو جائیں۔ اس بنا پر میں میکانیت کا مقصد صرف یہ سمجھتا ہوں کہ قدرت میں ہونے والی حرکات کو بیان کیا جائے۔"

Mechanik, Leipzig, 1876

سب سے زیادہ دلچسپ ہیں۔ ہمارے مضمون کی بعد والی منزل میں مثالی استوار جسم کا تصور پیش کیا گیا ہے، اس کی بدولت ہم بعض وہ تفصیلات پُر کر سکتے ہیں جن کو اول نظر انداز کیا گیا تھا لیکن دوسروں کو پھر بھی چھوڑ دیا جاتا ہے۔ نیز قوت کا یہ تصور کہ وہ ایک ریاضیاتی خط میں مرتکز ہے ایسا ہی مصنوعی ہے جیسا کہ کسی کمیت کو ایک نقطہ میں مرتکز سمجھنا۔ لیکن اس سے ہمارے مقاصد میں سہولت پیدا ہوتی ہے کیونکہ ہمارے بیان مختصر اور سادہ ہو جاتے ہیں۔

وہ قانون جو اِن مثالی تعبیروں پر عائد کیے جاتے ہیں بڑی حد تک ہمارے انتخاب پر منحصر ہیں کیونکہ اب ہم ذہنی اشیاء سے بحث کر رہے ہیں[1]۔ مجرد حرکیات کا کوئی اسکیم جس کو اس طریقہ پر بنایا گیا ہو بشرطیکہ وہ مستقیم بالذات ہو ریاضیاتی طور پر جائز ہے، لیکن طبیعی نقطۂ نظر سے اس امر کی ضرورت ہے کہ وہ مظاہر کی ترتیب کو جس طرح کہ وہ فی الواقع وقوع پذیر ہوتے ہیں خیال میں لانے میں مدد دے۔ اس لحاظ سے کامیابی یا ناکامی کا تصفیہ واقعات کے ساتھ اُن نتیجوں کا مقابلہ کرنے سے ہو سکتا ہے جو اس سے حاصل ہوتے ہیں۔ نیز یہ قابل مشاہدہ طلب ہے کہ دستیاب آزمائشیں اسکیم پر صرف بہ حیثیت مجموعی اطلاق پذیر ہوتی ہیں کیونکہ حقیقی مظاہر کی پیچیدگی کی وجہ سے ہم اُس کے کسی ایک اصول (۲۲۸)
موضوعہ کو دوسروں سے الگ کر کے تصدیق نہیں کر سکتے۔

اسی نقطۂ نظر سے حرکت کی اضافیت کا سوال جو اکثر اس مضمون کی ابتداء ہی میں سنگ راہ کے طور پر محسوس ہوتا ہے قابل تصفیہ ہے۔ "حرکت" سے ہماری مراد حوالے کے کسی فریم کے لحاظ سے حرکت ہے جہاں اس فریم کو رسماً "ثابت" کہا جاتا

---

[1] دیکھو میکسویل۔ "مجرد حرکیات میں جن اجسام سے بحث کی جاتی ہے، ان سے ہم کامل طور پر اسی طرح واقف ہیں جس طرح اقلیدس میں اعداد سے۔ ان کے کوئی خواص نہیں ہوتے سوائے ان کے جو صراحت کے ساتھ ان کے لیے مختص کر دیے جائیں گے" Scientific Papers, Vol.2, P.779. مضمون جس کا حوالہ دیا گیا ہے ۱۸۷۹ء میں لکھا گیا تھا۔

ہے۔ ہمارے مضمون کی ابتدائی منزلوں میں یہ فریم کوئی استوار یا بظاہر استوار ساخت ہو سکتا ہے جو زمین کے لحاظ سے ثابت ہو۔ جب ایسے مظاہر پیش ہوتے ہیں جو اس اصول پر آسانی سے ٹھیک نہیں بیٹھتے تو چند امکانات ہیں، ایک یہ کہ ہم حرکت کے اپنے مسلمہ قانون میں ترمیم کریں یا یہ کہ بیرونی قوتوں سے مدد لیں یا یہ کہ یہ دیکھیں کہ آیا حوالے کے کسی نئے فریم سے یہ تناقص رفع ہو سکتا ہے۔ یہ کہنے کی چنداں ضرورت نہیں کہ آخری طریقہ کار اب تک ٹھیک معلوم ہوا ہے۔ اول ہم قائم محوروں کا ایک نظام اختیار کرتے ہیں جن کا مبدا زمین میں ثابت ہوتا ہے لیکن جن کی سمتیں ستاروں کے لحاظ سے ثابت ہوتی ہیں۔ سیاروی نظریہ میں مبدا کو سورج پر منتقل کیا جاتا ہے اور بعد میں نظام شمسی کے مرکز کمیت پر اور علیٰ ہذا۔ ہر اگلے قدم پر زیادہ صحت اور جامعیت حاصل ہوتی ہے اور اس اذعان کی پرورش ہوتی ہے کہ قائم محوروں کا کوئی نظام[1] موجود ہے جس کے لحاظ سے نیوٹن کا اسکیم پوری ضروری صحت کے ساتھ درست ہے۔

وقت ایک قابل پیمائش مقدار ہے اور اس کے تخیل پر بھی وہ امور اطلاق پذیر ہیں جن کا ذکر اوپر آ چکا ہے۔ خالص حرکیات محض کے نقطہ نظر سے ہمارے ضابطوں کا ت کوئی مسلسل غیر تابع متغیر ہو سکتا ہے جو کسی طبیعی عمل سے حاصل ہوتا ہے۔ لیکن حرکیاتی نقطہ نظر سے یہ واضح ہے کہ مساواتیں، جو وقت کی پیمائش کے ایک نظام پر واقعات کو صحیح طور پر تعبیر کرتی ہیں دوسرے نظام پر بالکل ہی نادرست ہو سکتی ہیں۔ نیوٹن کا نظام نہ صرف حوالہ کی ایک مطلق ہندسی اساس کا ادعا کرتا ہے بلکہ کسی مطلق وقت کے پیمانہ کا بھی، جو (جہاں تک کہ مشاہدوں کا تعلق ہے) اس عملی پیمانہ سے بہت کچھ ناقابل تمیز ہے جو زمین کی گردش پر مبنی ہے۔

[1] یہ نظام واحد طور پر بے شک ناقابل تعین ہے۔ اگر ایک نظام ا جس سے ضروری شرائط کی تکمیل ہوتی ہو، معلوم کیا جا سکے تو کوئی دوسرا نظام ب جو ا کی اضافت سے منتقل رفتار کے ساتھ انتقال کی حرکت رکھتا ہو، یکساں طور پر مفید و کارآمد ہوگا (دفعات ۲، ۲۲)۔

(۳۴۹) ہماری مثالی تعبیر میں حقیقی جسموں کے جمود کے صریحاً مختلف درجے ہر ذرہ سے ایک مناسب کمیت یا جمود کا سر م منسوب کرنے سے پیدا ہوتے ہیں اور کمیت اور رفتار کا حاصل ضرب م و معیار حرکت کہلاتا ہے۔ نیوٹن کے نظام میں رفتار کی تبدیلی قوت کے عمل سے منسوب کی جاتی ہے اور اگر ہم قوت ف کو معیار حرکت کی تبدیلی کی شرح سے جو وہ پیدا کرتی ہے پیمائش کرنے پر متفق ہوں تو سمتی مساوات

$$\frac{\text{فر}}{\text{فرت}} (\text{م و}) = \text{ف}$$

حاصل ہوتی ہے۔ اِس نقطہ نظر سے یہ مساوات ایک مسلمہ حقیقت ہے۔ اس کی حقیقی اہمیت اس واقعہ پر مبنی ہے کہ کمیتوں م کو مناسب قیمتیں دینے اور ف کی قیمتوں کے متعلق معمولی مفروضے اختیار کرنے سے ہم مظاہر کی (جیسا کہ وہ فی الحقیقت واقع ہوتے ہیں) کل جماعتوں کی مناسب تعبیریں حاصل کر سکتے ہیں۔

عمل اور تعامل کے متعلق اور اُن اصول موضوعہ کے متعلق بھی مشابہ امور بیان کیے جا سکتے ہیں جو اختیار کیے جاتے ہیں جب کہ ہم استوار جسموں پر بحث کرتے ہیں لیکن یہاں ان پر تفصیل سے بحث کرنا غیر ضروری ہے[1]

آخر میں ہم یہ کہیں گے کہ اوپر جو کچھ بیان کیا گیا ہے وہ طالب علم کے ضمیر کو مطمئن کرنے کے لیے ہے اور اس کا مقصد نئے خیالات کی فراہمی نہیں ہے کبھی کبھی اپنے طریقوں کی مصنوعی نوعیت اور بندشوں کا تسلیم کرنا مناسب ہے لیکن کسی طرح یہ مناسب نہیں کہ طالب علم اپنے حرکیاتی خیالات اور تخیلات کو مجرد نظریہ کی کسی قدر بے حقیقت خیالی تصویروں میں ڈھالنے کی ہمیشہ کوشش کرتا رہے۔ بہتر یہی ہے کہ وہ قوت اور جمود کے معمولی اور ٹھوس تصوروں کو اختیار کرے جو کسی منطقی کو خواہ کتنے ہی خام معلوم ہوں سائنس کے تقریباً تمام بڑے بڑے کاریگروں کے لیے اُن کے پیشہ کا پورا ساز و سامان ہیں۔

[1] اس نوٹ کا خلاصہ، بالخصوص مضمون علم الحیل سے جو Encyclopædia Britannica کی گیارھویں اشاعت میں موجود ہے، اس کے مالکین کی اجازت کے ساتھ حاصل کیا گیا ہے۔

اشاریہ

حرکیات

ا

م

ن

و

ہ

ی

صحت نامہ

حرکیات

صفحہ	سطر	غلط	صحیح
۸	۱۳	میٹر	سنٹی میٹر
۹	۹، ۲۱	میٹر	سنٹی میٹر
"	فٹ نوٹ	کی گئی ہے	لی گئی ہے
۱۰	۹	نسبت ۱	نسبت ۱ :
۱۱	۱۵	نسبت ۲۷ : ۲۵	نسبت ۲۲ : ۱۵
"	۱۶	نسبت ۱۵ : ۲۲	نسبت ۱۵:۲۲
۱۲	۱۳	میٹر	سنٹی میٹر
۲۲	۱۴	مکافی[1]	مکانی[1]
۷۸	۱۶	د + مف د	و + مف و
۸۴	۷	متقیم	مستقیم
۸۶	۱۷	سَ	ش
۸۷	۱۵	= شہ	= تہ
۹۲	۱۰	ماظل	- ماظل
۱۱۶	۲۲	خارج المرکز	خارج المرکز
۱۲۰	۸	سرا	سرا
۱۲۸	۵	ففل	فصل
۱۳۲	۳	قیہ کی	قبہ کی
۱۳۲	۱۸	لہ … کے تناسب	رُ … کے تناسب
۱۳۴	۱۵	محل ولَا و مَا	محل ولَا، ومَا
۱۳۶	۲۰	یہ م	- ۲ م
۱۳۷	۳	رفتار ن	رفتار س
۱۳۹	۱۷	+ صہ …	+ صہ) …
۱۴۶	۱۳	مرقسم	مرتسم
۱۴۷	۱۴	متوازی ہو	متوازی ہو اور
۱۷۱	۱۳	جم سا فر سا / فر س	جم سا فر۲ سا / فر س۲
۱۸۵	۱۳	م۱ ع۱۲	م۱ عَ۱۲
"	"	م۱ ع۱۲	م۱ عَ۲۲
۲۰۲	۱۲	کیا جاتا ہے۔	کیا جاتا۔
۲۰۹	۸	ک	کؔ
"	۱۸	وگ۲	وک۲
"	"	× گ	× ک
۲۱۱	۴	ف = غہ	و غہ
"	۵	رفتار ف	رفتار و
"	۶	وَ + ف۲)	وَ + و۲)

صفحہ	سطر	غلط	صحیح
۲۱۱	۷	(م ف۲)	(م ق۲)
〃	۱۰	∑ (م ق ف)	∑ (م قَ ق)
〃	〃	(م ف)	(م ق)
〃	۱۵	(ف - فَ)۲	(ق - قَ)۲
۲۱۸	۱۰	ف =	ق =
〃	۱۸	مہ فرف/فزت	مہ فرق/فزت
۲۱۹	۵	ف = منتقل	ق = منتقل
۲۳۰	حاشیہ سطر ۱	عام	ایک عام
۲۴۷	۲	ک = مہ π۲	ک = ۴ π۲
〃	۵	ک = ۴π۲ع . ل / ت۲ - ت۲	ک = ۴π۲ع۲ . ل / ت۲ - ت۲
۲۸۹	شکل نمبر ۶۰	ط	طَ
۳۰۳	شکل	۲۷	۶۷
۳۱۲	۱	محوہ پر	محور پر
۳۴۳	۱	= ۱/۲ اَ بُ	= ۱/سہ اَ بُ
۳۵۱	۳	سے (۶) یہ معلوم	سے یہ معلوم
۳۵۷	۳	مہ۲/ر۲ ۲	مہ۲/ر۲ ۲
۳۹۴	حاشیہ سطر ۲	وانون	قانون
۳۹۶	۳	۲ ر∞	۲ ر∞

صفحہ	سطر	غلط	صحیح
۴۱۹	۱۵	فز۲ لا / فزت	فز۲ لا / فزت۲
۴۳۸	۱۰	وک لا	وَک لا
۴۴۲	۹	وَ - ۲ج مہ/۲و	و - ۲ج مہ/۲و
〃	۱۱	ع/و	ع./و
۴۶۱	۶	ہُوتا	ہوتا
۴۸۷	۷	(طَہ فہ + طہ فَہ)	(طَہ فہ + طہ فَہ)
۴۹۰	۶	فہ	فہ
۵۰۰	۱	جو دفعہ ۴۴	دفعہ ۴۴
〃	۵	ثہ	قہ
۵۰۲	۱۹	وحہ	وجہ
۵۰۵	۷	حرکت کی کی مساواتیں	حرکت کی مساواتیں
〃	۲۱	{(ع + م وُ۲ (۱ + ۳جم۲ عہ)) / (ع + م وُ۲ جب۲ عہ)}	{(ع + م وُ۲ (۱ + ۳جم۲ عہ)) / (ع + م وُ۲ جب۲ عہ)}
۵۰۷	۷	فہ	فہ
۵۱۱	۴	گیے	گئے
۵۲۱	۵	اُ ہوع	اُقوع
〃	۶	جبزع =	جزع =
۵۲۳	۱۷	کیئے گیئے	کیے گئے